Вероятность. Что это?

Теория вероятностей, как следует из названия, имеет дело с вероятностями. Нас окружают множество вещей и явлений, о которых, как бы ни была развита наука, нельзя сделать точных прогнозов. Мы не знаем, какую карту вытянем из колоды наугад или сколько дней в мае будет идти дождь, но, имея некоторую дополнительную информацию, можем строить прогнозы и вычислять вероятности этих случайных событий. Таким образом, мы сталкиваемся с основным понятием **случайного события** - явления, поведение которого невозможно предсказать, опыта, результат которого заранее невозможно вычислить. Именно вероятности событий вычисляются в типовых задачах. Вероятность - это некоторая, строго говоря, функция, принимающая значения от 0 до 1 и характеризующая данное случайное событие. 0 - событие практически невозможно, 1 - событие практически достоверно, 0,5 (или "50 на 50") - с равной вероятностью событие произойдет или нет.

Как решать задачи: классическая вероятность

Решение задач основано на одной лишь формуле, представляющей собой классическое определение вероятности.

***Вероятностью события** A* называют отношение числа *N(A)* благоприятствующих этому событию исходов к общему числу *N* всех равновозможных несовместимых событий, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице: $P(A)=1$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(A)=0$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей: $0 \le P(A) \le 1$

Понять формулу проще всего на примерах.

Пример 1. В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад (не глядя) достаём один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?

Решение. Теперь вычислим вероятность выбора синего шара.

Событие A: "выбранный шар оказался синего цвета"

Общее число всех возможных исходов: 9+3=12 (количество всех шаров, которые мы могли бы вытащить)

Число благоприятных для события A исходов: 3 (количество таких исходов, при которых событие A произошло, - то есть, количество синих шаров)

P(A)=3/12=1/4=0,25

Ответ: 0,25

Пример 2. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение: 1000 – 5 = 995 насосов не подтекают. Вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает равна

$$P = \frac{995}{1000} = 0{,}995$$

Ответ: 0,995

Немного отличаются формулировкой задачи теории вероятности, где нужно вычислить вероятность выпадения какого-то события на определенный день. Как и в предыдущих задачах, нужно определить, что является элементарным исходом, после чего применить ту же формулу.

Пример 3. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

Решение: Что здесь является элементарным исходом? – Присвоение докладу профессора какого-то одного из всех возможных порядковых номеров для выступления. В жеребьевке участвует 15+15+20=50 человек. Таким образом, доклад профессора М. может получить один из 50 номеров.

Значит, и элементарных исходов всего 50.
А какие исходы благоприятные? – Те, при которых окажется, что профессор будет выступать в третий день. То есть, последние 20 номеров.
По формуле вероятность P(A)= 20/50=2/5=4/10=0,4
Ответ: 0,4
Жеребьевка здесь представляет собой установление случайного соответствия между людьми и упорядоченными местами. Можно к той же ситуации подходить с другой стороны: кто из людей с какой вероятностью мог бы попасть на конкретное место

Пример 4. В жеребьевке участвуют 5 немцев, 8 французов и 3 эстонца. Какова вероятность того, что первым (/вторым/седьмым/последним – не важно) будет выступать француз.
Решение: Количество элементарных исходов – количество всех возможных людей, которые могли бы по жеребьевке попасть на данное место. 5+8+3=16 человек.
Благоприятные исходы – французы. 8 человек.
Искомая вероятность: 8/16=1/2=0,5
Ответ: 0,5

Более творческие задачи про монеты и игральные кости. Приведем несколько примеров на бросание монеты или кубика.

Пример 5. Когда подбрасываем монету, какова вероятность выпадения решки?
Исходов 2 – орел или решка (считается, что монета никогда не падает на ребро) Благоприятный исход – решка, 1.
Вероятность 1/2=0,5
Ответ: 0,5.

Пример 6. А если подбрасываем монету два раза? Какова вероятность того, что оба раза выпадет орел?
Решение: Главное определить, какие элементарные исходы будем рассматривать при подбрасывании двух монет. После подбрасывания двух монет может получиться один из следующих результатов:
1) РР – оба раза выпала решка
2) РО – первый раз решка, второй раз орел
3) ОР – первый раз орел, второй раз решка
4) ОО – оба раза выпал орел
Других вариантов нет. Значит, элементарных исходов 4. Благоприятный из них только четвертый, 1.
Вероятность: 1/4=0,25
Ответ: 0,25
Какова вероятность того, что из двух подбрасываний монеты один раз выпадет решка?
Количество элементарных исходов то же, 4. Благоприятные исходы – второй и третий, 2.
Вероятность выпадения одной решки: 2/4=0,5
В таких задачах может пригодиться ещё одна формула.
Если при одном бросании монеты возможных вариантов результата у нас 2, то для двух бросаний результатов будет $2\cdot2=2^2=4$ (как в примере 6), для трех бросаний $2\cdot2\cdot2=2^3=8$, для четырех: $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$, … для N бросаний возможных результатов будет $2\cdot2\cdot...\cdot2=2^N$.
Так, можно найти вероятность выпадения 5 решек из 5 бросаний монеты.
Общее число элементарных исходов: $2^5=32$.
Благоприятных исходов: 1. (РРРРР – все 5 раз решка)
Вероятность: 1/32=0,03125
То же верно и для игральной кости. При одном бросании возможных результатов здесь 6. Значит, для двух бросаний: $6\cdot6=36$, для трех $6\cdot6\cdot6=216$, и т. д.

Задача 6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.
Решение: Обозначим выпадение орла через О, выпадение решки через Р.
Тогда возможны следующие варианты: ОО, **ОР**, **РО**, РР.

Всего возможных вариантов: 4.
Из них решка выпадет ровно один раз в 2 вариантах (выделены полужирным начертанием).
Поэтому вероятность того, что решка выпадет ровно 1 раз, равна

$$P = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

Задача 7. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска окончатся одинаково.
Решение: Пусть орёл - О, решка - Р. Возможные варианты выпадения монеты: **ООО**,**ООР**, ОРО, РОО, ОРР, РОР, **РРО**, **РРР**. Всего вариантов - 8. Из них благоприятных вариантов - 4 (первый, второй, седьмой и восьмой - выделены полужирным начертанием). Поэтому, вероятность того, что первые два броска окончатся одинаково равна

$$P = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

Задача 8. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8. Результат округлите до тысячных.
Решение: Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее количество исходов равно 6 · 6 = 36. А количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: это 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна

$$P = \frac{5}{36} = 0{,}13888\ldots \approx 0{,}139$$

Ответ: 0,139

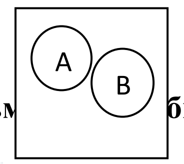
Есть задачи, где речь идет о двух или более событиях. Рассмотрим такие задачи.
Теория
Случайные события А и В называются ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события *A* и *B* называются ***совместными***, если при данном испытании могут произойти оба эти события.
Противоположное событие (по отношению к А) – это событие Ã, которое не происходит, если А происходит.
События событий *A* и *B* называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.
Событие А называется ***зависимым*** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Суммой событий *A* и *B* называется событие *A* + *B*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: ***A* или *B*.**

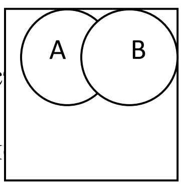
1. **Теорема о сложении вероятностей.** Вероятность появления одного из двух **несовместных событий** равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$



2. **Теорема о сложении вероятностей.** Вероятность суммы **совм** **бытий** вычисляется по формуле:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Произведением событий *A* и *B* называется событие *AB*, которое нас и только тогда, когда наступают оба события: ***A* и *B* одновременно.**
Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения н событий *A* и *B* вычисляется по формуле:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Задачи на теоремы сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий

1. Возьмём в руки игральный кубик с **полной группой событий** $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

А) Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6} = B_5 + B_6$ *(выпадет 5 **или** 6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(B_5 + B_6) = P(B_5) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Б) Рассмотрим событие $B_{1-4} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

В) По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

$P(B_1 + B_3 + B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ и так далее.

2. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.
Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.
По классическому определению:

$p_1 = \frac{4}{20} = 0,2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3 = \frac{7}{20} = 0,35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий:

$p = p_1 + p_3 = 0,2 + 0,35 = 0,55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.
Ответ: 0,55

Рассмотрим примеры на произведение событий
Пример: подбрасываются две монеты и следующим событиям:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл.

Решение: Найдём вероятность события A_1A_2 (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл. Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события A_1 и A_2 независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично:

$P(\overline{A_1}\overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;

$P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;

$P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

Заметьте, что события $A_1 A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1 A_2$ образуют **полную группу** и сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) + P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на большее количество независимых событий, так, например, если события A, B, C независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Потренируемся на конкретных примерах:

Задача 1

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь **и** из 2-го стандартная **и** из 3-го стандартная)* выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

Задача 2

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;

б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Решение: вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события:

A_1 – 1-й стрелок попадёт в мишень;

A_2 – 2-й стрелок попадёт в мишень.

По условию: $P(A_1) = 0{,}8; \quad P(A_2) = 0{,}6$.

Найдём вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ – того, что соответствующие стрелки промахнутся:

$P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$

$P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

а) Рассмотрим событие: Данное событие состоит в двух несовместных исходах:
1-й стрелок попадёт **и** 2-й промахнётся
или
1-й промахнётся **и** 2-й попадёт.
На языке **<u>алгебры событий</u>** этот факт запишется следующей формулой:
$B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$
Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:
$P(B) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) =$
$= 0{,}8\cdot 0{,}4 + 0{,}2\cdot 0{,}6 = 0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44$ – вероятность того, что будет только одно попадание.

б) Рассмотрим событие: C – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.
Прежде всего, ВДУМАЕМСЯ – что значит условие «ХОТЯ БЫ ОДИН»? В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок (2-й промахнётся) **или** 2-й (1-й промахнётся) **или** оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

Способ первый: учитывая готовую вероятность предыдущего пункта, событие C удобно представить в виде суммы следующих несовместных событий:
попадёт кто-то один *(событие B, состоящее в свою очередь из 2 несовместных исходов)* **или** попадут оба стрелка – обозначим данное событие буквой D.
Таким образом: $C = B + D$
По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(D) = P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48$ – вероятность того, что 1-й стрелок попадёт **и** 2-й стрелок попадёт.
По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
$P(C) = P(B + D) = P(B) + P(C) = 0{,}44 + 0{,}48 = 0{,}92$ – вероятность хотя бы одного попадания по мишени.

Способ второй: рассмотрим противоположное событие: $\overline{C}$ – оба стрелка промахнутся.
По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$
В результате: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$
Особое внимание обратите на второй способ – в общем случае он более рационален.

***Способ третий**: события A_1, A_2 совместны, а значит, их сумма $A_1 + A_2$ выражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень»*
*По **теореме сложения вероятностей совместных событий** и теореме умножения вероятностей независимых событий:*
$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P(A_2) =$
$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8\cdot 0{,}6 = 1{,}4 - 0{,}48 = 0{,}92$
Ответ: а) 0,44, б) 0,92

<u>Задача 3.</u> Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение: **Событие независимое.** Вероятность того, что пистолет пристрелянный равна 2/10 = 0,2, что не пристрелянный 8/10 = 0,8
Вероятность того, что попадется пристрелянный и Джон попадет, равна 0,2 · 0,9 = 0,18
Вероятность того, что попадется непристрелянный и Джон попадет, равна 0,8 · 0,3 = 0,24

Вероятность попасть: 0,18 + 0,24 = 0,42
Вероятность промаха: Р = 1 - 0,42 = 0,58
Ответ: 0,58

Задача 4. Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.
Решение: **Несовместимые.**1) вероятность того, что он прослужит меньше двух лет 1 - 0,84 = 0,16
2) вероятность того, что он прослужит больше года, дана в условии 0,98
3) значит вероятность того, что он сломается за первый год равна 1 - 0,98 = 0,02
4) вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года 0,16 - 0,02 = 0,14
Ответ: 0,14

Задача 5. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.
Решение: **Независимые.** Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: 0,52 · 0,3 = 0,156
Ответ: 0,156

Задача 6. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1% . Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
Решение: **Несовместимые.** Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: 0,45 · 0,03 = 0, 0135
Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: 0,55 · 0,01= 0,0055
По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна 0,0135 + 0,0055 = 0,019
Ответ: 0,019

Задача 7. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.
Решение: Рассмотрим события:

A = кофе закончится в первом автомате,
B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

A · B = кофе закончится в обоих автоматах,
A + B = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию P(A) = P(B) = 0,3; P(AB)= 0,12

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$$

Тогда, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна 1 - 0,48 = 0,52
Ответ: 0,52