Вероятность. Что это?

Как решать задачи

Решение задач основано на одной лишь формуле, представляющей собой классическое определение вероятности.

Вероятностью события *A* называют отношение числа *N(A)* благоприятствующих этому событию исходов к общему числу *N* всех равновозможных несовместимых событий, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице: $P(A)=1$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(A)=0$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей: $0 \leq P(A) \leq 1$

Пример 1. В корзине 9 красных шаров и 3 синих. Шары различаются только цветом. Наугад (не глядя) достаём один из них. Какова вероятность того, что выбранный таким образом шар окажется синего цвета?

Решение. Теперь вычислим вероятность выбора синего шара.
Событие А: "выбранный шар оказался синего цвета"
Общее число всех возможных исходов: 9+3=12 (количество всех шаров, которые мы могли бы вытащить)
Число благоприятных для события А исходов: 3 (количество таких исходов, при которых событие А произошло, - то есть, количество синих шаров)
P(A)=3/12=1/4=0,25

Пример 2. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение: 1000 – 5 = 995 насосов не подтекают. Вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает равна

$$P = \frac{995}{1000} = 0{,}995$$

Пример 3. Конференция длится три дня. В первый и второй день выступают по 15 докладчиков, в третий день – 20. Какова вероятность того, что доклад профессора М. выпадет на третий день, если порядок докладов определяется жеребьевкой?

Решение: Что здесь является элементарным исходом? – Присвоение докладу профессора какого-то одного из всех возможных порядковых номеров для выступления. В жеребьевке участвует 15+15+20=50 человек. Таким образом, доклад профессора М. может получить один из 50 номеров. Значит, и элементарных исходов всего 50.
А какие исходы благоприятные? – Те, при которых окажется, что профессор будет выступать в третий день. То есть, последние 20 номеров.
По формуле вероятность $P(A) = 20/50 = 2/5 = 4/10 = 0{,}4$

Более творческие задачи про монеты и игральные кости. Приведем несколько примеров на бросание монеты или кубика.

Пример 4. Когда подбрасываем монету, какова вероятность выпадения решки?
Исходов 2 – орел или решка (считается, что монета никогда не падает на ребро)
Благоприятный исход – решка, 1.
Вероятность 1/2=0,5
Ответ: 0,5.

Пример 5. А если подбрасываем монету два раза? Какова вероятность того, что оба раза выпадет орел?

Решение: Главное определить, какие элементарные исходы будем рассматривать при подбрасывании двух монет. После подбрасывания двух монет может получиться один из следующих результатов:
1) РР – оба раза выпала решка
2) РО – первый раз решка, второй раз орел
3) ОР – первый раз орел, второй раз решка
4) ОО – оба раза выпал орел
Других вариантов нет. Значит, элементарных исходов 4.
Благоприятный из них только четвертый, 1.
Вероятность: 1/4=0,25

В таких задачах может пригодиться ещё одна формула.
Если при одном бросании монеты возможных вариантов результата у нас 2, то для двух бросаний результатов будет $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ (как в примере 6), для трех бросаний $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, для четырех: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$, … для N бросаний возможных результатов будет $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^N$.

Так, можно найти вероятность выпадения 5 решек из 5 бросаний монеты.
Общее число элементарных исходов: $2^5 = 32$.
Благоприятных исходов: 1. (РРРРР – все 5 раз решка)
Вероятность: 1/32=0,03125

То же верно и для игральной кости. При одном бросании возможных результатов здесь 6. Значит, для двух бросаний: $6 \cdot 6 = 36$, для трех $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, и т. д.

Задачи на сложение и умножение

Теория

Случайные события А и В называются ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события *A* и *B* называются ***совместными***, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

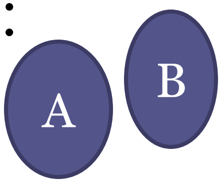
Противоположное событие (по отношению к А) – это событие Ã, которое не происходит, если А происходит.

События событий *A* и *B* называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Событие А называется ***зависимым*** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

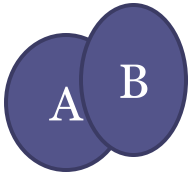
Суммой событий *A* и *B* называется событие $A + B$, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: ***A* или *B*.**

- **Теорема о сложении вероятностей.** Вероятность появления одного из двух **несовместных событий** равна сумме вероятностей этих событий:



$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

- **Теорема о сложении вероятностей.** Вероятность суммы **совместных событий** вычисляется по формуле: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



Произведением событий *A* и *B* называется событие *AB*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: ***A* и *B* одновременно.**

Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения независимых событий *A* и *B* вычисляется по формуле:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Возьмём в руки игральный кубик с **полной группой событий** , которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

а) Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: *(выпадет* ***5 или*** *6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_5 + B_6) = P(B_5) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

б) Рассмотрим событие $B_{1-4} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Задача на произведение событий

Задача: подбрасываются две монеты. Найти вероятность выпадения орла:

A– на 1-й монете выпадет орёл;

B– на 2-й монете выпадет орёл.

Решение: Найдём вероятность события (на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й монете появится орёл. Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события и независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Задачи

Задача 1. В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение:

Вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях.

Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению: $P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь* ***и*** *из 2-го стандартная* ***и*** *из 3-го стандартная)* выражается произведением $S_1 S_2 S_3$

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(S_1 S_2 S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$$

– вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Задача 2

Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что:

а) только один стрелок попадёт в мишень;

б) хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Решение:

вероятность попадания/промаха одного стрелка, очевидно, не зависит от результативности другого стрелка.

Рассмотрим события:

А – 1-й стрелок попадёт в мишень;

В – 2-й стрелок попадёт в мишень.

Данное событие состоит в двух несовместных исходах:

1-й стрелок попадёт **и** 2-й промахнётся

или

1-й промахнётся **и** 2-й попадёт.

Сначала используем теорему сложения вероятностей несовместных событий, затем – теорему умножения вероятностей независимых событий:

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) = 0.8\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.6 = 0.32 + 0.12 = 0.44$$

б) Рассмотрим событие: – хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.

Прежде всего, ВДУМАЕМСЯ – что значит условие «ХОТЯ БЫ ОДИН»? В данном случае это означает, что попадёт или 1-й стрелок

(2-й промахнётся) **или** 2-й

(1-й промахнётся) **или** оба стрелка сразу – итого 3 несовместных исхода.

события совместны, а значит, их сумма выражает событие «хотя бы один стрелок попадёт в мишень»

По **теореме сложения вероятностей совместных событий** и теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

$$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 1{,}4 - 0{,}48 = 0{,}92$$

Задача 3. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,3. На столе лежат 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение:

Событие независимое. Вероятность того, что пистолет пристрелянный равна 2/10 = 0,2, что не пристрелянный 8/10 = 0,8

Вероятность того, что попадется пристрелянный и Джон попадет, равна $0,2 \cdot 0,9 = 0,18$

Вероятность того, что попадется непристрелянный и Джон попадет, равна $0,8 \cdot 0,3 = 0,24$

Вероятность попасть: $0,18 + 0,24 = 0,42$

Вероятность промаха: $P = 1 - 0,42 = 0,58$

Задача 4.

Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84.

Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение:

Несовместимые.1) вероятность того, что он прослужит меньше двух лет 1 - 0,84 = 0,16

2) вероятность того, что он прослужит больше года, дана в условии 0,98

3) значит вероятность того, что он сломается за первый год равна 1 - 0,98 = 0,02

4) вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года 0,16 - 0,02 = 0,14

Ответ: 0,14

Задача 5.

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур.

Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение:

Независимые. Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей: $0{,}52 \cdot 0{,}3 = 0{,}156$

Ответ: 0,156

Задача 6.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1% . Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

Несовместимые. Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}\ 0135$

Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}0055$

По формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0{,}0135 + 0{,}0055 = 0{,}019$

Ответ: 0,019

Задача 7.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

Рассмотрим события:

A = кофе закончится в первом автомате,
B = кофе закончится во втором автомате.

Тогда

$A \cdot B$ = кофе закончится в обоих автоматах,
$A + B$ = кофе закончится хотя бы в одном автомате.

По условию $P(A) = P(B) = 0{,}3$; $P(AB) = 0{,}12$

События A и B совместные, вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий, уменьшенной на вероятность их произведения:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}48$

Тогда, вероятность противоположного события, состоящего в том, что кофе останется в обоих автоматах, равна $1 - 0{,}48 = 0{,}52$

Ответ: 0,52

Используемая литература

1. https://www.youtube.com- **Теория вероятностей** на ЕГЭ по математике.
2. Студенецкая В.Н. Решение задач по по статистике и теории вероятностей. 7-9 классы. – Волгоград: Учитель, 2006.
3. Ященко И.В.Типовые экзаменационные работы. М: «Национальное образование», 2015.
4. www.ege-online-test.ru. Простые задачи по теории вероятности.
5. www.matburo.ru. Как решать задачи по теории вероятности.