

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ГРАМОТНОСТЬ

«Задачи из жизни»

Прикидки и оценки

Задачи на прикидки и оценки встречаются и в ЕГЭ, и в ОГЭ, и в ВПР. Они включены в эти экзаменационные работы по причине того, что умение примерно оценивать значения величин необходимо человеку в повседневной жизни. Умение прикидывать часто не менее важно, чем умение получать точный ответ. Оно позволяет находить ошибки, принимать решения о покупке/не покупке, определять достоверность данных.

Задача. Показания счётчика электроэнергии 1 января составляли 32768 киловатт-часов, а 1 февраля — 32864 киловатт-часов. По текущему тарифу стоимость 1 киловатт-часа электроэнергии составляет 3 рубля 50 копеек. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за январь?

Одна из распространённых ошибок при решении задачи про электроэнергию — просто умножить показания января на цену электроэнергии. Школьники получают при этом величину, превосходящую сто тысяч рублей, но не могут поймать себя на ошибке, так как не чувствуют величину этого числа. Важно привить школьникам умение анализировать полученный в задаче ответ с точки зрения здравого смысла.

Составление практикоориентированных задач на прикидки и проверку здравого смысла требует от составителя методической грамотности.

Пример неудачно составленной задачи.

Задача. Гепард пробегает 100 м за 9,1 с. За какое время гепард пробежит расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга, если это расстояние составляет 650 км?

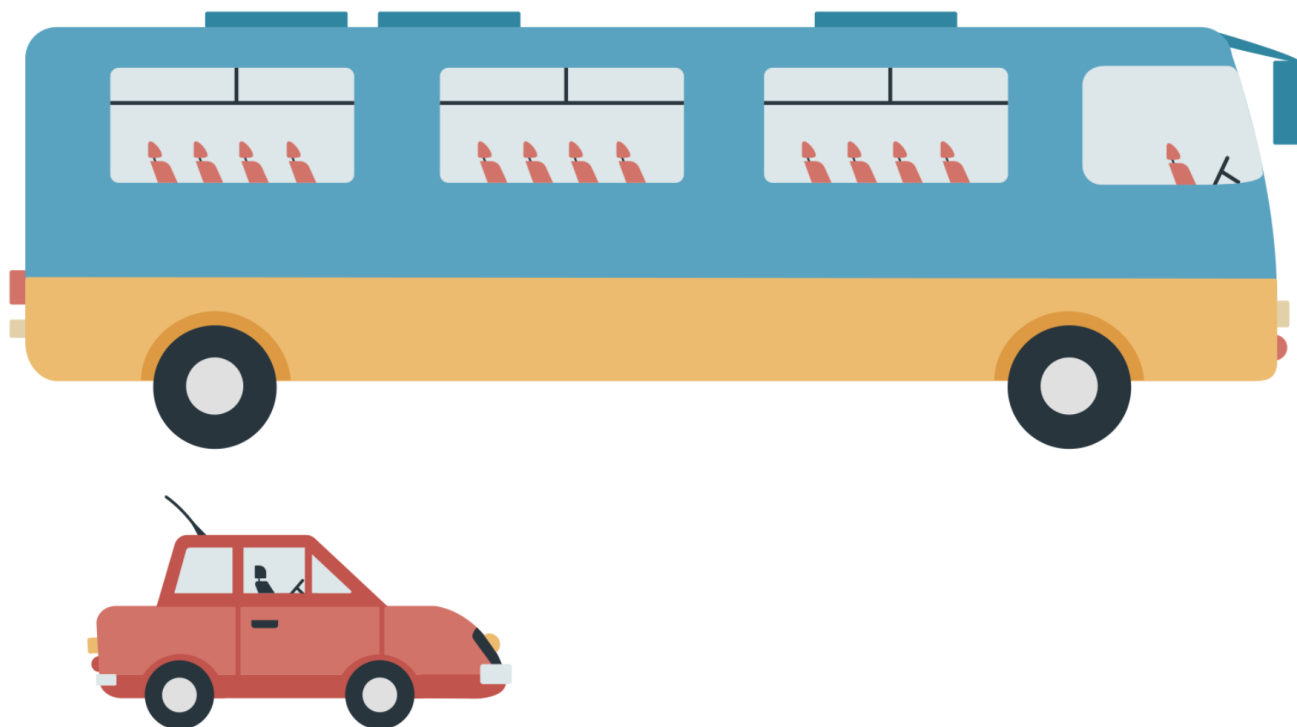
На первый взгляд в этой задаче к условию привязаны реалии жизни в России: школьники могут вспомнить расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга; также сообщаются любопытные данные о скорости бега гепарда. Но важно понимать, что гепард может бежать с такой скоростью буквально секунды, он никак не преодолеет расстояние в 650 км, поддерживая такую скорость. Задачи с практическим контекстом должны быть составлены на основе реальных данных, чтобы при решении этих задач действительно можно было использовать здравый смысл.

Задача. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями. К каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

Величины	Значения
Рост жирафа	6400 км
Толщина лезвия бритвы	500 см
Радиус Земли	0,08 мм
Ширина футбольного поля	68 м

Для её решения не нужно заучивать точные значения подобных величин. Достаточно привыкать к чувству порядка величины, изучая математику, физику, другие предметы.

Задача. На рисунке изображены автобус и автомобиль. Длина автомобиля равна 4,2 м. Какова примерная длина автобуса? Ответ дайте в сантиметрах.



В приведённой задаче верный ответ не единственный, можно указать любое значение, принадлежащее отрезку от 800 см до 1200 см. Часто это сбивает ребят, они не понимают, как решать такую задачу. Необходимо подчеркнуть, что в задаче просят оценить именно примерную длину, искать точное значение не требуется. Также важно обратить внимание школьников на единицы измерения, в которых необходимо дать ответ: длина автомобиля дана в метрах, а ответ нужно указать в сантиметрах.

Упражнения

1. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями. К каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

Величины	Значения
Рост жирафа	6400 км
Толщина лезвия бритвы	500 см
Радиус Земли	0,08 мм
Ширина футбольного поля	68 м

Росту жирафа соответствует значение...

Толщине лезвия бритвы соответствует значение...

Радиусу Земли соответствует значение...

Ширине футбольного поля соответствует значение...

2. На городской парковке припаркованы два легковых автомобиля (см. рисунок). Сколько примерно легковых автомобилей сможет припарковаться между ними?



3. В пачке 250 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 700 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 8 недель?

Чтение текста

Один из первых и самых ключевых навыков функциональной грамотности в математике — чтение сложных текстов, из которых не всегда очевидно, что именно требуется в задаче. К сожалению, этой теме уделяется мало внимания, особенно в старших классах. Статистика проведения ЕГЭ говорит о том, что даже в очень простых задачах школьники допускают обидные ошибки, неправильно читая условия задач и находя ответ не на тот вопрос, который предлагался в задаче. Например, в задачах по планиметрии школьники верно находят площадь трапеции, хотя в задаче требовалось найти её среднюю линию. Другой пример: в задаче на поиск меньшего корня квадратного уравнения школьники невнимательно читают условие и записывают в ответ значение большего корня.

Важным признаком того, что условие прочитано неверно, может служить очень сложное решение или «некрасивый» ответ в задаче.

Задача-шутка, которая хорошо иллюстрирует, как важно внимательно читать условие. Представьте, что вы капитан круизного лайнера, на котором путешествуют 500 пассажиров. Этот лайнер плывёт со скоростью 20 узлов в час (один узел равен 1,852 км/ч), предполагаемое время путешествия 7 дней. Сколько лет капитану корабля?

Как правило, человек, решающий эту задачу, сразу переходит к анализу чисел и пропускает первую фразу. А именно она помогает ответить на вопрос задачи: решающему достаточно указать свой возраст.

Рассмотрим ещё один пример задачи, требующей вдумчивого чтения условия. Эту задачу предлагают школьникам, поступающим в Президентский физико-математический лицей №239 г. Санкт-Петербурга.

Задача. Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число n , имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает гладкое пятимерное многообразие, описываемое формулой степени не более чем n^2 . Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве \mathbb{R}^{25} . Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют жёсткую структуру второго порядка, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами: Андрей придумывает другое гладкое многообразие, проходящее через эти 5 точек, и Миша указывает 5 точек на нём. Игра продолжается, пока либо у кого-то из мальчиков не получилась жёсткая структура, либо не прошло 1003 хода — в этом случае побеждает Миша. В зависимости от n назовите фамилию победителя при правильной игре.

Задача отпугивает своим громоздким условием и сложными терминами, но на самом деле для решения задачи не требуется знаний топологии. Чтобы дать верный ответ на задачу, достаточно прочитать только первое и последнее предложения из условия.

Бывают задачи, в которых большой нерафинированный текст содержит всю нужную информацию для решения и не требует специальных знаний в той области, к которой относится контекст этой задачи.

Задача. В целях сохранения здоровья люди не должны допускать перенапряжения, например, во время занятий спортом, чтобы не превысить определённую частоту сердцебиения. На протяжении многих лет зависимость между максимальной рекомендуемой частотой сердечных сокращений и возрастом человека выражалась следующей формулой:

рекомендуемая максимальная частота сердцебиения = 220 – возраст.

Последние исследования показали, что эту формулу следует немного изменить. Новая формула выглядит так:

рекомендуемая максимальная частота сердцебиения = 208 – 0,7·возраст.

В одной газетной статье утверждалось следующее: «Если использовать новую формулу вместо старой, то рекомендуемый максимум для молодых людей немного уменьшится, а для пожилых — немного увеличится». Начиная с какого возраста рекомендуемый максимум увеличивается при использовании новой формулы? (40)

Логическая грамотность

Школьникам, которые никогда не будут использовать математику в работе, всё равно придётся принимать в жизни решения, которые будут основаны на анализе сложившейся ситуации, на анализе входных данных. Эти данные могут быть текстом договора, надписью на информационном щите, инструкцией к электроприбору и так далее.

В этом блоке приведены примеры заданий, с помощью которых школьники смогут научиться отвечать на вопрос «следует ли из этой информации тот или иной вывод?».

В ОГЭ, ЕГЭ и PISA есть задачи такого характера. Вот задача из открытых источников PISA.

Задача. Люди, проживающие в многоквартирном доме, решили выкупить этот дом. Они вместе хотят собрать деньги таким образом, чтобы каждый из них заплатил сумму, пропорциональную площади его квартиры. Например, мужчина, проживающий в квартире, которая занимает $\frac{1}{5}$ площади всех квартир, должен будет заплатить $\frac{1}{5}$ от всей стоимости здания. Выберите все верные утверждения.

A. Человек, проживающий в самой большой квартире, заплатит больше денег за каждый квадратный метр своей квартиры, чем человек из самой маленькой квартиры.

B. Зная площадь двух квартир и цену одной из них, мы можем вычислить цену второй.

C. Зная цену здания и сумму, которую заплатит каждый владелец, мы можем вычислить общую площадь всех квартир.

D. Если бы общая стоимость здания была снижена на 10%, каждый из владельцев заплатил бы на 10% меньше.

В этой задаче верны утверждения B и D, а утверждения A и C неверны.

Задача. Кондитер испёк 40 печений, из них 10 штук он посыпал корицей, а 20 штук он собирается посыпать сахаром (кондитер может посыпать одно печенье и корицей, и сахаром, а может вообще ничем не посыпать). Выберите утверждения, которые будут верны при указанных условиях независимо от того, какие печенья кондитер посыплет сахаром.

A. Найдётся 7 печений, которые ничем не посыпаны.

B. Найдётся 8 печений, посыпанных и сахаром, и корицей.

C. Если печенье посыпано корицей, то оно посыпано и сахаром.

D. Не может оказаться 12 печений, посыпанных и сахаром, и корицей.

В этой задаче верны утверждения A и D, а утверждения B и C неверны.

Упражнения

1. Люди, проживающие в многоквартирном доме, решили выкупить этот дом. Они вместе хотят собрать деньги таким образом, чтобы каждый из них заплатил сумму, пропорциональную площади его квартиры. Например, мужчина, проживающий в квартире, которая занимает $\frac{1}{5}$ площади всех квартир, должен будет заплатить $\frac{1}{5}$ от всей стоимости здания. В здании три квартиры. Самая большая квартира, квартира №1, имеет площадь 95 м^2 . Квартиры №2 и №3 имеют площадь 85 м^2 и 70 м^2 соответственно. Цена продажи здания — 300000 зед. Сколько должен заплатить владелец квартиры №2?

2. Некоторые сотрудники фирмы зимой ездили на курсы повышения квалификации в Пятигорск. Весной было решено, что некоторые сотрудники поедут на стажировку в Волгоград, причём среди них не будет тех, кто ездил на курсы повышения квалификации в Пятигорск. Выберите утверждения, которые будут верны при указанных условиях независимо от того, какие сотрудники поедут на стажировку в Волгоград.

A. Найдётся сотрудник, который не ездил на курсы в Пятигорск и не поедет на стажировку в Волгоград.

B. Среди сотрудников этой фирмы, которые не поедут на стажировку в Волгоград, есть хотя бы один, который посещал курсы в Пятигорске.

C. Каждый сотрудник, который не был на курсах в Пятигорске, поедет на стажировку в Волгоград.

D. Нет ни одного сотрудника этой фирмы, который посетил курсы в Пятигорске и поедет на стажировку в Волгоград.

Незнакомый контекст

Один из классических методических подходов к классификации сложности задач заключается в том, что решение задач базового уровня — это решение задач знакомыми методами в знакомой ситуации, задачи повышенной сложности — это решение задач знакомыми методами в изменённой ситуации, а задачи высокого уровня сложности требуют применения изученных методов в незнакомой ситуации. На сегодняшний день этот подход несколько противоречит тому, что общество ждёт от математического образования. Акцент делается на применении знаний: задачи, которые требуют применения математических методов, окружают нас повсюду, в том числе в новых для нас ситуациях. Многие области знания, в том числе гуманитарные, используют математические модели. Поэтому человеку, работающему в любой области, придётся их анализировать.

Задачи с незнакомым контекстом занимают значительное место в международных исследованиях качества образования, в том числе в исследовании PISA. В таких задачах описана незнакомая для человека ситуация, в которой ему необходимо применить зачастую совсем несложные математические методы. Такие задачи присутствуют и в ЕГЭ, и в экзамене за 9 класс, например 10-я задача профильного экзамена.

Пример. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r=1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 4% от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

Важно обратить внимание школьников на то, что даже если контекст задачи им знаком, **нужно пользоваться исключительно той математической моделью, которая предложена в задаче.** Применение знаний из той области знания, которой посвящена задача (физики, химии, биологии и т. д.), может привести к усложнению задачи и получению неверного ответа.

Чтобы решить задачу с незнакомым контекстом, необходимо внимательно прочитать условие, вычленить существенные части математической модели и значения тех или иных переменных и дать ответ, максимально абстрагировавшись от контекста.

Задача. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 185 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 20 м/с. Ответ дайте в МГц.

Эту задачу можно упростить, если мысленно отбросить подробности сюжета и вычленив математическую модель.

[...] испускает [...] импульсы частотой 185 МГц. Скорость погружения [...] v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 20 м/с. Ответ дайте в МГц. (190)

После такой процедуры становится понятно, что все значения переменных известны, кроме одного, и его уже несложно найти подстановкой в формулу.

Ещё один пример задачи с незнакомым контекстом даёт международное исследование PISA. Часть задач этого исследования опубликована в открытом доступе, их можно найти на сайте **Открытые задания PISA**.

Задача. По телевизору транслировали документальный фильм о землетрясениях и о том, как часто они происходят. В нём шла речь о возможности прогнозирования землетрясений.

Сейсмолог заявил следующее: «Вероятность того, что в течение следующих двадцати лет в Зедтауне произойдёт землетрясение, составляет $2/3$ ». Какое из следующих утверждений лучше всего отражает заявление геолога?

А. $2/3 \cdot 20 = 13,3$, следовательно, в промежутке между 13-м и 14-м годами, начиная с этого момента, в Зедтауне будет землетрясение.

В. Поскольку $2/3$ больше, чем 12, можно быть уверенным, что в Зедтауне в какой-то момент в течение 20 лет произойдёт землетрясение.

С. Вероятность того, что в Зедтауне произойдёт землетрясение в какой-то момент в течение следующих 20 лет, выше, чем вероятность того, что оно не произойдёт.

Д. Невозможно сказать, что случится, потому что никто не уверен в том, что произойдёт землетрясение.

Верное утверждение С.

При решении подобной задачи важно помнить о том, что в задаче обсуждается исключительно предложенное заявление сейсмолога. Анализировать четыре утверждения необходимо на основании только высказывания сейсмолога, понимание реальной картины происходящего и использование знаний по геологии не требуется. Более того, оно может привести к усложнению задачи и получению неверного ответа.

Задача, обсуждаемая в лекции и в упражнениях далее, взята из открытого банка заданий ОГЭ.

Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой А и цифрой: А0, А1, А2 и так далее. Лист формата А0 имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв. м. Если лист формата А0 разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получатся два равных листа формата А1. Если лист А1 разрезать так же пополам, получатся два листа формата А2. И так далее.

Отношение большей стороны к меньшей стороне листа каждого формата одно и то же. Это сделано специально для того, чтобы пропорции текста и его расположение на листе сохранялись при печати на листах разного формата.

Если большой лист имеет форму прямоугольника со сторонами x и y , то маленький лист будет прямоугольником со сторонами $\frac{y}{2}$ и x . Получается пропорция $x:y = \frac{y}{2}:x$. В пропорции произведение крайних членов равно произведению средних: $x^2 = \frac{y^2}{2}$, откуда $y = x\sqrt{2}$. Таким образом, длинная сторона листа офисной бумаги должна быть в $\sqrt{2}$ раз длиннее короткой.

Мы нашли, каким должно быть отношение сторон, но не нашли сами стороны. Лист формата А0 имеет площадь 1 кв. м, следовательно, ширину такого листа можно найти из уравнения $x \cdot x\sqrt{2} = 1$ кв. м. Получаем $x \approx 84$ см.

Упражнения

1. В таблице даны размеры (с точностью до мм) четырёх листов, имеющих форматы А0, А1, А3 и А4.

Длина (мм)	Ширина (мм)
297	210
420	297
1189	841
841	594

Установите соответствие между форматами и размерами листов.

Листу А0 соответствуют следующие длина и ширина:

Листу А1 соответствуют следующие длина и ширина:

Листу А3 соответствуют следующие длина и ширина:

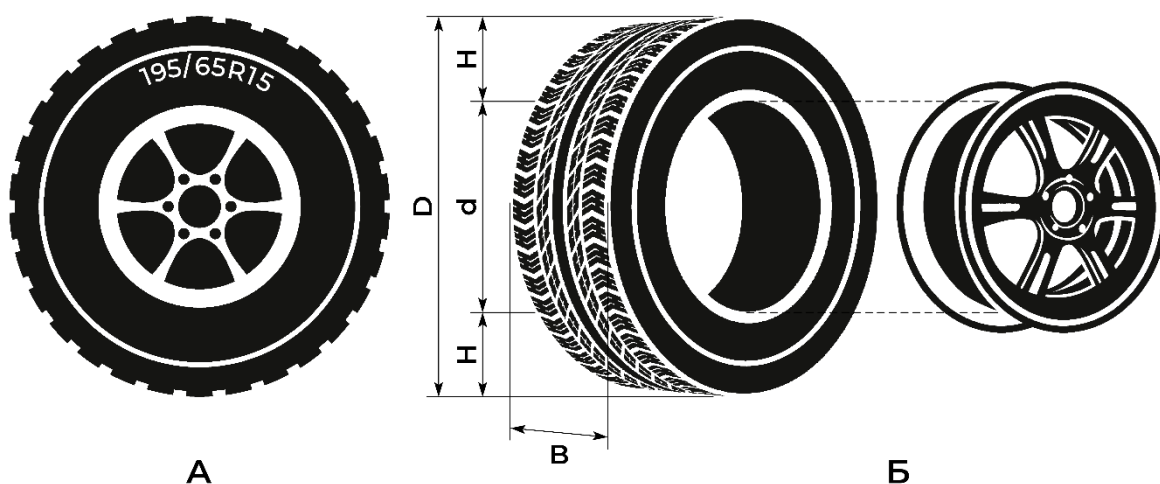
Листу А4 соответствуют следующие длина и ширина:

2. Лист формата А0 имеет площадь 1 кв. м. Найдите площадь листа формата А1. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

3. Найдите отношение длины большей стороны листа формата А3 к меньшей. Ответ округлите до десятых

4. Автомобильное колесо, как правило, представляет из себя металлический диск с установленной на него резиновой шиной. Диаметр диска совпадает с диаметром внутреннего отверстия в шине.

Для маркировки автомобильных шин применяется единая система обозначений. Например, 195/65 R15 (рис. А). Первое число (число 195 в приведённом примере) обозначает ширину шины в миллиметрах (параметр В на рисунке Б). Второе число (число 65 в приведённом примере) — процентное отношение высоты боковины (параметр Н на рисунке 2) к ширине шины, то есть $100 \cdot \frac{H}{B}$



Последующая буква обозначает тип конструкции шины. В данном примере буква R означает, что шина радиальная, то есть нити каркаса в боковине шины расположены вдоль радиусов колеса. На всех легковых автомобилях применяются шины радиальной конструкции.

За обозначением типа конструкции шины идёт число, указывающее диаметр диска колеса d в дюймах (в одном дюйме 25,4 мм). Таким образом, общий диаметр колеса D легко найти, зная диаметр диска и высоту боковины.

Возможны дополнительные маркировки, обозначающие допустимую нагрузку на шину, сезонность использования, тип дорожного покрытия и другие параметры.

Завод производит легковые автомобили определённой модели и устанавливает на них колёса с шинами маркировки 165/70 R13.

А) Завод допускает установку шин с другими маркировками. В таблице приведены разрешённые размеры шин.

Ширина шины (мм)	Диаметр диска (дюймы)		
	13	14	15
165	165/70	165/65	—
175	175/65	175/65;175/60	—
185	185/65;185/60	185/60	185/55
195	195/60	195/55	195/55;195/50

На сколько миллиметров радиус колеса с шиной маркировки 205/55 R14 больше, чем радиус колеса с шиной маркировки 165/65 R14? Ответ округлите до десятых.

Б) На сколько процентов увеличится пробег автомобиля при одном обороте колеса, если заменить колёса, установленные на заводе, колёсами с шинами маркировки 175/60 R14? Результат округлите до десятых.

В) Дмитрий планирует заменить зимнюю резину на летнюю на своём автомобиле. Для каждого из четырёх колёс последовательно выполняются четыре операции: снятие колеса, замена шины, балансировка колеса и установка колеса. Он выбирает между автосервисами А и Б. Затраты на дорогу и стоимость операций приведены в таблице.

Автосервис	Суммарные затраты на дорогу	Стоимость для одного колеса			
		Снятие колеса	Замена шины	Балансировка колеса	Установка колеса
А	210 руб.	60 руб.	250 руб.	200 руб.	60 руб.
Б	380 руб.	55 руб.	220 руб.	180 руб.	55 руб.

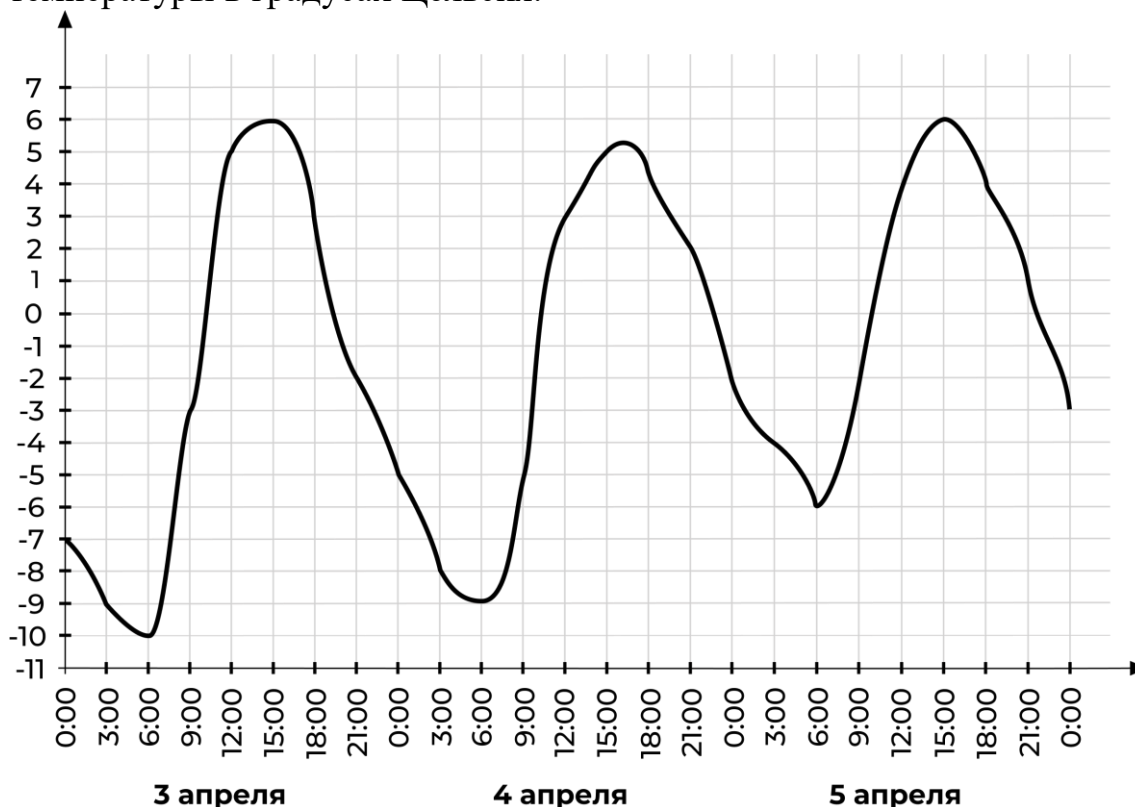
Сколько рублей Дмитрий заплатит за замену резины на своём автомобиле (включая дорогу), если выберет более дешёвый вариант?

Работа с графическим представлением информации

Информация, которую мы получаем, с течением времени представляется во всё более сложном виде, однако сам подход к чтению и осмыслению её не меняется — графическое представление информации бывает в виде графиков, диаграмм, схем и таблиц.

Разберём задачу №2 из профильного ЕГЭ.

Задача. На графике показано, как изменялась температура воздуха с 3 по 5 апреля. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

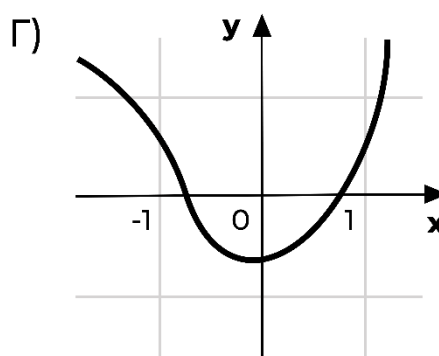
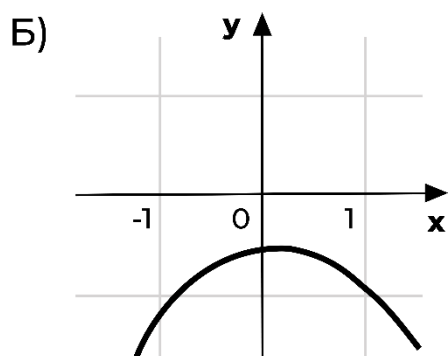
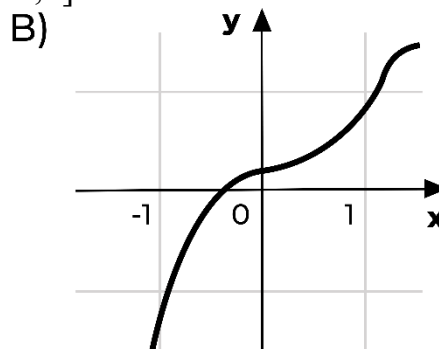
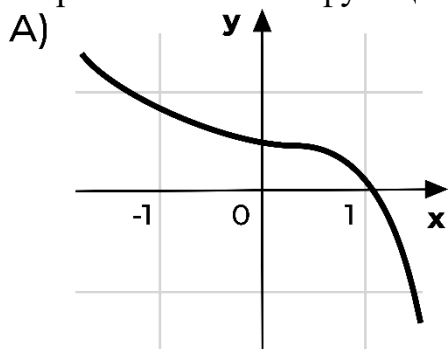


- А. Найдите наименьшее значение температуры 4 апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.
- В. В течение скольких часов температура 5 апреля была меньше 4 градусов Цельсия?
- С. Найдите значение температуры 4 апреля в 3 часа дня. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Традиционно изучение графиков начинается с обсуждения практических графиков, например, графиков температуры или скорости. Но практически сразу акцент переносится на графики формальные, например, графики линейной или квадратичной функции на чётких осях. Раньше в проверочных и контрольных работах встречались исключительно формальные

графики. Типичным примером задачи на эту тему может быть следующая задача.

Задача. Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке $[-1;1]$.

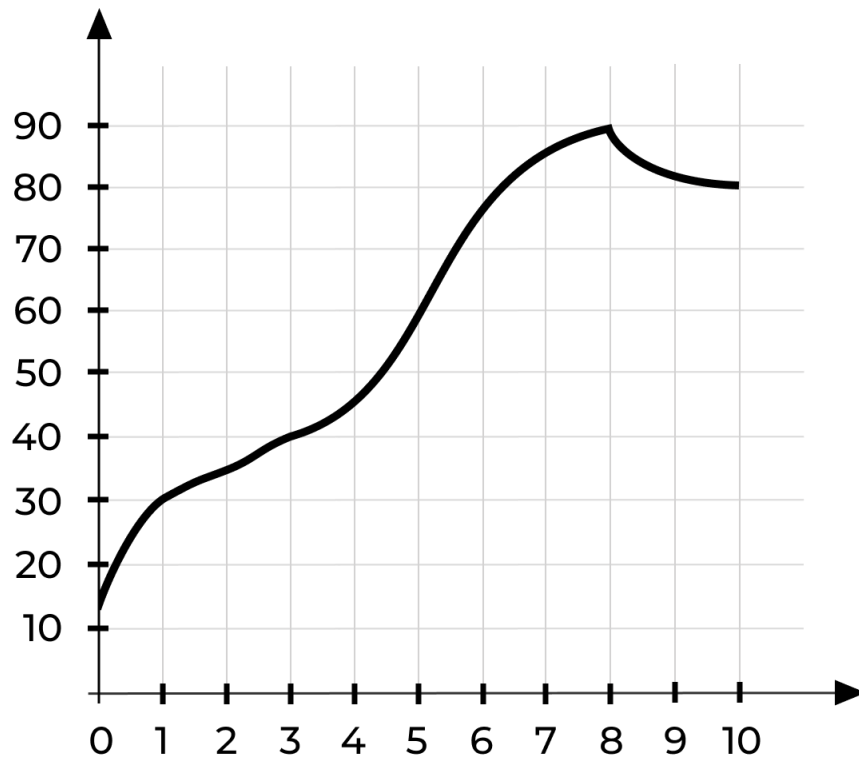


Характеристики.

1. Функция имеет точку максимума на отрезке $[-1;1]$.
2. Функция имеет точку минимума на отрезке $[-1;1]$.
3. Функция возрастает на отрезке $[-1;1]$.
4. Функция убывает на отрезке $[-1;1]$.

В последнее время к таким задачам стали добавляться задачи на анализ практических графиков, например, следующая.

Задача. На графике изображена зависимость температуры от времени в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя; на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия.



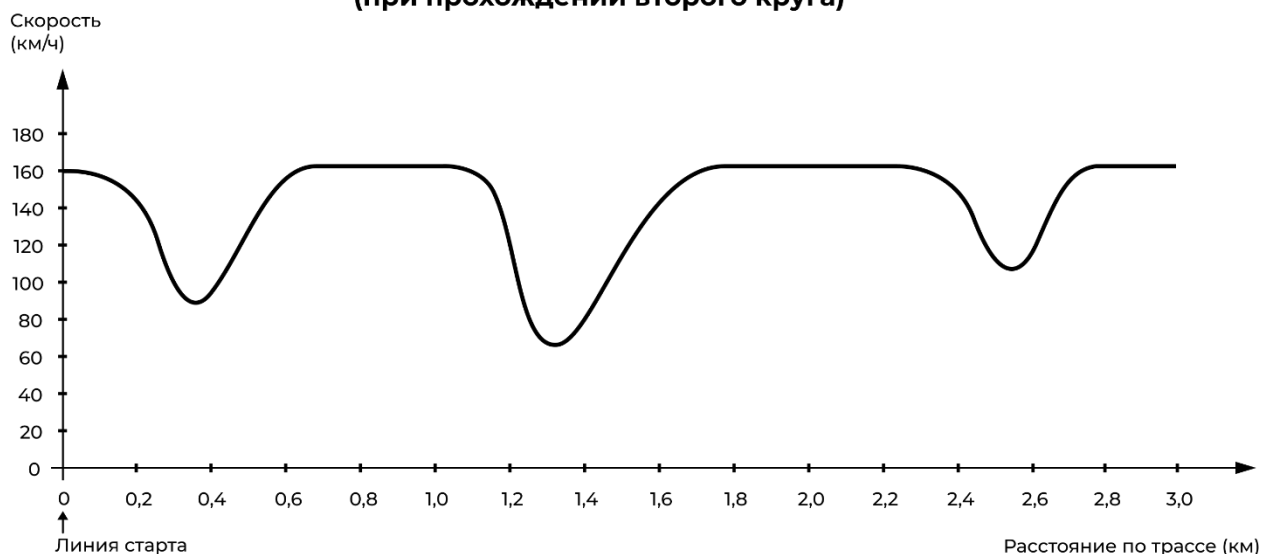
Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

Интервалы времени	Характеристики
0–1 мин.	Самый медленный рост температуры.
1–3 мин.	Температура падала.
3–6 мин.	Температура находилась в пределах от 40°C до 80°C.
8–10 мин.	Температура не превышала 30°C.

Ещё один пример практикоориентированной задачи из материалов исследования PISA. Как правило это задачи с не очень чётким условием, при их решении нужно применять и математических знания, и умение внимательно читать условие, и здравый смысл.

Задача. Данный график отображает изменение скорости гоночной машины при прохождении второго круга трёхкилометровой кольцевой трассы.

**Скорость гоночной машины на трассе длиной 3 км
(при прохождении второго круга)**



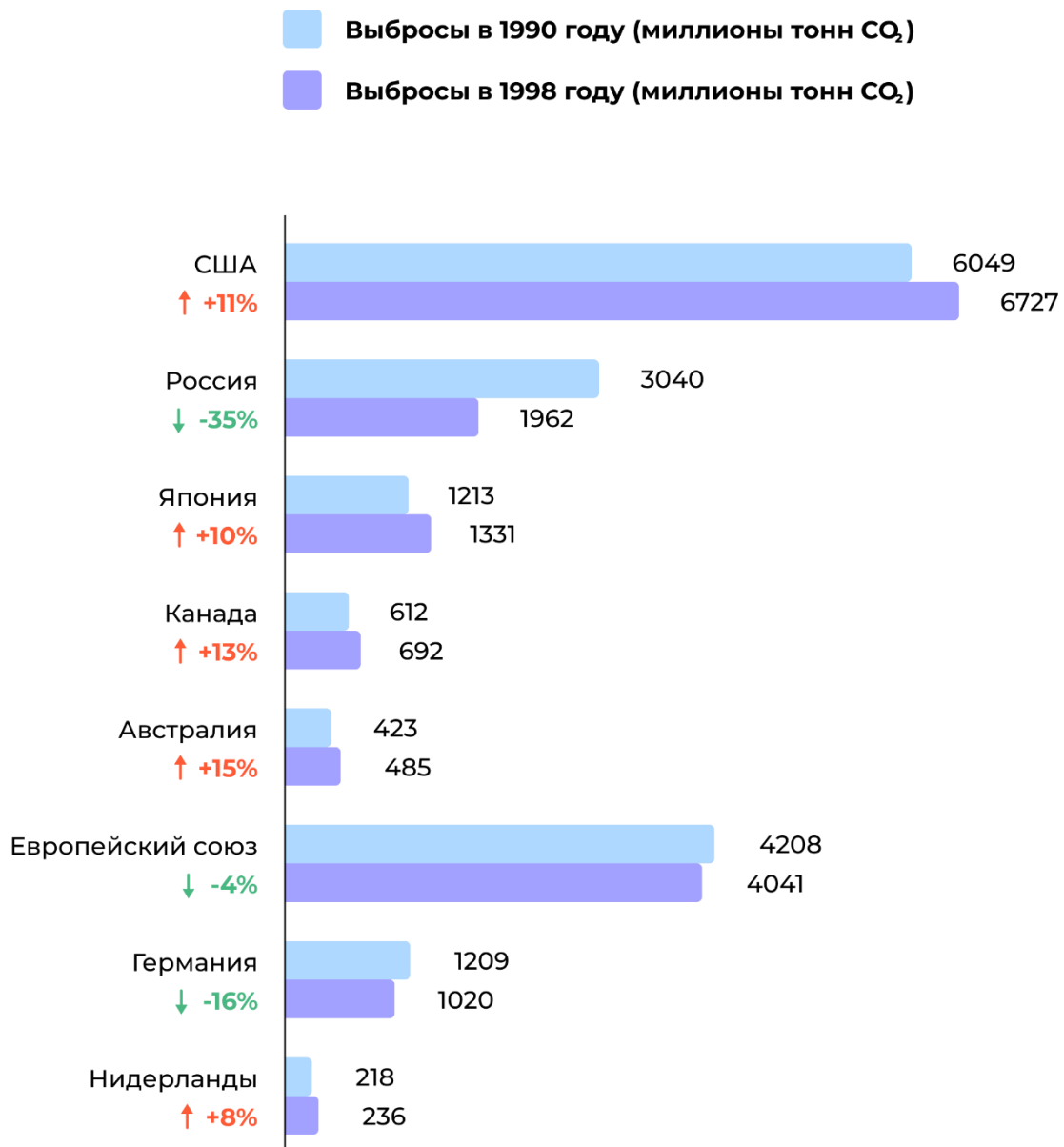
Чему примерно равно расстояние от линии старта до самого длинного прямого участка трассы?

- A. 0,5 км B. 1,5 км C. 2,3 км D. 2,6 км

Следующий пример задачи показывает не просто сложную перегруженную диаграмму, но и довольно нетривиальный вопрос.

Задача. Многие учёные опасаются, что повышение уровня содержания углекислого газа в атмосфере является причиной изменения климата.

Приведённая ниже диаграмма демонстрирует уровень выбросов CO_2 в 1990 году (светлые столбцы) для нескольких стран (или регионов), уровень выбросов CO_2 в 1998 году (тёмные столбцы) и процентные изменения в уровнях выбросов с 1990 по 1998 год (стрелки с процентами).



На диаграмме указано, что в США повышение уровня выбросов с 1990 по 1998 год составило 11%. Приведите расчёты, демонстрирующие, почему изменение в уровне выбросов составило 11%.

В этой задаче нет математической сложности, но вопрос поставлен необычно. Требуется с помощью выкладок подтвердить уже известный факт.

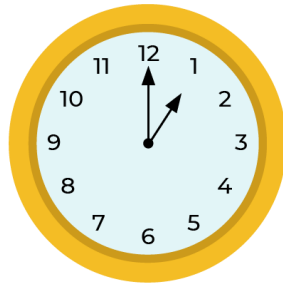
Следующая задача — пример того, как графическое представление информации помогает уже при решении задач.

Задача. Марк (из Сиднея в Австралии) и Ганс (из Берлина в Германии) часто общаются друг с другом в Интернете. Им нужно быть в сети в одно и то же время, чтобы они смогли поболтать.

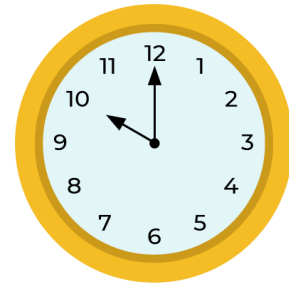
Чтобы определить удобное для общения время, Ганс просмотрел таблицы, в которых дано время в различных частях мира, и нашёл следующую информацию:



Гринвич 24:00 (полночь)



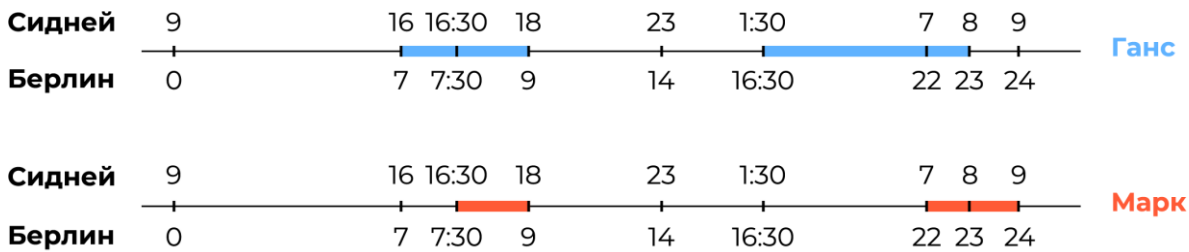
Берлин 1:00



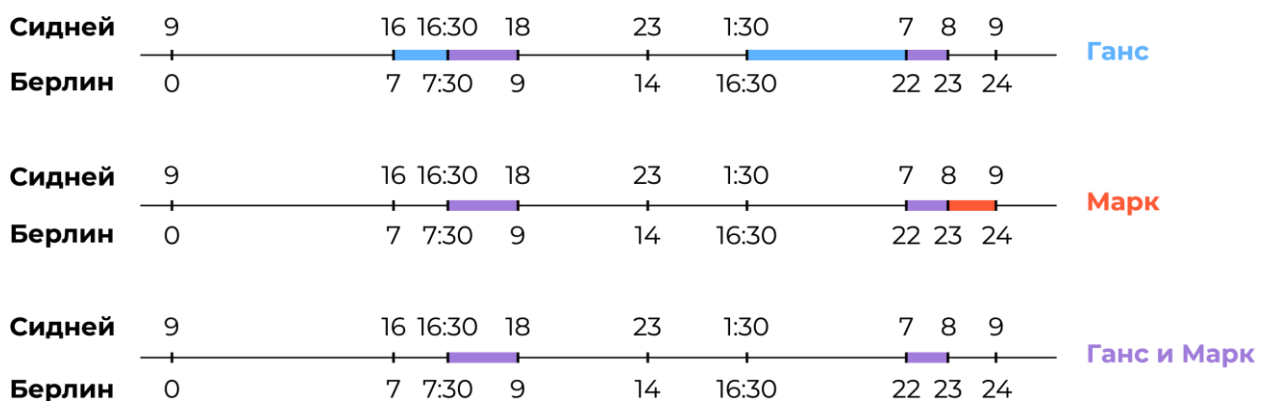
Сидней 10:00

Ганс может общаться с 7:00 до 9:00 и с 16:30 до 23:00 по местному времени, а Марк может общаться с 7:00 до 9:00 и с 16:30 до 18:00 по местному времени. Какое время было бы удобно для мальчиков, чтобы они могли поболтать?

Чтобы решить эту задачу, удобно нарисовать схему и отметить на ней временные интервалы, в которые мальчики могут общаться. На каждой оси сверху отмечено время по Сиднею, а снизу — по Берлину.

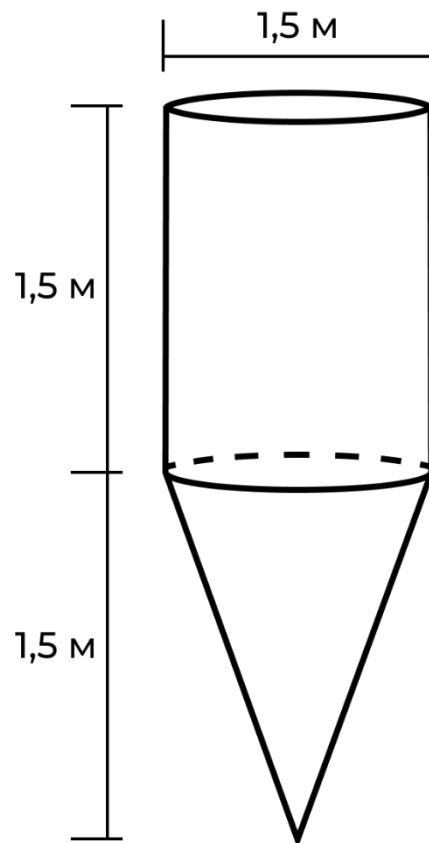


Проанализировав отмеченные временные интервалы, легко отметить на третьей оси время, в которое мальчики могут выйти в Интернет одновременно.

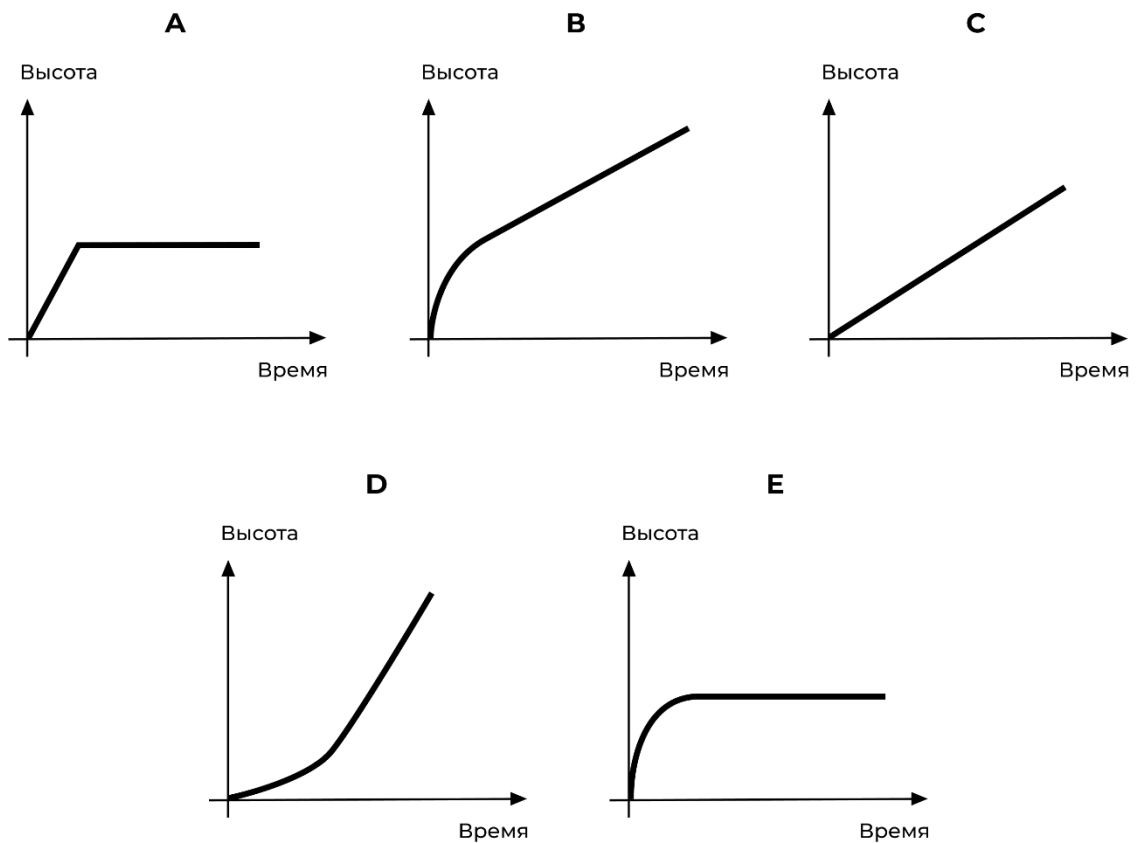


В некоторых задачах нужно проанализировать графическую информацию разных типов и соотнести информацию из разных источников. В приведённом примере понадобится сопоставить схему и графики.

Задача. Форму и размеры водонапорной башни вы можете увидеть на схеме.



Сначала водонапорная башня пустая. Далее она наполняется водой со скоростью 1 литр в секунду. Какой из следующих графиков показывает, как высота уровня воды изменяется во времени?



Начнём решение задачи с анализа формы водонапорной башни: сверху она представляет собой цилиндр, а снизу — конус. При заполнении узкой части башни уровень воды будет меняться быстрее, чем при заполнении широкой. Отсюда легко определить, какой именно график нам подходит.

Экономика

Экономика — одно из наиболее естественных приложений математики и, наоборот, один из «заказчиков» создания математики.

С такими задачами сталкивается любой ученик в реальной жизни, а как следствие — ещё и на экзаменах. Трудности, которые вызывают у многих учащихся даже несложные задачи на проценты, обычно во многом обусловлены достаточно формальным подходом к изложению темы. А ведь для решения подавляющего большинства задач на проценты достаточно понимать, что процент — это просто одна сотая часть числа. Поэтому для успешного решения задач на проценты достаточно научиться «переводить» условие задачи на язык десятичных дробей, а после её решения — делать обратный «перевод».

Примеры задач.

Задача. Полотенце стоило 80 рублей. Ближе к дачному сезону оно подорожало на 25%. Сколько оно стало стоить?

Задача. Полотенце стоило 100 рублей, но в конце сезона оно подешевело на 20%. Сколько стало стоить полотенце со скидкой?

Задача. Розничная цена на полотенце составляет 100 рублей, при этом известно, что розничная цена образуется при наценке на оптовую цену 25%. Какова оптовая цена этого полотенца?

Задача. Оптовая цена на полотенце составляет 80% от розничной. Какова розничная цена, если оптовая цена 80 рублей?

При работе с процентами нужно быть аккуратным, потому что подсчёты, связанные с ними, не так интуитивны, как работа с обычными числами. Например, увеличение некоторой величины в 2 раза соответствует увеличению на 100%, а не на 200%, как можно было бы ошибочно подумать. Аналогично, уменьшение цены в 2 раза соответствует уменьшению на 50%.

Примеры задач.

Цена одной упаковки кетчупа была равна 60 рублям.

Чему станет равна цена после того, как она упадёт в два раза? Запишите ответ в рублях.

Чему станет равна цена после того, как она вырастет в два раза? Запишите ответ в рублях.

Чему станет равна цена после того, как она вырастет в три раза? Запишите ответ в рублях.

Чему станет равна цена после того, как она станет ниже на 50%?

Чему станет равна цена после того, как она вырастет на 100%?

Чему станет равна цена после того, как она вырастет на 200%?

Чему станет равна цена после того, как она вырастет на 1000%?

Задача. В городе два магазина. В первом висит объявление о снижении цен на 80%, во втором — о снижении цен в 5 раз. В какой магазин пойти покупателю, если цены в обоих магазинах до снижения были одинаковыми?

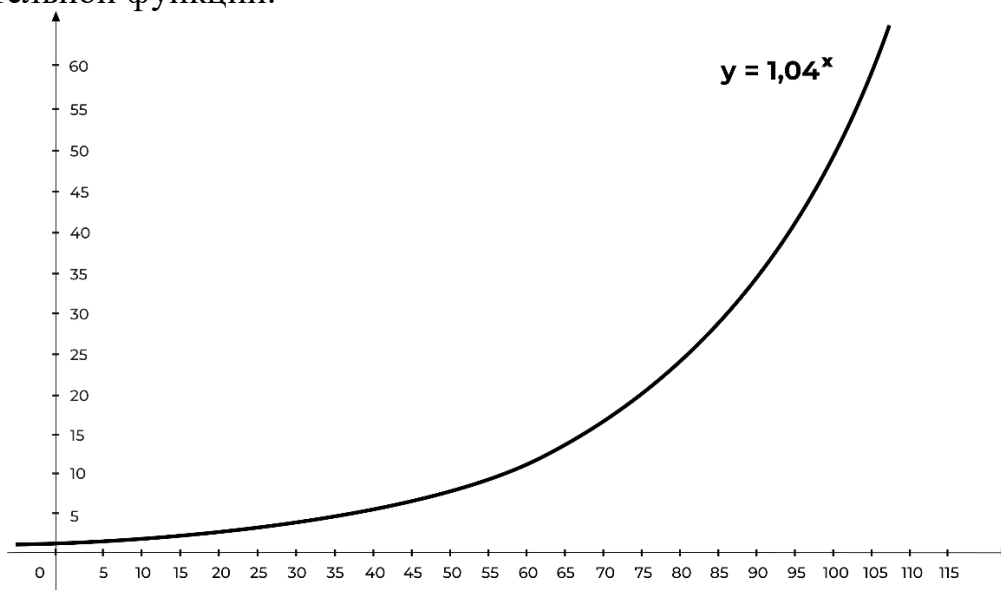
Проводились исследования, согласно результатам которых большинство людей выберет второй магазин, хотя цены в обоих окажутся одинаковыми. Важно уметь анализировать такие вещи и не попадаться на маркетинговые ходы.

Ещё одним важным примером применения процентов является вычисление подоходного налога. Если в трудовом договоре работника написана некоторая сумма, например, 10000 рублей, то реально работник получит на руки эту сумму за вычетом подоходного налога 13%, т. е. 8700 рублей. При этом работодатель должен иметь около 13000 рублей, чтобы выплатить эту зарплату, так как он обязан отчислять около 30% от суммы, написанной в договоре, в фонды.

Обратим внимание, что по сути все решения задач на проценты сводятся к действиям с десятичными дробями.

Задача. Василий взял в долг 1 рубль под 4% в день. Сколько он должен вернуть через год?

Кажется удивительным, но через год Василию придётся вернуть больше 1,5 млн рублей. Действительно, каждый день сумма, которую Василий должен вернуть, умножается на 1,04. Спустя 365 дней сумма долга составит 1,04³⁶⁵ рублей. Посмотрим на график соответствующей показательной функции.



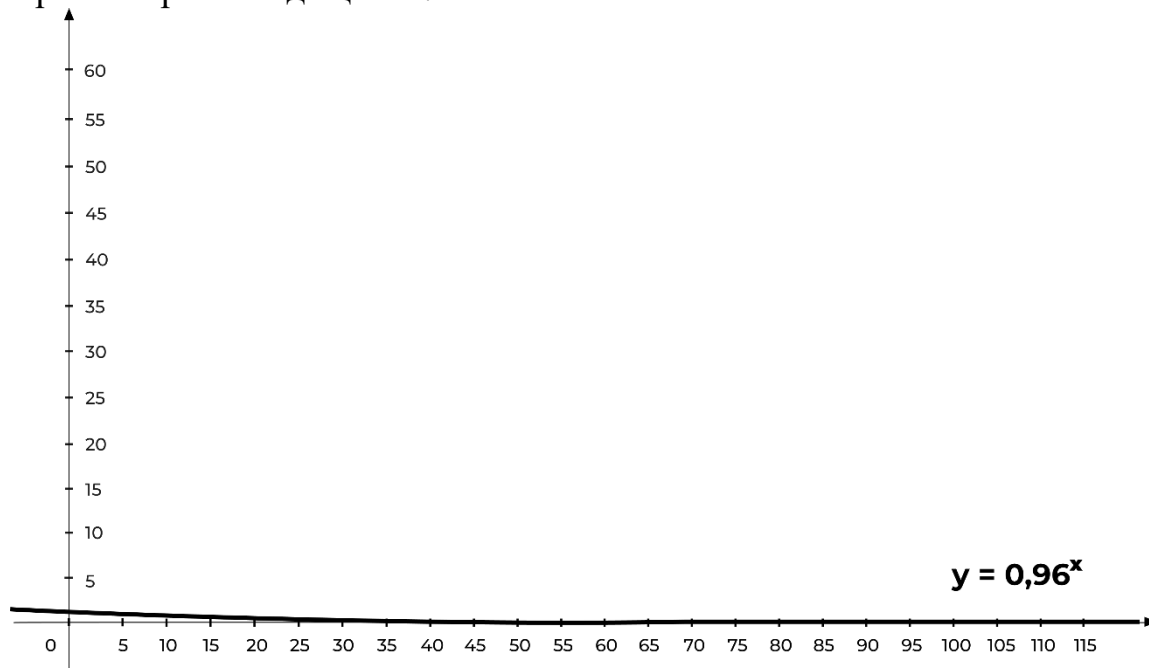
Мы видим стремительный рост. Таким образом, на первый взгляд выгодные для Василия условия кредита на самом деле таковыми не являются.

Эта задача нереальная, однако некоторые микрофинансовые организации пользуются слабым владением математикой некоторых граждан

и выдают кредиты на схожих условиях. Знание этой темы убережёт ваших учеников от таких неприятностей.

Пример в некотором смысле обратной картины мы можем увидеть в физике.

Пример. Рассмотрим попрыгунчик. При каждом следующем отскоке он теряет некоторую долю своей энергии, то есть после каждого следующего отскока энергия умножается на некоторое число, меньшее единицы. Чтобы понять, насколько стремительно будет уменьшаться энергия попрыгунчика, достаточно посмотреть на график показательной функции с основанием, на этот раз не превосходящим 1.



Данные в экономических задачах часто приведены в виде таблиц. В таком виде они приходят к нам из коммерческих предложений, прайс-листов, рекламы, и в таком же виде они попали в базовый ЕГЭ. Ниже приведён пример простейшей задачи на прямое считывание из таблицы.

Задача. В таблице представлены данные о стоимости некоторой модели смартфона в различных магазинах.

Магазин	Стоимость смартфона (руб.)
«ОК-Техника»	6733
«Скоростной»	7600
«Магия связи»	6559
«Про-фон»	7346
«Смартфон и Ко»	6599

«Прогресс-Э»	7548
«999 телефонов»	6959
«Макропоиск»	7049
«Вселенная телефонов»	6850

Найдите наименьшую стоимость смартфона среди представленных предложений. Ответ дайте в рублях.

Задача. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 МБ
План «500»	550 руб. за 500 МБ трафика в месяц	2 руб. за 1 МБ сверх 500 МБ
План «800»	700 руб. за 800 МБ трафика в месяц	1,5 руб. за 1 МБ сверх 800 МБ

Пользователь предполагает, что его трафик составит 650 МБ в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 650 МБ?

Одна из проблем при решении такой задачи — желание решать её по аналогии с предыдущей задачей, прямым считыванием с графика. В данном случае такой метод решения уже не подходит, нужно аккуратно анализировать каждую строку таблицы.

Стоит упомянуть, что в рекламных материалах и коммерческих предложениях некоторых компаний часто встречаются дополнительные условия, которые находятся в сноске под «звёздочкой». Научить ребят читать внимательно предложенную им информацию и не попадаться в ловушку — одна из наших задач.

Упражнения.

1. Десять рубашек дороже куртки на 10%. На сколько процентов одиннадцать рубашек дороже куртки?

2. Альберт и ООО «Солнышко» планируют договориться о выполнении Альбертом разовой работы по очистке участка ООО «Солнышко» от снега. Какую сумму директору ООО «Солнышко» Вениамину надо внести в договор

гражданско-правового характера, чтобы после уплаты подоходного налога (13%) Альберт получил бы перечислением на карточку сумму 1305 рублей?

3. Заработная плата в месяц по трудовому договору между ООО «Ракета» и сотрудником Елистратом составляет сумму, после вычета из которой подоходного налога (13%) Елистрат получает на карточку выплату 30450 рублей. Страховые взносы на заработную плату составляют 30,2%. Какие суммарные расходы в месяц несёт ООО «Ракета» по данному трудовому договору?

4. Катя купила новый попрыгунчик. Чтобы проверить, насколько высоко умеет подлетать попрыгунчик, она со всей силы бросила его об землю. После первого отскока попрыгунчик подлетел на высоту 400 см, а после каждого следующего отскока от земли подлетал на высоту, в два раза меньшую предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит попрыгунчик, будет меньше 10 см?

5. Строительная фирма планирует купить 70 м^3 пеноблоков у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2600	10000	Нет
Б	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная
В	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная

Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку? Стоимость доставки включается в стоимость покупки.

Типичная ситуация, требующая экономического анализа, — взятие кредита в банке. Многие школьники поступают на экономические специальности, поэтому во второй части профильного ЕГЭ есть задачи по экономике, в частности, на анализ условий кредитования.

Задача. В июле 2021 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 34150 рублей больше суммы, взятой в кредит?

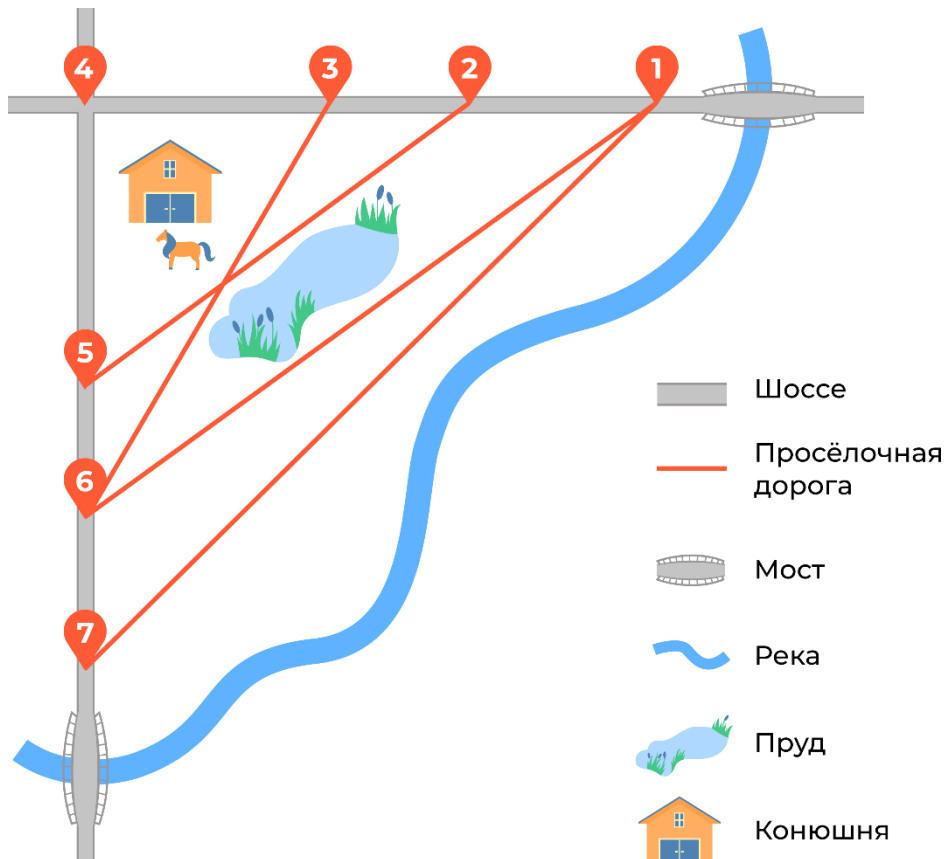
Геометрия

Функциональная грамотность в геометрии — один из важнейших блоков. Сама наука геометрия произошла благодаря запросам повседневной жизни к науке. Геометрия окружает нас повсюду, например, в архитектуре и картах. Иногда она появляется там, где мы её совсем не ждём — в еде, например (мы разберём в разделе несколько задач про это). Поэтому важно развивать геометрическую интуицию и уметь применять геометрические методы на практике.

Одна из ролей, которую играет геометрия в школе, — развитие логики. Большое внимание в школьном курсе геометрии уделяется доказательствам геометрических утверждений, в задачах по планиметрии и стереометрии используется много формул и вычислений. Часто школьники ещё не готовы к такой подаче материала, поэтому важно с начальной школы познакомить ребят с большим количеством несложных наглядных геометрических сюжетов.

В качестве примера практической геометрической задачи обсудим постановку задачи на план местности, которую вам предстоит решить далее.

Задача. Таня на летних каникулах приезжает в гости к бабушке в деревню Антоновка (на плане обозначена цифрой 1). В конце каникул бабушка на машине собирается отвезти Таню на автобусную станцию, которая находится в деревне Богданово. Из Антоновки в Богданово можно проехать по просёлочной дороге мимо реки. Есть другой путь — по шоссе до деревни Ванютино, где нужно повернуть под прямым углом налево на другое шоссе, ведущее в Богданово. Третий маршрут проходит по просёлочной дороге мимо пруда до деревни Горюново, где можно свернуть на шоссе до Богданово. Четвёртый маршрут пролегает по шоссе до деревни Доломино, от Доломино до Горюново по просёлочной дороге мимо конюшни и от Горюново до Богданово по шоссе. Ещё один маршрут проходит по шоссе до деревни Егорка, по просёлочной дороге мимо конюшни от Егорки до Жилино и по шоссе от Жилино до Богданово. Шоссе и просёлочные дороги образуют прямоугольные треугольники.



По шоссе Таня с дедушкой едут со скоростью 50 км/ч, а по просёлочным дорогам — со скоростью 30 км/ч. Расстояние от Антоновки до Доломино равно 12 км, от Доломино до Егорки — 4 км, от Егорки до Ванютино — 12 км, от Горюново до Ванютино — 15 км, от Ванютино до Жилино — 9 км, а от Жилино до Богданово — 12 км.

Пользуясь описанием выше, определите, какими цифрами на плане обозначены деревни Ванютино, Горюново, Егорка, Жилино. (4625)

Сколько минут затратят на дорогу Таня с дедушкой из Антоновки в Богданово, если поедут мимо пруда через Горюново? (57,2)

Одним из важных геометрических понятий является понятие масштаба, которое теряется в школьном курсе. Реально масштаб изучается только на уроках географии, а развитию интуитивного понимания масштаба на уроках математики времени уделяется мало.

Задача. Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Даже если просто подсчитать вес большой упаковки: $9 \times 9 \times 9 = 729$ пакетов, то есть примерно 729 кг, станет ясно, что втроем её не поднять. В любом

случае, стоит разобраться, из скольких же маленьких упаковок состоит большая.

Задачи с экономическим содержанием, которые мы предлагаем для решения школьникам, важно составлять таким образом, чтобы упрощённая модель позволяла дать ответ на вопрос, соответствующий реальному положению дел. Задача из международного исследования PISA, приведённая ниже, — пример неудачно составленной задачи.

Задача. В пиццерии продаются два вида круглой пиццы, имеющих одинаковую толщину и разные размеры. Диаметр меньшей пиццы равен 30 см, и она стоит 30 зедов. Диаметр большей пиццы равен 40 см, и она стоит 40 зедов. Какие пиццы выгоднее продавать хозяину пиццерии?

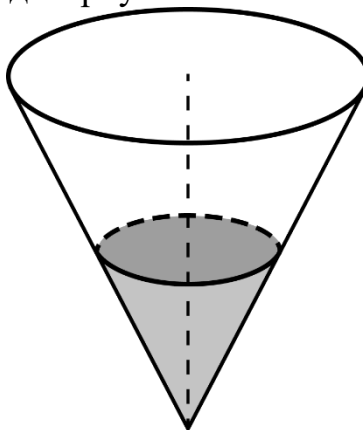
В ней составители слишком сильно упростили модель и свели экономическую задачу к вычислению количества теста, которое необходимо для изготовления пиццы. В реальной жизни затраты и прибыль хозяина пиццерии зависят от огромного количества факторов. Даже если рассматривать только продукты, необходимые для изготовления пиццы, окажется, что стоимость начинки зачастую существенно превышает стоимость теста. Также нужно учесть и другие факторы, влияющие на прибыльность производства: цену аренды, зарплату работникам и так далее.

Ниже пример задачи со схожим сюжетом, но уже составленной корректно. В ней, действительно, достаточно оценить только объём теста.

Задача. Бабушка испекла 6 блинов для трёх внуков. Алёше досталось 3 блина диаметром 8 см каждый, Добрыне досталось 2 блина диаметром 12 см каждый, а Илье достался всего один блин, но диаметром 18 см. Чья порция оказалась самой большой, если толщина у всех блинов одинаковая?

Упражнения

1. В сосуд, имеющий форму конуса, налили 25 мл жидкости до половины высоты сосуда (см. рисунок). Сколько миллилитров жидкости нужно долить в сосуд, чтобы заполнить его доверху?



Урезанное среднее

Начнём обсуждение средних величин с конкретного примера про среднюю скорость.

Пример. Автомобиль двигался первую половину времени, проведённого в пути, со средней скоростью $v_1=40$ км/ч, а вторую половину времени — со средней скоростью $v_2=80$ км/ч. В этом случае средняя скорость на всём пути составляет $(40+80)/2=60$ км/ч. Здесь мы вычислили среднее арифметическое двух скоростей. На практике такая ситуация довольно плохо реализуема, задача получается искусственной.

Пример. Первую половину пути автомобиль двигался со средней скоростью $v_1=40$ км/ч, а вторую половину пути — со средней скоростью $v_2=80$ км/ч. В этом случае средняя скорость на всём пути определяется уже средним гармоническим и составляет $2/(1/40+1/80)\approx 53,3$ км/ч.

Вспомним две средние величины, которые уже встречались вам в разделе, посвящённом статистике и теории вероятностей: среднее арифметическое и медиану, и обсудим задачу из этого раздела.

Задача. Средний рост учащихся в классе 165 см. Медиана роста равна 168 см. Укажите верные утверждения.

- В этом классе не меньше половины учеников выше 165 см.
- В этом классе не меньше половины учеников выше 168 см.
- В этом классе обязательно найдётся ученик, рост которого больше 165, но меньше 168 см.
- В этом классе обязательно найдётся ученик ростом ровно 168 см.
- В этом классе обязательно найдётся ученик, рост которого меньше 165 см.

При анализе большого количества измерений выбросы влияют на среднее. Выбросы можно убрать: например, сначала упорядочить массив по неубыванию, а затем убрать из рассмотрения по 20% или 25% измерений сверху и снизу. Так получается урезанное среднее.

Урезанное среднее массива значений (иначе его иногда называют *усечённым средним*) — это среднее арифметическое всех значений, которые остались в массиве после отбрасывания некоторой доли самых малых и самых больших значений.

Урезанное среднее нужно, когда есть отдельные грубые ошибки или намеренное искажение. Оно может быть очень полезно там, где на результаты может повлиять чьё-нибудь предвзятое суждение (например, спортивные

соревнования) или неравномерное распределение чего-либо (например, население в городах России).

Рассмотрим два примера практических задач, в которых уместно подсчитывать урезанное среднее.

Задача. В некоторой электрической цепи измеряли напряжение. Значения в 10 замерах получили следующие:

218, 219, 223, 228, 215, 220, 2200, 217, 216, 22.

Среднее арифметическое в таком случае получается 397,8 В. Очевидно, среднее арифметическое в данной ситуации не будет отражать настоящую картину. Попробуем изучить все полученные значения на предмет целесообразности использования их при подсчётах. Выпадающие значения — 22 и 2200 — это явные ошибки записи, от которых лучше избавиться. Пересчитав среднее для оставшихся 8 значений, мы получим 219,5, что намного больше похоже на реальное напряжение в сети.

Задача. Выступления фигуристов оценивают несколько судей. Каждый элемент (прыжок, вращение) имеет базовую стоимость в баллах. Чем труднее элемент, тем выше стоимость. После выступления фигуриста девять судей ставят оценки за каждый элемент. Оценки ставятся по 11-балльной шкале (от -5 до +5 баллов). Затем применяется специальный алгоритм.

1. За каждый элемент вычисляется урезанное среднее; для этого из девяти оценок удаляются две — наименьшая и наибольшая.
2. Получившееся урезанное среднее прибавляется к базовой стоимости. Получается оценка за элемент.
3. Итоговый результат получается суммированием оценок за все отдельные элементы.

На соревнованиях фигурист выполнил несколько элементов. В таблице показана базовая стоимость этих элементов и оценки судей.

Элементы	Базовая стоимость	Оценки судей								
Тройной сальхов	4,3	-1	1	2	1	1	1	0	1	1
Каскад прыжков	6,1	-2	-3	-2	-1	-2	-2	-2	-3	1
Четверной тулуп	6,7	-2	-1	1	0	1	-1	-1	-1	-1
Двойной аксель	3,3	0	1	2	0	1	1	0	0	1
Тройной лутц	5,9	-3	-1	0	1	0	1	0	0	0

Вычислим, например, оценку, полученную фигуристом за четверной тулуп. Удалим из оценок судей наименьшую и наибольшую оценки. Остаётся семь оценок, и урезанное среднее равно $\approx -0,57$. Прибавляя это число к базовой стоимости четверного тулупа, получаем $\approx 6,13$.

Урезанное среднее в фигурном катании появилось недавно после одного из скандалов, который случился из-за предвзятого судейства или предположения о том, что кто-то из судей судил предвзято.

Судьи не могут быть совершенно объективными. Судейство, особенно в творческих видах спорта и в искусстве, всегда немного предвзято. Кроме того, если судья поставил высокую оценку «своим» или занижил оценку соперникам, то это может спровоцировать протесты, даже если никакого подсуживания на самом деле не было. Чтобы избавиться от влияния сознательной предвзятости в судействе (и обвинений в предвзятом судействе), нужны специальные средства. Например, урезанная средняя оценка.

Задача. Обсудим население регионов Российской Федерации. Всего их 85, и численность населения в них очень разная. В таблице указана численность населения регионов.

Числа при вычислениях будем округлять до сотен. Сначала вычислим среднее арифметическое, оно равно 175000 человек. Медиана данных равна 1160700 человек. Мы понимаем, отчего такая разница: на среднее арифметическое сильно влияют Москва и Санкт-Петербург, где жителей намного больше, чем в других регионах. Малочисленные регионы не могут их уравновесить. Можно использовать медиану, как мы уже делали. Но всё же среднее арифметическое тоже годится, если убрать из расчёта сильно выделяющиеся большие и малые значения.

Давайте удалим 10% самых малых и 10% самых больших значений, то есть по 8 значений с каждой стороны. Восемь с половиной регионов удалить нельзя, поэтому удалим 8 наиболее населённых и 8 наименее населённых регионов. Останется 69 регионов, наиболее типичных для России по численности населения. Урезанное среднее равно 1443300 человек. Эта величина намного ближе к медиане, чем среднее без урезания.

Если удалить не 10%, а 25% значений с каждой стороны, то останется 43 региона, среднее число жителей в которых равно 1268400 человек, что ещё ближе к медиане.

Важно понимать, что чем сильнее урезается массив данных с обеих сторон, тем больше информации теряется.

Какое именно правило следует выбрать при урезании, решает только статистик в каждом конкретном случае. Ещё раз напомним, что выбор способа описания данных зависит от природы данных, от целей исследования и от

сложившейся традиции. Обычно применяется урезание на 5–25% массива с обеих сторон.

Пример. В школе на заключительном туре художественного конкурса три лучших рисунка претендовали на призовые места. Десять судей (учителя, школьники и родители) оценили каждый рисунок по шкале от 1 до 10.

Рисунок	Оценки десяти судей									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Натюрморт	4	5	7	10	7	6	7	4	6	7
Портрет учителя	4	9	7	5	7	4	10	6	5	7
Городской пейзаж	7	3	6	7	8	6	7	8	3	6

Чтобы исключить возможность предвзятого судейства, при подсчёте итоговых оценок используется урезанное среднее после отбрасывания двух самых низких и двух самых высоких оценок.

1. Какие оценки получил натюрморт при простом усреднении и при урезанном усреднении?
2. Какой рисунок занял первое место? Какой рисунок занял бы первое место, если для вычисления итоговых оценок использовалось бы среднее арифметическое?
3. Какой рисунок занял третье место? Какой рисунок занял бы третье место, если для вычисления итоговых оценок использовалось бы среднее арифметическое?

Ответы к упражнениям:

Прикидки и оценки. 1. 500 см, 0,08 мм, 6400 км, 68 м; 2. 2; 3. 23.

Логическая грамотность. 1. 102 000; 2. В и D

Незнакомый контекст. 1. 1189мм-841мм, 841мм-594мм, 420мм-297мм, 297мм-210мм; 2. 5000; 3. 1,4; 4. А-5,5 Б-0,8 В-2420

Экономика. 1. 21; 2. 1500; 3. 45570; 4. 7; 5. 192000

Геометрия. 1. 175;