МБОУ Шевыряловская основная общеобразовательная школа имени Д.В. Русинова

Избранные теоремы планиметрии

учащиеся 7 класса и учитель математики А.С. Коновалова

25 января 2018 год

Теорема Чевы

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах (или их продолжениях) BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Тогда, если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельными, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Замечание. Прямые, исходящие из вершины треугольника и пересекающиеся в одной точке, называются ***прямыми Чевы***, или чевианами.

Теорема Менелая

Пусть прямая пересекает $\triangle ABC$, причем C_1 – точка её пересечения со стороной AB, A_1 – точка её пересечения со стороной BC и B_1 – точка её пересечения с продолжением стороны AC. Тогда,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Теорема Ван-Обеля

Для каждой из трёх чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 пересекающихся внутри треугольника ABC в точке K, справедливо соотношение:

$$\frac{AK}{KA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Теорема Вариньона

Середины сторон произвольного четырехугольника является вершинами параллелограмма.

Теорема Понселе

Прямые, соединяющие какую-либо точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных его сторонах или на их продолжениях такие отрезки, что произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков.

$$AD_1\cdot BE_1\cdot CA_1\cdot DB_1\cdot EC_1 = D_1B\cdot E_1C\cdot A_1D\cdot B_1E\cdot C_1A$$

Теорема Шлёмильха

Прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

Теорема Карно (первая)

Если стороны плоского многоугольника или их продолжения пересечены прямой, то произведения отрезков сторон, не имеющих общих концов равно произведению остальных отрезков.

Первая теорема Гаусса

Пусть прямая пересекает стороны AB, BC и AC треугольника ABC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Тогда середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.

Вторая теорема Гаусса

Середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника, и середины его диагоналей лежат на одной прямой.

Теорема Паппа

Если A, C, E – три точки на одной прямой, B, D, F – три точки на другой прямой, и если три прямые AB, CD и EF пересекают прямые DE, FA и BC соответственно, то их точки пересечения лежат на одной прямой.

Теорема Паскаля

Если противоположные стороны вписанного шестиугольника не параллельны, то точки пересечения продолжения этих сторон лежат на одной прямой.

Теорема Эйлера

Ортоцентр H, центр тяжести M и центр O описанной около данного треугольника окружности, лежат на одной прямой, причем

$$H\text{-}M\text{-}O \text{ и } HM : MO = 2 : 1.$$

Теорема Птолемея

Для вписанного четырехугольника произведений диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Теорема Симсона

Основания перпендикуляров, проведенных к прямым, содержащим стороны треугольника, из произвольной точки описанной около него окружности, лежат на одной прямой.

Теорема Бретшнейдера

Пусть a, b, c, d – последовательные стороны четырехугольника, m и n – его диагонали, A и C – два противоположных угла. Тогда,

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C).$$

Теорема Помпею

Если ABC – правильный треугольник, M – произвольная точка, не лежащая на окружности, описанной около треугольника, то существует треугольник, стороны которого равны MA, MB и MC.

Теорема Мансиона

Отрезок, соединяющий центр вписанной в треугольник окружности с центром его вписанной окружности, делится описанной окружностью пополам.