МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М34

Поддержано Департаментом образования г. Москвы
в рамках программы «Одаренные дети»

Рецензент: А. К. Ковальджи

М34 **Математика в задачах.** Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009. — 488 с.

ISBN 978-5-94057-477-4

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи, а также решения или указания к ключевым задачам.

ББК 74.200.58:22.1

Рисунки Е. С. Горской

ISBN 978-5-94057-477-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Подробнее об этих школах, их программах, их преподавателях (многие из которых являются авторами сборника) и т. д. написано в приложении. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи [1)], а также решения или указания к ключевым задачам. Обычно ключевые задачи самостоятельно решаются некоторыми школьниками и после этого разбираются, а остальные задачи сдаются школьниками как на занятии, так и после него.

Материалы разделены на три части: «Алгебра», «Геометрия», «Комбинаторика», а внутри каждой части на разделы. В скобках после названия каждого раздела указано, для каких классов он рекомендуется. Эта рекомендация примерно соответствует тому, каким участникам этот раздел предлагался на Школе. Конечно, эта рекомендация весьма условна.

Достоинство данного сборника в том, что почти все разделы независимы друг от друга. Если в одном разделе используются только определение из другого, то эти разделы не считаются зависимыми — все такие определения общеприняты. Схема зависимости разделов приведена в начале каждой главы (или в начале раздела написано, на какие другие разделы он опирается). Это дает большую свободу руководителю кружка при подготовке занятий, но одновременно требует его высокой квалификации.

Для решения задач достаточно понимания их условий. Все определения, не входящие в школьную программу, приводятся в той же главе, где используются (но не всегда в том же разделе). Иногда могут оказаться полезными другие задачи того же раздела или разделов, от которых «зависит» данный. Никакие другие знания и теории не нужны. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение надо доказать.

[1)] По некоторым темам занятия проводились неоднократно на различных школах, причем иногда разными преподавателями. В сборнике соответствующие материалы объединены.

Некоторые материалы сборника отражают опыт преподавания не только на Школах, но также в СУНЦ МГУ и на кружке «Олимпиады и математика» в МЦНМО. Многие материалы использовались для дистанционного обучения математике [2]. В таких материалах присутствуют контрольные вопросы с выбором ответов (предназначенные для быстрой оценки готовности школьника к решению данного цикла задач; такие задания не используются на школах) и перечисление номеров задач, являющихся зачетными по данной теме при дистанционном обучении.

Сборник предваряют заметки об общих принципах преподавания, адресованные прежде всего преподавателям. Возможно, заметки окажутся полезными и школьникам.

Мы благодарим проректора МИОО директора МЦНМО И. В. Ященко за идею создания Школ и книги, а также за организацию материальной основы. Мы благодарим авторов настоящего сборника за серьезную работу над материалами (эти материалы существенно доработаны по сравнению с тем, что предлагалось на занятиях). Мы благодарим участников школ, поскольку эти материалы создавались для них (более того, иногда участники помогали совершенствовать материалы), благодарим А. К. Ковальджи за общее рецензирование книги (после рецензирования нами отдельных материалов), М. Г. Быкову за техническое редактирование текста и Е. С. Горскую за подготовку рисунков.

Редакторы сборника частично поддержаны грантами РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛа и 07-01-00648-а, НШ-4578.2006.1, РНП 2.1.1.7988, ИНТАС 06-1000014-6277.

Олимпиады и математика [3]

А. Б. Скопенков

> To him a thinking man's job was not to deny one reality at the expense of the other, but to include and to connect.
>
> *U. K. Le Guin.* The Dispossessed [4]

Перед учителями и руководителями кружков, занимающимися с сильными школьниками, встает вопрос: как подготовить школьников к олимпиадам или к «серьезной» математике? Некоторые думают, что

---

[2] `http://math.olymp.mioo.ru`.

[3] Это обновленный вариант введения к статье из Мат. просвещения. 2006. № 10. С. 57–63. Обновляемый текст: http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf.

[4] Для него работой мыслителя было не отрицание одной реальности за счет другой, а взаимовключение и взаимосвязь. *У. К. Ле Гуин.* Обделенные. — *Пер. автора.*

для первого надо прорешивать задачи последних олимпиад, для второго надо читать научную литературу, и что ввиду принципиальной разницы первого и второго бессмысленно пытаться достичь и того, и другого. Автор этой заметки придерживается распространенного мнения о том, что эти подходы недостаточно эффективны и приводят к вредным «побочным эффектам»: школьники либо чрезмерно увлекаются *спортивным* элементом в решении задач, либо изучают *язык* высшей математики вместо ее содержания.

Мне кажется, что основу математического образования сильного ученика должно составлять *решение и обсуждение задач, в процессе работы над которыми он знакомится с важными математическими идеями и теориями.* Это одновременно подготовит школьника и к математической науке, и к олимпиадам и не нанесет вреда его развитию в целом. Это будет более эффективно и для достижения успеха только в олимпиадах или только в науке (если не учитывать большого количества других факторов кроме разумной организации занятий).

Как и при естественном развитии самой математики, каждая следующая задача должна быть мотивирована либо практикой, либо уже решенными задачами (см. подробнее [4]). Поэтому ученик, занимающийся «мотивированной для него» математикой (обычно более элементарной, но содержательной и потому сложной) вместо «немотивированной для него» математики (обычно менее элементарной, но языковой и потому тривиальной), имеет преимущество в дальнейшей учебе и научной работе. А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика.

Олимпиадных задач очень много, большинство из них интересны школьнику, и среди них много математически содержательных. Такие задачи могут составить основу изучаемого материала. Однако решение олимпиадных задач без изучения математических идей и теорий недостаточно эффективно даже для «чистой» подготовки к олимпиадам (на долгих — год и более — промежутках времени, как и вообще решение сиюминутных задач без фундаментального развития). Кроме того, большинству людей легче достичь успеха на олимпиадах в том случае, когда они не считают успех главной целью. Сложную задачу легче решить, если спокойно думать о самой задаче, а не о награде, которая последует за ее решением. Поэтому школьник, имеющий более высокую цель, чем успех на олимпиаде, имеет на этой олимпиаде психологическое преимущество.

Как удачно подобрать задачи для обучения учеников? Этот вопрос учителя́ задавали себе последние десять тысяч лет [1, предисловие],

[2], [3, с. 26–33], [5, предисловие]. Очередным примером являются материалы настоящего сборника.

[1] *Генкин С. А.*, *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.

[2] *Судзуки Д.* Основы дзен-буддизма. Наука дзен — ум дзен. Киев, 1992.

[3] *Платон.* Федон // Федон, Пир, Федр, Парменид. М.: Мысль, 1999.

[4] *Скопенков А. Б.* Философско-методическое отступление, наст. сборник.

[5] *Шклярский Д. О.*, *Ченцов Н. Н.*, *Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Физматлит, 2001.

Философско-методическое отступление [5)]

А. Б. Скопенков

> Круг мог, нацелясь в стаю самых признанных и возвышенных человеческих мыслей, вмиг ссадить ворону в павлиньих перьях.
>
> *В. Набоков.* Под знаком незаконнорожденных

По моему мнению, именно с *новых идей*, а не с *немотивированных определений*, полезно *начинать* изучение любой теории [6)].

«Мы стараемся свести к минимуму число понятий, откладывая определения до момента, когда они напрашиваются сами собой, и избегая задач на понимание и применение формальных определений (типа „является ли множество целых чисел группой по сложению?“)» [5].

«При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше: именно по такому реше-

[5)] Это часть исходной версии заметки [3], не включенная в опубликованную версию. Обновляемый текст: `http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf` и `http://arxiv.org/abs/0804.4357`.

[6)] Такие идеи наиболее ярко выражаются доказательствами, подобными приведенным в [3].

нию, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно» [2, предисловие].

Известно также, что «путь познания должен повторять путь развития» [7].

По моему мнению, такой стиль изложения не только делает материал более доступным, но позволяет сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы, во-первых, разумно выбирать проблемы для исследования и их мотивировки. (Математик, понимающий, что теория Галуа мотивируется более важными проблемами, чем построимость правильных многоугольников и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах, вряд ли станет мотивировать созданную им теорию приложениями, которые можно получить и без его теории.)

Во-вторых, это позволит ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки или известности полученного результата за чрезмерным формализмом. (К сожалению, такое — обычно бессознательное — сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Происходило это и с автором этих строк; к счастью, все мои серьезные ошибки исправлялись *перед* публикациями.)

Мода на искусственно формализованное изложение [8] привела к следующему парадоксу. По данному *известному понятию* высшей математики зачастую непросто (и это требует высокой научной квалификации) выбрать *конкретный красивый результат*, для которого это понятие действительно необходимо (и при получении которого это понятие обычно и возникло).

---

[7] «Впрочем, это не вполне верно. Так, изучение геометрии Лобачевского вовсе не обязательно начинать с попыток доказать пятый постулат Евклида. Геометрия Лобачевского для нас сейчас важна, в первую очередь, ее приложениями в ТФКП, теории чисел, топологии, теории групп, алгебраической геометрии, космологии и т. д., а вовсе не тем, что она демонстрирует независимость пятого постулата от остальных аксиом Евклида. С этой точки зрения более плодотворно ее построение не на основе аксиом Евклида—Гильберта, а на основе понятия группы преобразований (Клейн) или римановой метрики (Риман). Аналогично изучение теории Галуа вовсе не обязательно начинать с задачи о решении алгебраического уравнения в радикалах или квадратных радикалах. С современной точки зрения теория Галуа есть теория алгебраических расширений полей, составляющая неотъемлемую часть алгебры и имеющая приложения и аналоги в других разделах математики (алгебраическая геометрия, теория накрытий, теория инвариантов), а решение алгебраических уравнений в радикалах — это маргинальная задача» (*Э. Б. Винберг*).

[8] Видимо, общепринятый термин «бурбакизация» не очень удачен ввиду *«масштаба и влияния деятельности Бурбаки, независимо от оценки пользы и вреда разных ее аспектов»* (*А. Шень*).

Доказательство с использованием некоторого нового термина имеет свои преимущества: оно подготавливает читателя к доказательству тех теорем, которые уже трудно или невозможно доказать без этого термина [9]. Однако такие доказательства, как правило, не должны быть *первыми* доказательствами данного результата (легко себе представить результат *первого* знакомства с теоремой Пифагора на основе понятий векторного пространства и скалярного умножения). Кроме того, при приведении «терминологического» доказательства полезно четко оговорить его мотивированность не доказываемым результатом, а обучением полезному новому методу.

Приведенная выше точка зрения разделяется многими математиками (а некоторыми — нет); я унаследовал ее от Ю. П. Соловьева.

Например, приводимые порой в качестве *основных* приложений теории Галуа доказательство теоремы Гаусса о правильных многоугольниках и другие результаты о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (как и приложение к решению квадратных уравнений неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах) [10]. Действительно, теорема Гаусса имеет элементарное доказательство, не использующее групп Галуа [3]. Теорема Руффини—Абеля о неразрешимости в радикалах *общего* алгебраического уравнения степени 5 и выше (как и достаточность условия Кронекера неразрешимости в радикалах *конкретного* уравнения простой степени) также имеет алгебраическое доказательство, не использующее групп Галуа [2], [4] (и *топологическое* доказательство [1]). В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости *конкретного* алгебраического уравнения в радикалах, но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения. (То, что никакая *другая теория* не дает легкого для применения ответа, не позволяет утверждать, что *теория Галуа* дает такой ответ.) Но, конечно, формулировка общего критерия в адекватных проблеме терминах может иметь важное философское значение.

---

[9] «Например, векторное доказательство теоремы Пифагора уже является достаточным основанием для введения понятий векторного пространства и скалярного умножения, хотя эти понятия и не являются необходимыми для доказательства упомянутой теоремы» (*Э. Б. Винберг*).

[10] Возможно, *именно поэтому* работы Галуа были забыты на 20 лет после их выхода — пока не появились важные задачи, в первую очередь о разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах, при решении которых уже трудно обойтись без теории Галуа — ведь математика XIX века была гораздо ближе к естествознанию, чем современная. Конечно, приведенная гипотеза нуждается в серьезной проверке.

Популяризации теории Галуа послужит дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без ее понятий, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А. Я. Канель-Белов, С. М. Львовский и Г. Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под толщей обозначений и терминов).

[1] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в вопросах и задачах. М.: Наука, 1976.

[2] *Колосов В. А.* Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М.: Гелиос, 2001.

[3] *Козлов П. В.*, *Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Мат. просвещение. 2008. № 12. С. 127–143. `http://arxiv.org/abs/0804.4357`

[4] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

[5] Задачи по математике / Под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.

Напутствие

А. Я. Канель-Белов

Для успешного решения задач математических олимпиад высшего уровня необходимы в первую очередь общеукрепляющие средства: хорошая проработка алгебры (культура алгебраических преобразований), проработка школьной геометрии. Задачи этих олимпиад (кроме первых задач) практически всегда используют смешанный сценарий решения; редки задачи на применение некоторого метода или идеи в чистом виде. Решению таких «смешанных» задач должна предшествовать работа с ключевыми задачами, в которых идеи работают в чистом виде. Этому и посвящен настоящий сборник. См. также А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи «Как решают нестандартные задачи», С. Генкин, И. Итенберг, Д. Фомин «Ленинградские математические кружки».

Часть I

АЛГЕБРА

Г Л А В А 1

МИНИКУРС ПО АЛГЕБРЕ [1)]

А. Б. Скопенков

Сегодня основная масса учащихся решает алгебраические задачи относительно плохо. Это связано с ухудшением качества школьного образования при сохранении кружкового. Для успешного решения олимпиадных задач алгебраического и теоретико-числового типа всячески рекомендуем нарабатывать культуру арифметических выкладок. (*А. Я. Канель-Белов.*)

Деление многочленов с остатком (8–9)

1. а) Вычислите значение функций

$$P(x)=2x^3-27x^2+141x-256 \ \text{ при } x=16$$

и

$$Q(x)=x^4+\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+1 \ \text{ при } x=-\frac{3}{4}.$$

Указание:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0= \\ =(\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_1)x+a_0.$$

Этот способ вычисления значения многочлена в точке называется *схемой Горнера.*

б) Сколько операций сложения и умножения нужно для вычисления значения функции $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ «напрямую»? А сколько — по схеме Горнера?

Многочленом (в алгебраическом смысле, с вещественными коэффициентами) называется бесконечный упорядоченный набор $(a_0,\ldots,a_n,\ldots)$

[1)] Отдельные разделы написаны А. Я. Канель-Беловым и И. Н. Шнурниковым. Контрольные вопросы составлены М. Б. Скопенковым. Некоторые решения написаны М. В. Прасоловым и М. Б. Скопенковым.

вещественных чисел, среди которых лишь конечное количество отличны от нуля. Поставим в соответствие многочлену (т. е. набору) $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ функцию $\overline{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\overline{P}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ (эта сумма конечна). Поэтому многочлен $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ обычно записывают в виде $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, т. е. так же, как $\overline{P}$. Однако будем различать P и $\overline{P}$ — пока не доказано, что это «одно и то же» (4 б)) или в тех обобщениях, где это не «одно и то же» (4 в)). *Корнем* многочлена $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ называется такое число x_0, что $a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = 0$.

2. Дайте определения степени, суммы и произведения многочленов.

3. Пусть P — многочлен и a — число.

а) **Теорема Безу.** Существует такой многочлен Q, что $P = (x-a)Q + P(a)$. (Иными словами, многочлен $P - P(a)$ делится на $x - a$.) Более того, можно считать, что $\deg Q < \deg P$. Здесь $\deg P$ — *степень многочлена* P, т. е. наибольшее такое число n, что коэффициент a_n ненулевой.

б) **Следствие.** Если $P(a) = 0$, то существует такой многочлен Q, что $P = (x-a)Q$.

4. а) Многочлен степени $n > 0$ имеет не более n корней.

б) Если значения двух многочленов в любой точке совпадают, то эти многочлены равны. (Иными словами, если P, P_1 — многочлены и $P(x) = P_1(x)$ для любого x, то $P = P_1$).

в)* Утверждение б) неверно для *многочленов над* $\mathbb{Z}_p$ (определите сами, что это такое).

г) Если значения двух многочленов степени n совпадают в $n+1$ различной точке, то эти многочлены равны.

д) Докажите тождество:

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \\ + \frac{b(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x.$$

5. Пусть P — многочлен. Если $a_1, \ldots, a_k$ — различные числа, для которых $P(a_i) = 0$, то P делится на $(x-a_1)\ldots(x-a_k)$.

6. а) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с вещественными коэффициентами.

б) Верна ли теорема о делении с остатком для многочленов с рациональными коэффициентами?

в) А с целыми коэффициентами?

г) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с целыми коэффициентами, если старший коэффициент делителя равен единице.

Зачетные задачи: 1 б); 2; 3 а), б); 4 а), б), г), д); 5; 6 а)–г). Из них письменно: 3 а); 6 в).

Контрольные вопросы

I. Многочлен $f(x)$ дает остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток -1 при делении на $x+1$. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на x^2-1?

а) 1; б) -1; в) x; г) $-x$.

II. При каких значениях a многочлен $x^{1000}+ax+9$ делится на $x+1$?

а) Ни при каких;
б) при $a=10$;
в) при $a=-10$;
г) при $a=10$ или $a=-10$;
д) при любых.

III. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Степень суммы двух многочленов равна максимуму из степеней этих многочленов.

б) Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме их степеней.

в) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени самого многочлена P.

г) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени многочлена Q.

Указания и решения

3. а) *Указание.* Докажите сначала для $P=x^n$. Докажите, что если утверждение верно для P и Q, то верно и для bP и $P+Q$ (для любого числа b).

4. а) Докажем это утверждение индукцией по степени n многочлена P. При $n=0$ утверждение верно: ненулевой постоянный многочлен не имеет корней. Предположим, что *любой ненулевой многочлен Q степени k меньше n имеет менее k корней.* Рассмотрим произвольный ненулевой многочлен степени n. Предположим, что он имеет хотя бы $n+1$ корень. Обозначим эти различные корни через $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$.

По следствию из теоремы Безу (задача 3 б)) $P=(x-a_0)Q$, где Q — некоторый многочлен *степени меньше n* (это свойство многочлена Q, иногда пропускаемое при доказательстве, существенно!). Подставляя в данное равенство $x=a_1$, получим $0=(a_1-a_0)Q(a_1)$. Значит,

$Q(a_1) = 0$, т. е. a_1 — корень многочлена Q. Аналогично все числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ — корни многочлена Q *степени меньше* n. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает индукционный переход, а следовательно, и утверждение задачи.

Рациональные и иррациональные числа (8–10)

1. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии (ни в каком порядке; даже не подряд идущими членами).

Число называется *рациональным*, если его можно представить как отношение целых чисел, и *иррациональным* в противном случае.

2. Рациональны ли числа:

а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[7]{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + 2\sqrt{6}$;

г) $\sqrt[n]{k}$, где целое $k \geqslant 2$ не является n-й степенью целого числа;

д) $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$;

е) $\cos 60^\circ$;

ж) $\sin 60^\circ$;

з) $\cos 20^\circ$;

и) $\sin 10^\circ$?

Указание к з). Выразите $\cos 3\alpha$ через $\cos \alpha$. Если для несократимой дроби p/q выполнено $4(p/q)^3 - 3(p/q) = -1/2$, т. е. $8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$, то 1 делится на p и 8 делится на q.

3. а) **Теорема о целых корнях.** Пусть

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p) = 0$ для целого p. Тогда a_0 делится на p.

б) **Теорема о рациональных корнях.** Пусть

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми $a_n, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p/q) = 0$ для несократимой дроби p/q. Тогда a_0 делится на p и a_n делится на q.

в) В условиях б) для любого целого k число $f(k)$ делится на $p - kq$.

4. а) На клетчатой бумаге нельзя выбрать три узла, являющиеся вершинами правильного треугольника.

б)* Какие правильные многоугольники можно нарисовать на клетчатой бумаге с вершинами в узлах?

в)* При каких целых n число $\cos n^\circ$ рационально?

Не изучавшие тригонометрических функций могут игнорировать задачи 2 е)–и) *и* 4 а)–в).

Зачетные задачи: 1; 2 б), г)–и); 3 а), б); 4 а), в). Из них письменно: 3 а), 4 а).

Контрольные вопросы

I. Какие из следующих чисел являются рациональными?

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}$;

в) $\sqrt{6+2\sqrt{7}}-\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

II. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Сумма рациональных чисел всегда рациональна.
б) Сумма иррациональных чисел всегда иррациональна.
в) Корень из иррационального числа всегда иррационален.

III. Бумага «в треугольничек» получается так: на плоскости через равные промежутки проводятся прямые, параллельные двум сторонам фиксированного правильного треугольника, а затем через все точки пересечения проводят прямые, параллельные третье стороне. На листе бумаги в треугольничек можно выбрать 4 узла, являющиеся вершинами (выберите все возможные фигуры)

а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.

Указания и решения

2. *Ответы*: а) нет; б) да.

а) Приведем доказательство того, что число $\sqrt{2}$ иррационально (известное еще древним грекам). Предположим обратное: пусть $\sqrt{2}=p/q$, где p/q — несократимая дробь. Возведем данное равенство в квадрат и домножим обе части на q^2. Получим: $2q^2=p^2$. Так как числа p и q целые, то из полученного равенства заключаем, что число p четное. Значит, $p=2r$, где r — некоторое целое число. Подставляя это выражение в наше равенство, получим $2q^2=(2r)^2$. Сокращая на 2, имеем $q^2=2r^2$. Так как q и r — целые числа, то число q четное. В итоге мы получили, что оба числа p и q четные. Это противоречит нашему предположению, что дробь p/q несократима. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

в) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+2\sqrt{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}+2\sqrt{6}=-5.$$

Число -5, очевидно, рациональное.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9–10)

1. а) Уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ сводится к уравнению $x^3+px+q=0$.

б) Уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ сводится к уравнению $x^4+px^2+qx+r=0$.

в) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y=-2x^3-6x^2+4$.

г) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

2. Метод дель Ферро. а) Найдите хотя бы один корень уравнения $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Так как $(b+c)^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3-3bcx-(b^3+c^3)=0$.

б) Решите уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Поделите $x^3-3bcx-(b^3+c^3)$ на $x-b-c$.

3. а) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Иными словами, $x^3-b^3-c^3-3bcx=(x-b-c)(x^2+b^2+c^2+bx+cx-bc)$.

б) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. Когда достигается равенство?

в) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ при $a,b,c>0$.

г)* $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

4. а) Решите уравнение $x^3+3x-4=0$.

б) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

в) Напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом дель Ферро. При каком условии применим этот метод (если корни разрешается извлекать только из положительных чисел)?

5. Метод Феррари. а) Решите уравнение $(x^2+2)^2=18(x-1)^2$.

б) Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

Указание. Подберите такие α,b,c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$. Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

в) Решите уравнение $x^4-10x^2-8x+5=0$.

г) Для любых p,q,r кубическое уравнение $4(2\alpha-p)(\alpha^2-r)-q^2=0$ имеет решение.

д) Найдите алгоритм решения уравнения $x^4+px^2+qx+r=0$ методом Феррари. При каком условии применим этот метод (если корни разрешается извлекать только из положительных чисел и разрешается решать любые кубические уравнения)?

6. Метод Виета. а) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta)= =\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

б) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

в) Решите уравнение $4x^3-3x=\frac{1}{2}$.

г) Решите уравнение $x^3-3x-1=0$.

д) Используя функции cos и arccos, напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом Виета. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ решается методом Виета?

7*. Решите уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, подобрав такие α, A, B, что

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{ax}{2}+\alpha\right)^2-(Ax+B)^2.$$

Зачетные задачи: 1 а), г; 3 а), б); 4 б), в); 5 а)–г); 6 б)–д).

Контрольные вопросы

I. Какое из указанных чисел является корнем уравнения x^3-6x+6?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

II. Какое из указанных чисел является корнем уравнения $x^4+2x^2- -8x-4=0$?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

III. Какое из указанных чисел является корнем уравнения $4x^3- -3x+\frac{1}{2}=0$?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

Указания и решения

1. а) *Указание.* Воспользуйтесь линейной заменой переменной.

2. а) *Ответ*: $x=-1-\sqrt[3]{2}$.
Указание. $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=x^3-3bcx+(b^3+c^3)$, где $b=1$, $c=\sqrt[3]{2}$.
б) *Ответ*: $x=-1-\sqrt[3]{2}$.

В силу задачи 3а уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$ равносильно уравнению $(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bc-bx-cx)=0$ с вышеуказанными b и c. По задаче 3 б) второй сомножитель в левой части положителен при любом x (поскольку $b\neq c$). Значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x=-b-c=-1-\sqrt[3]{2}$.

5. *Ответы*:

а) $(-3\sqrt{2} \pm \sqrt{10+12\sqrt{2}})/2$;

б) $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$;

в) $-1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm \sqrt{6}$.

6. г) *Указание.* Сведите к предыдущему заменой $y = kx$.

Ответы: в) $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{13\pi}{9} = \cos\frac{5\pi}{9}$;

г) $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{7\pi}{9}$, $2\cos\frac{13\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}$.

Применения комплексных чисел (10–11)

Комплексным числом называется пара (a, b) вещественных чисел. Она записывается в виде $a + bi$. Сумма комплексных чисел определяется формулой $(a+bi)+(a'+b'i) = (a+a')+(b+b')i$, а произведение — формулой $(a+bi)(a'+b'i) = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$.

Другие начальные сведения о комплексных числах можно найти, например, в учебнике Н. Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ», 11 класс.

1. а) Для любого комплексного числа z существуют такие вещественные $r \geqslant 0$ и φ, что $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Единственны ли r и φ?

б) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$.

в) Для каждого целого $n > 0$ решите уравнение $z^n = 1$ в комплексных числах z.

2. Разложите на квадратные трехчлены и линейные двучлены с *вещественными* коэффициентами:

а) $x^4 + 4$; б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; в) $x^n - 1$.

3. Определение многочлена см. выше в теме «Деление многочленов с остатком».

а)* Основная теорема алгебры. Непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами всегда имеет комплексный корень. Примечание: эту задачу можно, не доказывая, использовать в других.

б) Многочлен с комплексными коэффициентами степени n (т. е. такой, что $a_n \neq 0$) имеет ровно n корней с учетом кратности. (Корень z_0 многочлена P *имеет кратность* k, если P делится на $(z-z_0)^k$ и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.)

в) Если $z_1, \ldots, z_n$ — корни многочлена P со старшим коэффициентом a_n, причем каждый корень выписан столько раз, какова его кратность, то $P(z) = a_n(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

4. Обозначим $\overline{a+bi}:=a-bi$.

а) Для любого многочлена P с вещественными коэффициентами выполнено $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$.

б) Любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

в) Если для многочлена P с вещественными коэффициентами $P(x)>0$ при любом $x\in\mathbb{R}$, то $P=Q^2+R^2$ для некоторых многочленов Q,R с вещественными коэффициентами.

5*. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2+x+1)\equiv P(x)P(x+1)$.

6. а) Выразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

б) Докажите, что $\cos n\varphi$ и $\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ — многочлены от $\cos\varphi$.

7. Найдите: а) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\varphi$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\sin k\varphi$; в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos k\varphi}{3^k}$.

Указание. Обозначим $\mathrm{Re}(a+bi):=a$ для вещественных a и b. Используйте тот факт, что $\cos k\varphi=\mathrm{Re}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k$.

8. а) $\operatorname{ctg}^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\operatorname{ctg}^2 x+1$.

Указание: используйте $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

б) $\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_{2n+1}^{2j+1}\operatorname{ctg}^{2n-2j}\dfrac{\pi k}{2n+1}=0$ для любого $k=1,\ldots,n$.

в) $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi k}{2n+1}=\dfrac{n(2n-1)}{3}$.

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

д)* Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^6}$, ...

9. а) Каким геометрическим преобразованием плоскости $\mathbb{C}$ получается число iz из числа z?

б) Обозначим $e^{i\varphi}:=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Каков геометрический смысл умножения на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$?

в) Выразите число w, полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой стрелки относительно центра z_0 (через z, z_0 и φ).

г) Композиция поворотов плоскости (с различными центрами) — поворот или параллельный перенос.

11. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_{n+1}=x_n\sqrt{\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2x_{n-1}}}$ и

а) $x_0=1$, $x_1=1/2$; б) $x_0=1$, $x_1=2$.

12. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 4y_n, \\ y_{n+1} = 3y_n + 4x_n \end{cases}$ и

а) $x_0 = 1$, $y_0 = 0$; б) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Зачетные задачи. 10 класс: 1 в); 2 б), в); 3 б), в); 4 б), в); 6 а); 7 а), б); 8 б), в). Из них письменно: 3 б); 4 б).

11 класс: 8 а), г); 9 б)–г); 10 а), б); 11 а), б); 12 а), б). Из них письменно: 9 в); 12 а).

Контрольные вопросы

I. Какое преобразование плоскости задается формулой $z \mapsto 2z + 2$?

а) Параллельный перенос на вектор длины 2.

б) Гомотетия с коэффициентом 2.

в) Сжатие к прямой с коэффициентом 2.

II. Четверка комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4 удовлетворяет равенству $\dfrac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = 2$. Что можно сказать о четверке точек плоскости, соответствующих числам z_1, z_2, z_3, z_4?

а) Они являются вершинами параллелограмма.

б) Они лежат на одной прямой или на одной окружности.

в) Площадь треугольника $0z_1z_2$ равна площади треугольника $0z_3z_4$ (точка 0 — начало координат).

III. Чему равна сумма $\sum\limits_{k=1}^{6} \cos \dfrac{2\pi k}{7}$?

а) 0; б) 1; в) -1; г) 6; г) 7;

д) ни один из перечисленных ответов не является верным.

Указания и решения

7. *Ответы.* а) $\dfrac{\sin \frac{n+1}{2}\varphi \cos \frac{n}{2}\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}$.

б) $\dfrac{2^{n+2}\sin n\varphi - 2^{n+1}\sin(n+1)\varphi + 2\sin\varphi}{5 - 4\cos\varphi}$.

в) $\dfrac{9 - 3\cos\varphi}{10 - 6\cos\varphi}$.

9. а) *Ответ*: поворотом на 90° вокруг начала координат против часовой стрелки.

Поскольку $|iz| = |z|$, то при данном преобразовании расстояние от точки z до начала координат сохраняется. Поскольку $\operatorname{Arg}(iz) = \operatorname{Arg}(z) + \pi/2$, то ориентированный угол между лучами, идущими из начала координат в точки z и iz, равен $+\pi/2$. Значит, по определению, точка iz получается из точки z указанным поворотом.

10. а) *Примечание.* На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты 0, 1, c соответственно.

Непостроимость правильных многоугольников (10–11)

А. Я. Канель-Белов

Теорема Гаусса. *Калькулятор* (*вычисляющий числа с абсолютной точностью*) *имеет кнопки*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad :, \quad \sqrt{}$$

(*и неограниченную память*)*. На этом калькуляторе можно вычислить значение* $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ *тогда и только тогда, когда* $n=2^{\alpha}p_1\cdot\ldots\cdot p_l$*, где* α *— целое неотрицательное и* $p_1,\ldots,p_l$ *— различные простые числа вида* $2^{2^s}+1$*.*

История этой знаменитой теоремы приводится в [1]. В [3], [2] приводится элементарное доказательство этой теоремы. Здесь мы приведем (в задачах) доказательство *невозможности.* Насколько известно автору и редакторам сборника, это доказательство не опубликовано ранее и является наиболее простым из известных доказательств. Несмотря на простоту этого доказательства и отсутствие явного использования термина «группа Галуа» (точнее, именно благодаря этому), его изучение — лучший способ понять отправные идеи теории Галуа (см. подробнее философско-методическое отступление в начале книги).

Вещественное число называется *построимым*, если его можно получить на нашем калькуляторе (т. е. получить из 1 при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из положительного числа). Определение *комплексно построимого* комплексного числа аналогично определению построимого вещественного числа, только квадратные корни извлекаются из произвольных уже построенных чисел и комплексно построимыми считаются оба значения квадратного корня.

1. Комплексное число комплексно построимо тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части (вещественно) построимы.

2. Пусть нажатие кнопок «1» и четырех арифметических действий на калькуляторе из теоремы Гаусса бесплатны, а за извлечения корня нужно платить копейку. *Число A можно получить за r копеек тогда и только тогда, когда существуют такие $a_1,\ldots a_r \in \mathbb{R}$, что*

$$\mathbb{Q}=Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \ni A, \quad \text{где} \quad a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a}_k \notin Q_k,$$
$$Q_{k+1}=Q_k[\sqrt{a}_k]:=\{\alpha+\beta\sqrt{a}_k \mid \alpha,\beta \in Q_k\} \quad \text{для любого} \quad k=0,\ldots,r-1.$$

Такая последовательность называется *цепочкой квадратичных расширений* (это единый термин, термин «квадратичное расширение» мы не используем).

Итак, число A построимо тогда и только тогда, когда для некоторого r существует цепочка квадратичных расширений длины r, последнее множество которой содержит A.

Доказательство невозможности, основанное на рассмотрении аналогичных цепочек, называется в математической логике и программировании *индукцией по глубине формулы.*

3. а) **Лемма Гаусса.** Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

б) **Признак Эйзенштейна.** Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Положим $\Phi(x):=x^{12}+x^{11}+\ldots+x+1$.

а) Многочлен $\Phi(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

б) Если $\varepsilon:=\cos\dfrac{2\pi}{13}+i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ построимо, то существует такая цепочка $\mathbb{Q}=Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$ квадратичных расширений, что Φ приводим над Q_{k+1} и неприводим над Q_k.

в) В цепочке квадратичных расширений определим отображение сопряжения $\bar{\cdot}: Q_{k+1} \to Q_{k+1}$ (относительно Q_k) формулой $\overline{x+y\sqrt{a}_k}=$ $=x-y\sqrt{a}_k$. Если Φ делится на многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1}, то Φ делится на сопряженный многочлен $\overline{P}$ (т. е. на многочлен с сопряженными коэффициентами).

г) Если многочлен R с коэффициентами из Q_{k+1} неприводим над Q_k, то сопряженный (относительно Q_k) многочлен $\overline{R}$ неприводим над Q_k.

д) Разложение многочлена $\Phi(x)$ над Q_{k+1} на неприводимые над Q_{k+1} множители состоит из двух сопряженных (относительно Q_k) множителей.

е) Для каждого из этих множителей существует цепочка, аналогичная б), но, возможно, с другим k.

ж) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

5. а) Минимальная степень многочлена, корнем которого является данное построимое число, является степенью двойки.

б) Число $\cos(2\pi/n)$ не построимо для n простого, $n\neq 2^m+1$.

в) Многочлен $\Phi(x)=1+x^{17}+x^{34}+x^{51}+\ldots+x^{272}$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

г) Число $\cos(2\pi/289)$ не построимо.

д) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

е) Если все корни неприводимого многочлена нечетной степени с рациональными коэффициентами построимы, то один из них рационален.

Указания

1. Если $\sqrt{a+bi}=u+vi$, то u,v выражаются при помощи квадратных радикалов через a и b.

2. Это утверждение легко доказывается индукцией по количеству операций калькулятора, необходимых для получения числа, с применением домножения на сопряженное.

3. Предположите противное и воспользуйтесь методом неопределенных коэффициентов. Детали см. в [4].

4. а) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $((x+1)^{13}-1)/x$ и лемму Гаусса.

б) Рассмотрим цепочку квадратичных расширений $\mathbb{Q}=Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_{r-1}\subset Q_r\ni\varepsilon$. Заметим, что многочлен Φ приводим над Q_r (поскольку имеет корень ε). Поэтому существует l, для которого многочлен Φ приводим над Q_{l+1}. Обозначим через k наименьшее такое l. Из пункта а) следует, что $k\geqslant 1$. Теперь легко видеть, что цепочка $\mathbb{Q}=Q_1\subset\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_k\subset Q_{k+1}$ искомая.

в) Сопрягите относительно Q_k равенство $\Phi(x)=P(x)R(x)$.

г) Достаточно доказать, что если многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1} делит Φ, то P и $\overline{P}$ взаимно просты. Для этого покажите, что НОД$(P,\overline{P})$ имеет коэффициенты из Q_k и воспользуйтесь неприводимостью многочлена Φ в Q_k.

д) Аналогично б).

е) Докажите, что указанное в пункте г) разложение многочлена $\Phi(x)$ состоит ровно из двух множителей (воспользуйтесь тем, что если коэффициенты многочлена P лежат в Q_{k+1}, то коэффициенты многочлена $P\overline{P}$ лежат в Q_k). То же самое будет верно и для разложения получившихся множителей и т. д. Исходя из этого получите, что степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки.

5. а), б) Аналогично задаче 4.

в) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $\Phi(x+1)$ и лемму Гаусса.

г) Аналогично решению задачи 4 докажите, что если число $\cos(2\pi/289)$ построимо, то степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки. А это неверно.

д) Аналогично решению задач C1cdef в [3].

Литература

[1] *Гиндикин С. Г.* Дебют Гаусса // Квант. 1972. № 1.

[2] *Канель-Белов А. Я.* О построениях, готовится к печати.

[3] *Козлов П. А.*, *Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Матем. просвещение. 2008. № 12. С. 127–143; `http://arxiv.org/abs/0804.4357`.

[4] *Прасолов В. В.* Многочлены. М: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

Диагонали правильных многоугольников (10–11)

И. Н. Шнурников

Наша цель — определить, какие и сколько диагоналей правильного n-угольника могут пересекаться в одной точке. Задачи 3, 5, 7 описывают возможные точки пересечения, а задачи 9 и 10 нужны для доказательства невозможности иных точек пересечения (которое завершается перебором случаев на компьютере).

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен $80°$. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$. Докажите, что $\angle AMC = 70°$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что треугольник ABP равносторонний. Докажите, что $\angle PCD = 15°$.

3. Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен $20°$. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60°$ и $\angle ECA = 50°$. Докажите, что $\angle ADE = 30°$.

5. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16}.

6. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. На сторонах BA и BC взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DCA = 50°$ и $\angle EAC = 40°$. Докажите, что $\angle AED = 30°$.

7. Докажите, что в правильном 30-угольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13},\ A_2A_{17},\ A_3A_{21},\ A_4A_{24},\ A_5A_{26},\ A_8A_{29},\ A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

8*. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 14°$, $\angle B = 62°$, $\angle C = 104°$. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DBC = 50°$ и $\angle ECB = 94°$. Докажите, что $\angle CED = 34°$.

9. Докажите, что при простом p в правильном p-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке внутри p-угольника.

Указание: если не получается, то смотрите дальше.

Теорема. *Максимальное количество диагоналей правильного n-угольника, пересекающихся в одной точке, отличной от центра, равно*:

2, *если n нечетно*;
3, *если n четно и не делится на* 6;
5, *если n делится на* 6 *и не делится на* 30;
7, *если n делится на* 30.

10*. а) Докажите, что если для простого числа p многочлен $S(x)$ с целыми коэффициентами степени не более $2p-1$ имеет корень $e^{\frac{i\pi}{p}}$, то

$$S(x) = a(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2p-2}) + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(x^j + x^{p+j})$$

для некоторых $a, a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$.

б) Отличный от тождественного нуля многочлен $S(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j x^j$ с неотрицательными целыми коэффициентами называется k-*минимальным*, если $S(e^{\frac{2\pi i}{k}}) = 0$ и не существует таких целых $0 \leqslant b_j \leqslant a_j$, что многочлен $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j x^j$ тоже имеет корень $e^{\frac{2\pi i}{k}}$, причем не все b_j равны нулю и не все b_j равны a_j.

Докажите, что для каждого k-минимального многочлена $S(x)$ существуют различные простые числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$, целые числа m, l и $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ такие, что $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

в) Для k-минимального многочлена $S(x)$ выберем $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ с минимальным p_s при условии $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$ и $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

Пусть для выбранного $S_1(x)$ оказалось $p_1 = 2$ и $S(1) < 2p_s$. Тогда найдутся целые числа $l, r < p_s$ и $p_1p_2\ldots p_{s-1}$-минимальные многочлены

$T_1, T_2, \ldots T_r$ такие, что

$$S(x) = x^l \cdot \sum_{j=1}^{r} T_j^j(x) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{r} T_j(1) = 2r + S(1) - p_s.$$

г) Докажите, что существует ровно 107 k-минимальных многочленов (со всеми возможными k), значения которых в 1 не превосходят 12.

Указания

1, 2, 4. Можно свести задачу к пересечению диагоналей в правильном n-угольнике, но проще решить дополнительным построением.

3, 5, 7. Решаются теоремой Чевы в синусах.

6. Сводится изогональным сопряжением к предыдущим.

9. Перепишите теорему Чевы в синусах для точки пересечения трех различных диагоналей правильного n-угольника в виде соотношения $\sum\limits_{j=1}^{6} e^{i\pi x_j} + \sum\limits_{j=1}^{6} e^{-i\pi x_j} = 0$, в котором шесть чисел $x_j, j = 1, 2, \ldots, 6$, определяются формулой (ее надо найти) и удовлетворяют равенству $\sum\limits_{j=1}^{6} x_j = 1$.

ГЛАВА 2

МИНИКУРС ПО АНАЛИЗУ [1)]

А. Б. Скопенков

Неравенства: базовые методы (9–10)

Латинские и греческие буквы обозначают неотрицательные числа.

0. Паша пришел на физико-математическую олимпиаду, которая длится 6 часов. Баллы x и y за физику и математику — вещественные числа (не обязательно целые), равные затраченному на решение задач по данному предмету времени. Как Паше надо распределить время между физикой и математикой, чтобы получить наибольший (наименьший) результат, если этот результат вычисляется по формуле

а) xy; б) x^2+y^2; в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; г) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; д) $\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{y}{2}$; е) x^2y.

Попробуйте догадаться до ответа для формулы $f(x)+f(y)$ (в зависимости от f), а также для формулы $af(x)+bf(y)$, где $a,b>0$.

1. б)–д) Решите задачу 0 при условии, что Паша решает физику в два раза быстрее, чем математику, но математика ценится в два раза больше, чем физика. Формально: найдите наибольшее и наименьшее значение величины $2f(x)+f(y)$ при условии $2x+y=6$ (для указанных в задаче 0 функций f).

2. а) **Неравенство Йенсена.** Если функция f *выпукла вниз*, т. е.

$$f(ax+(1-a)y)\leqslant af(x)+(1-a)f(y)$$

для любого $a\in[0,1]$, то

$$f(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)\leqslant a_1f(x_1)+\ldots+a_nf(x_n)$$

для любых (неотрицательных) $a_1,\ldots,a_n$, сумма которых равна 1.

[1)] Отдельные разделы написаны М. А. Берштейном и В. А. Сендеровым. Контрольные вопросы составлены М. Б. Скопенковым. Некоторые решения написаны М. В. Прасоловым и М. Б. Скопенковым.

б)* Проверку *выпуклости вниз* удобно осуществлять с помощью вычисления *второй производной*: дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$.

3. Пусть $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Найдите наибольшее и наименьшее значение следующих величин (не забудьте доказать все используемые вами неравенства):

а) $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$; б) $x_1^2 + \ldots + x_n^2$; в) $\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$;

г) $x_1^3 + \ldots + x_n^3$; д)* $x_1^2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^2 \cdot x_n$.

Указание к задаче 3 а). Предостережение: если вы используете *существование* наибольшего значения, то это нужно доказать.

Идея решения. Если не все числа равны, тогда есть i, j, такие что $x_i > \dfrac{1}{n} > x_j$. Заменим пару (x_i, x_j) на $\left(\dfrac{1}{n}, x_i + x_j - \dfrac{1}{n}\right)$. Докажите, что если $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant x$, то $\dfrac{1}{n}\left(x + y - \dfrac{1}{n}\right) \geqslant xy$.

4. а) Докажите **неравенства о средних**:

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leqslant \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \leqslant \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

б) Для каждого неравенства докажите, что равенство в нем достигается, только если $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

5*. Найдите $\min(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$ и $\max(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$ при условиях:

а) $x_i \geqslant \dfrac{1}{n}$ и $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$;

б) $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leqslant (x_1 + \ldots + x_n)^2/4$.

6. а) Если $a \geqslant b$ и $x \geqslant y$, то $ax + by \geqslant ay + bx$.

б) Если $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — стороны и соответствующие углы треугольника, то

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geqslant \frac{\pi}{3}(a + b + c).$$

в) Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)\sin\beta + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha.$$

г) **Транснеравенство.** Если $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ и $\{i_1, \ldots$ $\ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, то

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + \ldots + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_n + \ldots + x_ny_1.$$

д) **Неравенство Чебышёва**. Если $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$, то
$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n} \geqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_n + \ldots + x_ny_1}{n}.$$

Замечание. В транснеравенстве и неравенстве Чебышёва не требуется неотрицательность чисел x_i и y_j.

7. Неравенство Мюрхеда.

а) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$;

б) $a^n + b^n \geqslant a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$;

г) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c \geqslant 6abc$;

д) $2(a^4+b^4+c^4)\geqslant a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant \geqslant 2abc(a+b+c)$.

Придумайте и докажите аналогичную цепочку неравенств

е) между $a^5 + b^5 + c^5$ и $abc(ab + bc + ca)$;

ж) между $a^n + b^n + c^n$ и $a^qb^qc^qM$, где $n = 3q + r$ и $M = 1$ при $r = 0$, $M = a + b + c$ при $r = 1$ и $M = ab + bc + ca$ при $r = 2$;

з) от $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_s^n$. Получится *неравенство Мюрхеда* (если рассматривать *все* возможные цепочки).

8. а) Если $at^2 + 2bt + c \geqslant 0$ для любого t, то $b^2 \leqslant ac$.

б) **Неравенство Коши—Буняковского—Шварца.**
$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

в) Равенство достигается только при пропорциональных наборах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (т. е. $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$).

г)* Если P, S, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — периметр, площадь и углы выпуклого n-угольника, то
$$4S\sum_{i=0}^{n} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2} \geqslant P^2.$$

9. а) $x^3 + 2y^{3/2} \geqslant 3xy$.

б) **Неравенство Юнга.** Если $p > 0$ и $q > 0$ рациональны и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

в) **Неравенство Гёльдера.** Если $p > 0$ и $q > 0$ рациональны и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, то
$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leqslant (x_1^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

г) **Неравенство Минковского.** Для $p > 1$ выполнено
$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

д) **Неравенство Караматы.** Если набор $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ мажорирует набор $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ (т. е. $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$ и $x_1 + \ldots + x_k \geqslant \geqslant y_1 + \ldots + y_k$ для любого k) и функция f выпукла, то

$$f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geqslant f(y_1) + \ldots + f(y_n).$$

Зачетные задачи для 8–9 *классов*: 1 а)–г); 2 а); 3 а)–г); 4 а), б); 6 а)–г); 8 а), б). Из них письменно: 2 а); 3 а); 6 г).

Зачетные задачи для 10–11 *классов*: 1 б)–д); 2 а); 3 а); 4 а); 6 б)–д); 7 д)–з). Из них письменно: 2 а); 3 а); 6 г); 7 е).

Контрольные вопросы

I. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны и $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Найдите наименьшее возможное значение величины $x_1 + \ldots + x_n$.

а) 1; б) $n/2$; в) n; г) n^2; д) наименьшего значения не существует.

II. Какие из указанных неравенств справедливы при любых неотрицательных значениях переменных?

а) $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$;

в) $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$;

г) $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2)^2$;

д) $x^3yzt + y^3ztx + z^3txy + t^3xyz \geqslant x^2y^2z^2 + y^2z^2t^2 + z^2t^2x^2 + t^2x^2y^2$.

III. Какие из указанных функций выпуклы вниз?

а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^2$;
г) $f(x) = -x^2$; д) $f(x) = (x-1)^3$; е) $f(x) = \sqrt{x}$;
ж) $f(x) = |x-3|$.

Указания и решения

0. а) *Ответ*: максимальный результат достигается при $x = y = 3$, а минимальный — при $x = 0$ и $y = 6$.

Решение. Легко видеть, что минимальное значение величины xy равно нулю при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Заметим, что

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = 9 - \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Из данного равенства очевидно, что максимальное значение величины xy достигается при $x = y$. То есть, при $x = y = 3$.

б) *Ответ*: минимальный результат достигается при $x = y = 3$, а максимальный — при $x = 0$, $y = 6$ и при $x = 6$, $y = 0$.

Решение. Имеем
$$x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=18+\frac{(x-y)^2}{2}.$$
Откуда получаем ответ.

в) *Ответ*: максимальный результат достигается при $x=y=3$, а минимальный — при $x=0$, $y=6$ и при $x=6$, $y=0$.

Решение. Имеем $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=6+2\sqrt{xy}$. Значит, величина $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ принимает максимальное (минимальное) значение одновременно с величиной xy. По пункту а) получаем ответ.

г) *Ответ*: минимальный результат достигается при $x=y=3$, а максимальный не достигается.

Решение. Имеем $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{6}{xy}$. Значит, по пункту а) минимальный результат достигается при $x=y=3$. Заметим, что $\frac{1}{\frac{1}{N}}+\frac{1}{6-\frac{1}{N}}>N$. Значит, значение выражения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ может быть сколь угодно большим.

д) *Ответ*: максимальный результат достигается при $x=y=3$, а минимальный — при $x=0$, $y=6$ и при $x=6$, $y=0$.

Решение. Имеем
$$\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}=2\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{4}=2\sin\frac{3}{2}\cos\frac{x-y}{4}.$$
Так как $\frac{3}{2}<\pi$, то $\sin\frac{3}{2}>0$. Так как $\cos x\leqslant 1$, то максимальное значение достигается при $x=y=3$.

Также известно, что функция $\cos x$ убывает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. Заметим, что $\frac{|x-y|}{4}\leqslant\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$. Значит, минимальное значение достигается при $x-y=\pm 6$.

Отсюда получаем ответ.

7. з) *Указание.* Формулировку и доказательство можно найти, например, в статье: *Дворянинов С.*, *Ясиновый Э.* Как получаются симметрические неравенства // Квант. 1985. №7. С. 33–36; `http://kvant.mccme.ru/1985/07/kak_poluchayutsya_simmetrichny.htm`.

Неравенства симметрические и циклические (10–11)

М. А. Берштейн

Латинские и буквы обозначают неотрицательные числа.

0. а) Если $a_1+\ldots+a_n=1$, то
$$(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2\leqslant a_1x_1^2+\ldots+a_nx_n^2.$$

б) **Весовое неравенство Коши.** Если $a_1>0,\ldots,a_n>0$ и $a_1+\ldots+a_n=1$, то $a_1x_1+\ldots+a_nx_n\geqslant x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$.

в) Определим среднее степенное порядка m чисел $x_1,\ldots,x_n$ с весами $a_1,\ldots,a_n>0$, где $a_1+\ldots+a_n=1$, как

$$S_m:=\sqrt[m]{a_1x_1^m+\ldots+a_nx_n^m}\quad\text{при}\quad m\neq 0,$$

$$S_0:=x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n},\quad S_{-\infty}:=\min\{x_1,\ldots,x_n\}\quad\text{и}\quad S_{+\infty}:=\max\{x_1,\ldots,x_n\}.$$

Докажите, что $S_a\leqslant S_b$ при $a\leqslant b$.

1. «Локальное неравенство». Для натуральных чисел $n>m$ выполнено $\dfrac{a^n}{b^m}\geqslant\dfrac{na^{n-m}-mb^{n-m}}{n-m}$. Равенство достигается только при $a=b$.

2. а) $\dfrac{a_1^2}{a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n$.

б) $\dfrac{a_1^2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

3. $\dfrac{x_1^2}{y_1}+\dfrac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{y_n}\geqslant\dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$.

4. $\dfrac{a^2}{b(a+c)}+\dfrac{b^2}{c(b+d)}+\dfrac{c^2}{d(c+a)}+\dfrac{d^2}{a(d+b)}\geqslant 2$.

5. а) $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant abc(a+b+c)$.

б) $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\geqslant a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2$.

6. а) $\dfrac{a_1^3}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2^3}{a_2+a_3}+\ldots+\dfrac{a_n^3}{a_n+a_1}\geqslant\dfrac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$.

б) $\dfrac{a}{b+2c+d}+\dfrac{b}{c+2d+a}+\dfrac{c}{d+2a+b}+\dfrac{d}{a+2b+c}\geqslant 1$.

7. Для натуральных a,b,c выполнено

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}\geqslant a^ab^bc^c\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

8. а) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2$.

б) $\dfrac{a+c}{a+b}+\dfrac{b+d}{b+c}+\dfrac{c+a}{c+d}+\dfrac{d+b}{d+a}\geqslant 4$.

9. Если $ab+bc+cd+da=1$, то

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+b+a}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

Зачетные задачи: 0 а)–в); 1; 2 а); 3; 4; 5 а); 6 а); 7; 8 а).

Контрольные вопросы

I. Остается ли справедливым неравенство $S_a \leqslant S_b$ при $a \leqslant b$ и любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если одно из чисел a_i равно нулю?

а) Остается; б) не остается.

II. Остается ли справедливым неравенство $S_a \leqslant S_b$ при $a \leqslant b$ и любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если одно из чисел a_i меньше нуля?

а) Остается; б) не остается.

Указания и комментарии

Неравенство вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ называется *симметрическим*, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не меняется при любой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Неравенство вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ называется *циклическим*, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не меняется при циклической перестановке переменных (которая x_1 переводит в x_2, x_2 в x_3, x_3 в x_4, ..., x_n в x_1). Для решения симметрических и циклических неравенств очень полезны неравенства Мюрхеда и Коши—Буняковского—Шварца, далее обозначаемое КБШ (см. предыдущий раздел).

1. Неравенство выводится из весового неравенства Коши.

2. а) Это простейшее циклическое неравенство имеет разные способы доказательства.

Есть глобальный путь — оценить всю сумму в целом, применяя неравенство 3. Есть локальный путь — оценить каждое слагаемое. Тут можно воспользоваться неравенством $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$ (частный случай «локального неравенства»). Кроме того, неравенство несложно доказывается с помощью транснеравенства.

Идея доказательства с помощью весового неравенства Коши описана в указании к 5 а).

б) *Первый способ.* Можно доказать это неравенство, оценивая каждое слагаемое в левой части по отдельности. Естественно воспользоваться «локальным неравенством» $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$.

Наивный путь — оценить следующим способом: $\dfrac{a_1^2}{a_1 + a_2} \geqslant 2a_1 - (a_1 + a_2)$. Тогда нужно будет доказывать неверное неравенство $0 \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Этот путь не может привести к успеху, так как при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ в неравенстве из условия достигается равенство, а в неравенстве $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$ равенство достигается только при $a = b$.

Значит, надо добиться того, чтобы при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ корень из числителя каждой дроби был равен знаменателю. Домножим неравенство из условия на 4:

$$\frac{4a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{4a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{4a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant 2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Тогда каждое слагаемое слева можно оценить следующим образом: $\dfrac{(2a_1)^2}{a_1+a_2}\geqslant 4a_1-(a_1+a_2)$. Сложив такие оценки для дробей в левой части, получим требуемое неравенство.

Второй способ. Можно доказать это неравенство, оценивая всю сумму в левой части целиком, применяя неравенство 3.

3. Неравенство следует из неравенства КБШ для наборов $\dfrac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{y_2}}, \ldots, \dfrac{x_n}{\sqrt{y_n}}$ и $\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \ldots, \sqrt{y_n}$.

Это неравенство равносильно неравенству КБШ. Но его часто легче применять (например, в неравенствах 2, 4, 6), так как можно обойтись без сложных замен с корнями (см. второе решение задачи 6 б) ниже; в остальных случаях читатель легко восстановит необходимую замену с корнями самостоятельно).

4. Примените неравенство 3.

5. а) Разделите обе части на abc и сведите неравенство к неравенству 3 а).

Другой путь — использовать весовое неравенство Коши. А именно, подберем такие x, y, z, что будет выполняться неравенство

$$xa^3b+yb^3c+zc^3a\geqslant (x+y+z)a^2bc.$$

Для этого надо, чтобы $(a^3b)^x(b^3c)^y(c^3a)^z=(a^2bc)^{x+y+z}$. Получаем систему уравнений

$$3x+z=2(x+y+z),\quad 3y+x=x+y+z,\quad 3z+y=x+y+z.$$

У этой системы есть, например, решение $x=4$, $y=2$, $z=1$. Тогда имеем неравенство

$$4a^3b+2b^3c+c^3a\geqslant 7a^2bc.$$

Аналогично

$$a^3b+4b^3c+2^3a\geqslant 7ab^2c,\quad 2a^3b+b^3c+4^3a\geqslant 7abc^2.$$

Складывая, получаем

$$a^3b+b^3c+c^3a\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2.$$

Из неравенства Мюрхеда следует, что

$$a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b \geqslant 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2.$$

Неравенство 5 а) доказывает, что верно на самом деле большее:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2 \text{ и } a^3c + c^3b + b^3c \geqslant a^2bc + ab^2c + abc^2.$$

б) Аналогично неравенству 5 а). Нужно сначала с помощью весового неравенства Коши доказать, что $4a^3b^2 + 2b^3c^2 + c^3a^2 \geqslant 7a^2b^2c$.

Аналогично неравенству 5 а) неравенство 5 б) усиливает следующий частный случай неравенства Мюрхеда:

$$a^3b^2 + a^3c^2 + b^3a^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + c^3b^2 \geqslant 2a^2b^2c + 2a^2bc^2 + 2ab^2c^2.$$

6. а) *Первый способ.* Можно оценить каждое слагаемое, используя неравенство $\frac{a^3}{b} \geqslant \frac{3a^2 - b^2}{2}$ (частный случай «локального неравенства»). У этого неравенства равенство достигается, когда корень кубический из числителя равен знаменателю. В исходном неравенстве равенство достигается, как обычно, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Домножим всё неравенство на 8, чтобы при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ корень кубический из числителя равнялся знаменателю. После этого оценим каждое слагаемое слева с помощью неравенства $\frac{(2a_1)^3}{a_1 + a_2} \geqslant \frac{12a_1^2 - (a_1 + a_2)^2}{2}$. Тогда все сводится к доказательству неравенства

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1.$$

А это неравенство равносильно такому:

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_n - a_1)^2 \geqslant 0.$$

Второй способ. Оценим сумму в левой части целиком:

$$\frac{a_1^4}{a_1(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4}{a_2(a_2 + a_3)} + \ldots + \frac{a_n^4}{a_n(a_n + a_1)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2}{a_1(a_1 + a_2) + a_2(a_2 + a_3) + \ldots + a_n(a_n + a_1)} \geqslant \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Здесь первое неравенство выполнено по неравенству 3, а второе равносильно верному неравенству

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1$$

(см. конец первого способа).

б) Следует из

$$\frac{a^2}{a(b+2c+d)}+\frac{b^2}{b(c+2d+a)}+\frac{c^2}{c(d+2a+b)}+\frac{d^2}{d(a+2b+c)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+2c+d)+b(c+2d+a)+c(d+2a+b)+d(a+2b+c)}\geqslant 1.$$

Здесь первое неравенство выполнено по неравенству 3, а второе равносильно верному неравенству $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 2ac+2bd$.

Другое решение. Можно обойтись без преобразования условия под неравенство 3, сразу применив неравенство КБШ к наборам

$$\sqrt{a(b+2c+d)},\quad \sqrt{b(c+2d+a)},\quad \sqrt{c(d+2a+b)},\quad \sqrt{d(a+2b+c)}\quad\text{и}$$
$$\sqrt{\frac{a}{(b+2c+d)}},\quad \sqrt{\frac{b}{(c+2d+a)}},\quad \sqrt{\frac{c}{d+2a+b}},\quad \sqrt{\frac{d}{a+2b+c}}.$$

Благодарности

Автор благодарен А. Берштейну, А. Дудко, В. Карайко, К. Кнопу и В. Франку, которые научили его почти всему, что здесь написано.

Геометрическая интерпретация (10–11)

Латинские буквы обозначают неотрицательные числа.

1. а) Если $a,b,c,A,B,C>0$ и $a+A=b+B=c+C=k$, то

$$aB+bC+cA\leqslant k^2.$$

б) Если $0\leqslant x_1,x_2,x_3,x_4\leqslant 1$, то

$$0\leqslant x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+x_3(1-x_4)+x_4(1-x_1)\leqslant 2.$$

2. а) Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}+\sqrt{t^2+16}$$

при условии $x+y+z+t=17$.

б) Найдите наименьший возможный периметр ломаной, проходящей по каждой грани куба.

в) Если $a,b,c>0$, то $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

г) Когда достигается равенство?

д) Пусть $x,y,z>0$ и $\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+zx+x^2=16.\end{cases}$ Найдите $xy+2yz+3zx$.

е) Пусть $C=\sqrt{a^2+b^2}$, $B=\sqrt{a^2+c^2}$, $A=\sqrt{b^2+c^2}$. Тогда

$$\sqrt{(A+B+C)(A+B-C)(A-B+C)(-A+B+C)}= \\ =2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}.$$

ж) $\sqrt{4a^2+b^2+c^2+4ab+4ac-2bc}+\sqrt{4b^2+a^2+c^2+4ab+4bc-2ac}\geqslant$ $\geqslant\sqrt{4c^2+a^2+b^2+4ac+4bc-2ab}$.

3. а) Пусть $a_0=\dfrac{1}{3}$ и $a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}$. Докажите: $\{a_n\}$ монотонна.

б) Из любых четырех чисел можно выбрать два, для которых $0\leqslant\dfrac{x-y}{1+xy}\leqslant 1$.

в) Из любых трех положительных чисел можно выбрать два, для которых $0\leqslant\dfrac{x-y}{1+x+y+2xy}\leqslant\sqrt{2}-1$.

г) $\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\geqslant\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

4. Если $ab=4$ и $c^2+4d^2=4$, то

а) $(a-c)^2+(b-d)^2>1{,}6$;

б)* $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\geqslant\dfrac{4\sqrt{\alpha}-\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ для любого $\alpha>0$.

5. Решите систему

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-5=\dfrac{\cos z}{\sin x\sin y},\\ \operatorname{ctg}y\operatorname{ctg}z+11=\dfrac{\cos x}{\sin y\sin z},\\ \operatorname{ctg}z\operatorname{ctg}x+7=\dfrac{\cos y}{\sin z\sin x}.\end{cases}$$

Зачетные задачи: 1 б); 2 а)–ж); 3 б)–г); 4 а). Из них письменно: 2 д), 3 б), 4 а).

Контрольные вопросы

I. При каком значении x достигается наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-1)^2+4}$?

а) При $x=0$; б) при $x=\dfrac{1}{3}$; в) при $x=\dfrac{1}{2}$; г) при $x=1$;

д) наименьшего значения не существует.

Указания и решения

1. а) Рассмотрим правильный треугольник PQR со стороной k. Отметим так на его сторонах PQ, QR и RP точки K, L и M соответственно, чтобы выполнялись равенства $PK = A$, $QL = B$ и $RM = C$. Тогда легко проверить, что $KQ = a$, $LR = b$ и $MP = c$. Поэтому

$$(aB + bC + cA)\sin 60^\circ = 2(S_{KQL} + S_{LRM} + S_{MPK}) < 2S_{PQR} = k^2 \sin 60^\circ.$$

Здесь неравенство выполнено, поскольку треугольники KQL, LRM и MPK содержатся в треугольнике PQR и не пересекаются между собой. Сокращая на $\sin 60^\circ$, получаем требуемое неравенство.

2. б) *Ответ*: $3\sqrt{2}$. Для оценки снизу используйте то, что сумма длин проекций ломаной на каждую координатную ось не меньше 2.

е) В пространстве возьмите три попарно перпендикулярных отрезка длин a, b, c, выходящих из одной точки.

ж) Сначала докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. Примените это к треугольнику со сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$.

3. а) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

5. Имеется элементарное решение. Красивое же решение получается использованием сферической геометрии на сфере мнимого радиуса (или геометрии Лобачевского). Указание предназначено тем, кто знаком с этими понятиями.

Анализ, оценки, неравенства (11)

В. А. Сендеров

1. Сравните:

а) e^π и π^e;

б)* 2^π и π^2;

в) $\log_3 4$ и $\log_4 5$;

г) $\log_{n-1} n$ и $\log_n(n+1)$, где $n > 2$;

д) $\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 80$ и $2\log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \ldots \cdot \log_3 79$;

е) $\log_3 5$ и $\log_4 6$;

ж) $10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$;

з)* $6^{\sqrt{7}}$ и $7^{\sqrt{6}}$;

и) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{18}$ и $\dfrac{5\pi}{18}$.

2. а) $x\cos x < 0{,}62$ при $0 < x < \pi/2$;

б) $\sin(\pi/18) > 0{,}17$;

в) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$ при $0 < x < \pi/2$;

г)* $\dfrac{1}{\sin^2 x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$ при $0 < x \leqslant \pi/2$;

д) $\cos^{\cos^2 x} x > \sin^{\sin^2 x} x$ и $\cos^{\cos^4 x} x < \sin^{\sin^4 x} x$ при $0 < x < \pi/4$;

е) $2|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant 3|\sin^m x - \cos^m x|$ при $0 < x < \pi/2$ и целых $n > m > 0$.

3. а) Решите в целых положительных числах: $x^y = y^x$.

б) Решите в вещественных числах: $x^y = y^x$.

в)* Для любого целого положительного a уравнение $x^y - y^x = a$ имеет конечное число решений в целых положительных числах.

4. Решите:

а) $\begin{cases} y(x+y)^2 = 9, \\ y(x^3 - y^3) = 7; \end{cases}$

б) $x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leqslant 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}$, где $x > 0$.

5. а) (Международная олимпиада, 1994.) Пусть A', B' и C' — основания биссектрис треугольника ABC, а I — центр вписанной окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \frac{8}{27}.$$

б) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$ при $a, b, c, d > 0$.

в) $x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6 + 3x^4y^4z^4 \geqslant 2(x^3 + y^3 + z^3)x^3y^3z^3$ при любых $x, y, z \in \mathbb{R}$.

6*. Пусть a, b, c — положительные числа, произведение которых равно 1.

а) (Международная олимпиада, 1996.) Докажите, что

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

б) Найдите все $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых для любых a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{a+c} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Контрольные вопросы

I. Какое из данных чисел наибольшее?

а) $\log_2 3$; б) $\log_3 4$; в) $\log_4 5$.

Указания

1. д) $\log_3 4 > \sqrt{\log_3 3 \cdot \log_3 5}, \ldots, \log_3 80 > \sqrt{\log_3 79 \cdot \log_3 81}$.

и) $\dfrac{5\pi}{18} > \dfrac{17}{20}$.

2. а) $x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) < x\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \leqslant \frac{\pi^2}{16}$.

б) Рассмотрите многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является $\sin(\pi/18)$.

в), г) Перепишите неравенство в виде $x < \frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}} x}$, или $\varphi(x) = \sin x\cos^{-\frac{1}{3}} x - x > 0$. Имеем $\varphi'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 > 0$, где $t = \cos^{\frac{2}{3}} x$. Но $2t^3 - 3t^2 + 1 > 0$ при $0 < t < 1$.

4. а) Исключите tx из системы $\begin{cases} t(x+t^2) = 3, \\ t^2(x^3 - t^6) = 7. \end{cases}$

б) Замена $u = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ или $x = \cos 2t$ (в действительности это — один и тот же способ).

6. б) *Ответ*: $\alpha \geqslant 1$ и $\alpha \leqslant -2$.

Анализ для многочленов (9–10)

Известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет

$$\begin{array}{ll} \text{два решения} & \text{при } b^2 > 4ac, \\ \text{одно решение} & \text{при } b^2 = 4ac, \\ \text{ноль решений} & \text{при } b^2 < 4ac. \end{array}$$

Иными словами, количество решений этого уравнения равно $1 + \operatorname{sgn}(b^2 - 4ac)$, где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Способ нахождения количества решений кубического уравнения *без решения самого уравнения* легко вывести напрямую (задача 1 ниже). Однако уже для произвольного уравнения четвертой степени прямой вывод труден (задача 2 ниже). Для решения задач 1 и 2 не требуется знать формул для корней уравнений третьей и четвертой степени (более того, решения, не использующие этих формул, *гораздо проще* вывода указанных формул).

0*. Теорема о промежуточном значении. Пусть P — многочлен. Если $P(a) > 0$ и $P(b) < 0$, то существует такое $c \in [a, b]$, что $P(c) = 0$.

Этой задачей можно пользоваться в дальнейшем без доказательства.

1. а) Уравнение $x^3 + x + q = 0$ имеет ровно одно решение при любом q.

б) Для функции $p(x) = x^3 - 6x + 2$ найдите промежутки возрастания и убывания.

в) Для той же функции найдите наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0, 3]$.

Указание к б) *и* в): изучите знак выражения $\dfrac{p(x_1) - p(x_2)}{x_1 - x_2}$.

г) Для той же функции найдите уравнение касательной в точке $x = 0$.

Указание: сначала напишите уравнение секущей, проходящей через точки $(0, y(0))$ и $(x_0, y(x_0))$.

д) При каких q уравнение $x^3 - x + q = 0$ имеет ровно одно решение?

Указание: аналогично 1 б), в).

е) Как по параметрам p и q определить количество решений уравнения $x^3 + px + q = 0$?

Указание: сведите к предыдущему заменой $y = kx$.

ж) Объясните, как находить количество решений уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ по данным параметрам a, b, c, d.

Указание: используйте предыдущий пункт.

2. Как по параметрам p, q, r, s, t определить количество решений уравнения

а) $x^4 - x + r = 0$?

б) $x^4 + qx + r = 0$?

в) $x^n + qx + r = 0$?

г)** $x^4 \pm x^2 + qx + r = 0$?

Можете попытаться разобрать частные случаи напрямую, однако общий случай вам вряд ли удастся сделать без правила Штурма.

д) $x^4 + px^2 + qx + r = 0$? (Сведите к пункту г).)

е) $px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$? (Сведите к пункту д).)

Правило знаков Декарта. Число положительных решений уравнения $p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0 = 0$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $p_0, \ldots, p_n$, из которой вычеркнуты нули.

Переменой знака в конечной последовательности $b_0, \ldots, b_k$ ненулевых чисел называется такой индекс $i \in \{1, \ldots, k\}$, что числа b_{i-1} и b_i имеют разные знаки.

3. а) Можно ли в правиле знаков Декарта заменить «не превосходит» на «равно» (для многочленов без кратных корней)?

б) Докажите правило знаков Декарта для $n \leqslant 3$.

в)* Как аналогично правилу знаков Декарта оценить количество корней заданного многочлена на заданном промежутке $[a, b]$?

Производной $P'(x)$ многочлена $P(x)$ называется многочлен, полученный подстановкой $y = x$ в многочлен $\dfrac{P(y) - P(x)}{y - x}$ от двух переменных x, y.

Например, уравнение касательной к графику многочлена P в точке a есть $y = P'(a)(x - a) + P(a)$.

4. а) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

б) $(p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0)' = np_n x^{n-1} + (n-1)p_{n-1}x^{n-2} + \ldots + p_1$ (это 0 при $n = 0$).

в) **Формула Лейбница.** $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

5. Пусть дано число a.

а) Для любого числа $\varepsilon > 0$ и многочлена P существует такое $\delta = \delta(P, \varepsilon)$, что $\left|\dfrac{P(a+h) - P(a)}{h} - P'(a)\right| < \varepsilon$ при любом $h \in (-\delta, \delta)$.

б) **Теорема Ферма.** Если a — точка локального экстремума многочлена P, то $P'(a) = 0$.

в) Верно ли обратное?

г) Если многочлен P нестрого возрастает на интервале, то производная P' неотрицательна на этом интервале. Верно ли, что производная положительна при условии строгого возрастания?

д) Если производная P' многочлена P неотрицательна на интервале, то многочлен P нестрого возрастает на этом интервале.

Указание: если не получается, то см. далее.

6. а) **Теорема Ролля.** Между любыми двумя корнями многочлена лежит корень его производной.

б) Докажите правило знаков Декарта для произвольного n.

в) **Теорема Лагранжа.** Для любых a, b и многочлена P существует такое $c \in (a, b)$, что $P'(c) = \dfrac{P(a) - P(b)}{a - b}$.

Контрольные вопросы

I. Сколько действительных решений имеет уравнение $x^3 - 12x + 16$?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4.

II. Сколько положительных решений имеет уравнение $x^5 - 4x^4 + 6x - 2 = 0$?

а) 3; б) 4; в) 5.

III. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что $P(x) - P(y) = (x - y)^2$ тождественно?

а) Существует; б) не существует.

Указания и решения

1. а) Если $x_1 > x_2$, то $x_1^3 + x_1 + q > x_2^3 + x_2 + q$. Поэтому уравнение $x^3 + x + q = 0$ имеет *не более одного* решения.

(Другое доказательство этого факта. Предположим, что уравнение $x^3 + x + q = 0$ имеет два различных решения x_1 и x_2. Тогда $x_1^3 + x_1 + q = 0$ и $x_2^3 + x_2 + q = 0$. Вычитая первое равенство из второго, получим $x_2^3 - x_1^3 + x_2 - x_1 = 0$. Поскольку $x_1 \neq x_2$, то отсюда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = 0$. Выделяя полный квадрат, получим

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = -1.$$

Получаем, что сумма квадратов двух действительных чисел равна -1, что невозможно. Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.)

Докажем теперь, что уравнение $x^3 + x + q = 0$ имеет *хотя бы одно* решение. Если $q = 0$, то $x = 0$ — решение. В дальнейшем будем считать, что $q \neq 0$. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^3 + x + q$. Заметим, что $P(-q) = -q^3$ и $P(q) = q^3 + 2q$. Поэтому на концах отрезка $[-|q|; |q|]$ многочлен $P(x)$ принимает значения разных знаков. По теореме о промежуточном значении найдется такое $c \in [-|q|; |q|]$, что $P(c) = 0$.

Поэтому при любом q уравнение $x^3 + x + q = 0$ имеет *ровно одно* решение.

1. е) *Ответ*: $2 - \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2\right)$.

2. а) *Ответ*: $1 - \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{r}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{4}\right)^4\right)$.

3. в) *Указание.* Используйте правило Декарта и начните с $b = +\infty$.

4. б) *Указание.* Используйте пункт а), $(P+Q)' = P' + Q'$ И $(AP)' = AP'$.

4 в), **5** б). *Указание.* Докажите сначала для $P = x^n$. Докажите, что если утверждение верно для P и Q, то верно и для bP и $P + Q$ (для любого числа b).

6. б) *Указание.* Индукция по n с применением теоремы Ролля.

Число корней многочлена: правило Штурма (10–11)

Настоящий цикл задач посвящен правилу (более научно, алгоритму) Штурма нахождения количества (вещественных) решений (т. е. корней без учета кратности) произвольного уравнения $p_nx^n + \ldots + p_1x + p_0 = 0$ с вещественными коэффициентами $p_n, \ldots, p_1, p_0$.

1. а) Любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

Указание: см. тему «применения комплексных чисел» (гл. 1).

б) Если $P(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n)$ с различными $a_1, \ldots, a_n$, то

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \ldots + \frac{1}{x - a_n}.$$

в) Если $P(x) = (x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_n)^{k_n}$ с различными $a_1, \ldots, a_n$, то

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{k_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{k_n}{x - a_n}.$$

То есть количество корней такого многочлена P (без учета кратности) равно количеству вертикальных асимптот графика функции $\frac{P'}{P}$.

г) Сформулируйте и докажите аналог утверждений б) и в) для многочленов, представленных в виде произведения многочленов 1-й и 2-й степени.

2. а) Если P — многочлен, отличный от константы, то для любого числа a количество решений уравнения $P(x) = a$ конечно.

б) Если $f = P/Q$ — непостоянная дробно-рациональная функция (т. е. отношение многочленов), то для любого числа a количество решений уравнения $f(x) = a$ конечно.

в) Если a — корень многочлена P, то существуют такие натуральное число k и многочлен G, что $P = (x - a)^k G$ и $G(a) \neq 0$.

Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой подъема* функции f, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(t) < y$ при $x - \varepsilon < t < x$ и $f(t) > y$ при $x < t < x + \varepsilon$.

Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *точкой спуска* функции f, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(t) > y$ при $x - \varepsilon < t < x$ и $f(t) < y$ при $x < t < x + \varepsilon$.

Например, для $f(x) = x^2$ точка $x = 1$ есть точка подъема, точка $x = -1$ есть точка спуска, а точка $x = 0$ не есть ни точка подъема, ни точка спуска.

Фиксируем следующие обозначения. Пусть $P = p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ и $Q = q_m x^m + \ldots + q_1 x + q_0$ — многочлены, не имеющие общих непостоянных множителей (т. е. общих множителей положительной степени), $p_n q_m \neq 0$ и $f = P/Q$.

Алгебраическим числом прообразов значения y функции f называется число $a(f, y) = p - s$, где p и s — количества точек подъема и спуска среди прообразов точки y. Например, $a(x^2, 1) = 0$, $a(x^2, 0) = 0$, $a(x^2, -1) = 0$.

3. Найдите $a(f,y)$ для

а) $f(x)=x^3-3x+1$ и $y=-1$;

б) $f(x)=x^3-3x+1$ и $y=100$;

в) $f(x)=x^3-3x+1$ и $y=0$;

г) $f(x)=x^3-3x+1$ и $y=-100$;

д) $f(x)=x^4+2x^3-x^2+4x+1$ и $y=-100$;

е) $f(x)=1/x$ и $y=5$;

ж) $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, y — достаточно большое число.

4. Для многочлена P количество решений уравнения $P(x)=0$ равно $-a(P'/P,y)$ для достаточно большого y.

5. Если $n<m$, то пусть $y\neq 0$, а если $n=m$, то пусть $p_n\neq yq_m$. Тогда число $a(f,y)$ не зависит от выбора y. Поэтому это число будет обозначаться $a(f)$.

Этой задачей можно пользоваться в дальнейшем без доказательства.

6. Найдите $a(f)$ для $f(x)$, равной

а) $\dfrac{1}{x}$;

б) $\dfrac{1}{x^3-3x+1}$;

в) $x+\dfrac{1}{x}$;

г) $-x^2+4x+1+\dfrac{1}{x+2}$;

д) $\dfrac{x^3-x^2+5}{x+2}$;

е) $\dfrac{x+2}{x^3-x^2+5}$.

7. а) Если P и Q — многочлены, то $a\left(\dfrac{Q}{P}\right)=-a\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

б) Если G, P и Q — многочлены, причем $\deg P>\deg Q$, то $a\left(G+\dfrac{Q}{P}\right)=$ $=a(G)-a\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

в) Используя предыдущие задачи, выведите правило нахождения количества решений уравнения $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=0$.

г) Как аналогично найти количество корней заданного многочлена на заданном промежутке $[a,b]$?

д) Как находить количество вещественных корней многочлена с учетом кратности?

Знаменитая нерешенная проблема: как находить количество комплексных корней многочлена (с учетом кратности), лежащих в верхней полуплоскости?

Контрольные вопросы

I. Какой точкой является точка $x=0$ для функции $f(x)=x^3$?

а) Точкой подъема;

б) точкой спуска;

в) ни точкой подъема, ни точкой спуска.

II. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$. Найдите $a(f)$.

а) -2; б) -1; в) 0; г) 1; д) 2.

III. Какое из следующих утверждений верно для произвольного многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, не равного нулю тождественно?

а) Уравнение $P(x)=0$ имеет не меньше действительных решений, чем уравнение $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=1$.

б) Уравнение $P(x)=0$ имеет не больше действительных решений, чем уравнение $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=1$.

в) Ни одно из предыдущих утверждений, вообще говоря, не верно.

Указания и решения

2. *Указание.* Используйте теорему Безу и ее следствия.

а) Предположим, что уравнение $P(x)=a$ имеет бесконечное число решений. Тогда по определению многочлен $Q(x)=P(x)-a$ имеет бесконечно много корней. Согласно задаче 4 а) из пункта «Деление многочленов с остатком», многочлен $Q(x)$ равен нулю тождественно. Значит, многочлен $P(x)$ равен a тождественно, т. е. $P(x)$ — постоянный многочлен.

4. *Указание.* В обозначениях задачи 2 в) верно равенство

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{k}{x-a}+\frac{G'}{G}.$$

7. в) *Ответ.* **Теорема Штурма в формулировке Хованского.** Для многочленов $F(x)$ и $P(x)=p_nx^n+\ldots+p_1x+p_0$, $p_n\neq 0$, обозначим

$$a(P)=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном},\\ 1 & \text{при } n \text{ нечетном и } p_n>0,\\ -1 & \text{при } n \text{ нечетном и } p_n<0\end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{F'}{F}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{q_k}}}$$

с некоторыми многочленами $q_1,\ldots,q_k$. Тогда количество решений уравнения $F(x)=0$ равно

$$a(q_1)-a(q_2)+\ldots+(-1)^{k+1}a(q_k).$$

Конечные суммы и разности (10–11)

Последовательностью сумм последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $b_n = \sum a_n := a_0 + \ldots + a_n$. *Последовательностью разностей* — последовательность $c_n = \Delta a_n := a_{n+1} - a_n$. Например, $\Delta 2^n = 2^n$ и $\sum 2^n = 2^{n+1} - 1$. Обозначим $\Delta^2 a_n := \Delta\Delta a_n$ и т. д.

(Сумма и разность являются аналогами интеграла и производной.)

1. Найдите

а) Δn^k для целого $k \geqslant -1$; б) $\Delta \cos n$; в) $\Delta(n \cdot 2^n)$.

2. Найдите

а) $\sum \sin n$; б) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}$ для любого натурального k.

Указание: начните с $k = 1,\ 2$; разложите дробь на простейшие.

3. а) Найдите $\sum n^k$ для $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Указание: $\Delta n^{k+1} = (k+1)n^k + \ldots$, значит, $n^{k+1} = (k+1)\sum n^k + {} + \sum(\ldots)$.

б) Если $f(n)$ — ненулевой многочлен, то $\sum f(n)$ — многочлен степени на 1 большей, чем $f(n)$.

4. а) Найдите $\Delta^l n^k$ для $l \geqslant k$.

б) Докажите, что k-я разность многочлена k-й степени есть постоянная, а $(k+1)$-я равна 0.

в) Докажите, что $\Delta^l a_n = 0 \iff a_n$ — многочлен от n степени не выше $l - 1$.

г) Выразите $\Delta^l a_n$ через $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+l}$.

д) Найдите $\Delta(n^k \lambda^n)$.

е) **Формулы Лейбница.** $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n$.

ж)* Выведите аналогичную формулу для $\Delta^l(a_n b_n)$.

5. а) Найдите $\sum(n \cdot 2^n)$.

б) Если $f(n)$ — многочлен и λ — число, то $\sum(f(n)\lambda^n) = g(n)\lambda^n + C$, где C — число и $g(n)$ — многочлен, причем $\deg g(n) = \deg f(n)$ при $\lambda \neq 1$ и $\deg g(n) = \deg f(n) + 1$ при $\lambda = 1$.

в) **Преобразование Абеля.** Сформулируйте и докажите формулу для суммирования произведения, которая получается суммированием формулы Лейбница 4 е). (Аналог формулы интегрирования по частям для конечных сумм.)

Контрольные вопросы

I. Какие из указанных равенств могут выполняться при всех n для непостоянной последовательности a_n?

а) $\Delta a_n = 0$; б) $\Delta a_n = 1$; в) $\Delta a_n = a_n$;

г) $\sum a_n = a_n$; д) $\sum \Delta a_n = a_n$; е) $\Delta \sum a_n = a_n$.

II. Чему равно $\Delta n^{1/2}$?

а) $n^{1/2} - (n-1)^{1/2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$; в) $\dfrac{n^{-1/2}}{2}$.

III. Какие из следующих равенств верны для любой последовательности a_n?

а) $\sum \Delta a_n = a_{n+1}$; б) $\Delta \sum a_n = a_{n+1}$; в) $\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$.

Указания и решения

1. а) Для $k > 0$ по определению

$$\Delta n^k = (n+1)^k - n^k = C_k^1 n^{k-1} + C_k^2 n^{k-2} + \ldots + C_k^{k-1} n + 1.$$

Очевидно, $\Delta n^0 = 0$. Для $k = -1$ имеем $\Delta \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)}$.

б) По определению $\Delta \cos n = \cos(n+1) - \cos n = -2\sin\dfrac{1}{2}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$.

в) По определению $\Delta(n2^n) = (n+1)2^{n+1} - n2^n = (n+2)2^n$.

2. а) *Ответ*: $\dfrac{\cos\frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}$.

Решение. По задаче 1 б)

$$\Delta \cos n = -2\sin\frac{1}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad \text{поэтому} \quad \Delta\cos\left(n-\frac{1}{2}\right) = -2\sin\frac{1}{2}\sin n.$$

Применим к обеим частям равенства суммирование $\sum$. Получим

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right) - \cos\frac{1}{2} = \sum\left(-2\sin\frac{1}{2}\sin n\right).$$

Отсюда вытекает ответ.

б) *Ответ*: $\dfrac{1}{(k+2)(k+2)!} + \dfrac{1}{(k+1)!} - \dfrac{1}{(k-1)n(n+1)\ldots(n+k+1)}$.

Решение. Непосредственно проверяется, что для натурального k

$$\Delta\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+(k+1))} = \frac{-(k+2)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}.$$

Применив к обеим частям суммирование $\sum$, получаем

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)} - \frac{1}{(k+2)!} = -(k+2)\sum\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}.$$

Заметим, что m-й член последовательности

$$\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)}$$

равен $(m+1)$-му члену последовательности

$$-\frac{1}{(k+1)!} + \sum \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k+1)} - \frac{1}{(k+2)!} = -(k+2)\Big(-\frac{1}{(k+1)!} + \sum \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}\Big).$$

Разделив обе части на $k+2$, получим ответ.

Линейные рекурренты (10–11)

В этом разделе используется материал предыдущего.

В следующих задачах «найдите» означает «найдите в виде формул, содержащих многочлены от n, a^n с $a>0$ и $\cos(\omega n+\varphi)$».

1. Найдите все последовательности, для которых $a_0=1$, $a_1=3$ и

а) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$;

б) $a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n$;

в) $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$;

г) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

д)* $a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n$.

Указание (*метод вариации постоянной*): найдите решение (без начальных условий) вида $a_n=\lambda^n$ и рассмотрите $b_n=a_n/\lambda^n$, $c_n=b_{n+1}-b_n$.

2. Найдите все такие последовательности, что $a_1=5$ и $a_{n+1}-2a_n$ равно

а) 0; б) 1; в) n; г) 3^n; д)* 2^n; е)* $n\cdot 3^n$.

Указание (*метод вариации постоянной*): $a_n=b_n\lambda^n$.

3. То же с заменой $a_{n+1}-2a_n$ на $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n$.

4. а) Если λ — корень кратности l характеристического уравнения $x^k=p_{k-1}x^{k-1}+\ldots+p_0$, то функция $f(n)\lambda^n$ (где $f(n)$ — произвольный многочлен степени меньше l) является решением соответствующего линейного однородного рекуррентного уравнения $a_{n+k}=p_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots$ $\ldots+p_0a_n$.

б) Сформулируйте и докажите теорему о решениях линейного однородного рекуррентного уравнения n-го порядка.

в) То же для линейного НЕоднородного рекуррентного уравнения $a_{n+k}=p_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+p_0a_n+g(n)$, где $g(n)$ — произведение многочлена на $c_1a^n+c_2\cos(\omega n+\varphi)$.

5. Найдите *производящую функцию*[2)] последовательности чисел Фибоначчи $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

б) То же для чисел Каталана: $c_0 = 1$, $c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

в) Выведите из б) явную формулу для чисел Каталана (найдите сначала явно коэффициенты ряда $\sqrt{1-4t}$).

6. Докажите правила дифференцирования формальных степенных рядов:

а) $(f+g)' = f' + g'$;

б) $(fg)' = f'g + fg'$;

в) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;

г) $(f(g))' = f'(g)g'$.

Задача предназначена тем, кто понимает ее условие

7. Пусть $a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_0 a_n$ $(p_0 \neq 0)$ при всех $n \geqslant 0$.

а) Производящая функция последовательности a_n имеет вид $P(x)/Q(x)$, где $Q(x) = 1 - p_{k-1}x - \ldots - p_0 x^k$ и $P(x)$ — многочлен степени не выше $k-1$.

б) Если $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} (1-\lambda_i x)^{k_i}$, то найдутся такие коэффициенты c_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, что $a_n = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant k_i} c_{ij} n^{j-1} \lambda_i^n$.

в) Если a_n, b_n удовлетворяют некоторым линейным рекуррентам, то и $a_n b_n$ удовлетворяет некоторой линейной реккурренте.

8. Найдите все такие дифференцируемые функции, что $y(0) = 1$ и $y' - 2y$ равно

а) 0; б) 1; в) x; г) e^x; д)* e^{2x}; е)* xe^x.

Указание (метод вариации постоянной): $y = ze^{\lambda x}$.

9. То же для $y' - 2y \to y'' - 5y' + 6y$.

10*. а) Если λ — корень кратности l характеристического уравнения $x^k = p_{k-1}x^{k-1} + \ldots + p_0$, то функция $f(x)e^{\lambda x}$ (где $f(x)$ — произвольный многочлен степени меньше l) является решением соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(k)} = p_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + p_0 y$.

б) Сформулируйте и докажите теорему о решениях линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

в) То же для линейного НЕоднородного дифференциального уравнения.

[2)] Определение см., например, в книге: *Ландо С. К.* Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007.

Контрольные вопросы

I. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$?

а) $a_n = 5n + 3$; б) $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; в) $a_n = \cos 2n$.

II. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$?

а) $a_n = 5n + 3$; б) $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; в) $a_n = \cos 2n$.

III. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+3} + (\cos^2 1 - 2)a_{n+2} - \cos 2 \cdot a_{n+1} + \cos^2 1 \cdot a_n = 0$?

а) $a_n = 5n + 3$; б) $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; в) $a_n = \cos 2n$.

Конкретная теория пределов (11)

Задачи этого раздела интересны не только как простейший способ разобраться в теории пределов. Похожие задачи о конкретных, хотя и грубых, оценках часто возникают и на олимпиадах, и в прикладной математике, и в теоретической математике.

В решении этих задач нельзя пользоваться функциями $\sqrt[n]{x}$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$ etc. без определения этих функций (поскольку для их определения— например, для доказательства существования такого x, что $x^2 = 2$,—фактически нужно эти задачи решить). Исключение: если некоторая функция используется в условии, то ее можно использовать и в решении. Можно пользоваться без доказательства неравенствами и их свойствами.

1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если a_n равно

а) $\sqrt{n}$; б) $n^2 - 3n + 5$; в) $1{,}02^n$; г) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

2. Неравенство Бернулли. $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ для $x \geqslant -1$ и

а) целого $n \geqslant 0$; б) рационального $n \geqslant 1$; в) действительного $n \geqslant 1$.

3. Найдите хотя бы одну пару таких a и N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $|a_n - a| < 10^{-8}$, если a_n равно

а) $\dfrac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$;

б) $n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$;

в) $n\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$;

г) $0{,}99^n$;

д) $\sqrt[n]{2}$;

е) $n^9/2^n$;

ж)* $(1+1/n)^n$;

з)* $n(\sqrt[n]{2}-1)$;

и) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

к)* $\dfrac{1}{1\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$;

л)* $\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$;

м)* $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$;

н)* $a_0=1$ и $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(a_n+\dfrac{2}{a_n}\Big)$.

4. Найдите хотя бы одну пару таких a и $\delta>0$, чтобы для любого x, $0<|x|<\delta$, было выполнено $|f(x)-a|<3\cdot 10^{-9}$, если $f(x)$ равно

а) x^3; б) 3^x; в) $\sin x$; г) $\dfrac{\sin x}{x}$;

д) $\dfrac{\sqrt{1+x^5}}{\cos x-2}$; е) $\dfrac{1+\sin x}{x^3-1}$; ж) $(1+1/x)^x$.

Указания

3. Число a не обязано быть равно *пределу*.

ж) Докажите, что

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n<\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}<\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+2}<\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}.$$

4. д), е) Если $|f(x)-a|<\varepsilon/2$ при $x\in(-\delta_1,\delta_1)$ и $|g(x)-b|<\varepsilon/2$ при $x\in(-\delta_2,\delta_2)$, то $|f(x)+g(x)-a-b|<\varepsilon$ при $x\in(-\min\{\delta_1,\delta_2\},\min\{\delta_1,\delta_2\})$. Аналогичные утверждения справедливы с заменой суммы на разность, произведение и частное.

Методы суммирования рядов (11)

Ньютон считал понятия производной и интеграла не своим главным достижением, а лишь естественным языком для записи дифференциальных уравнений, которыми выражаются законы природы. Своим главным достижением в анализе Ньютон считал метод решения дифференциальных уравнений с помощью (степенных) рядов. С них мы и начнем (а остальные использованные в этом абзаце понятия определим потом).

В этом разделе считается, что $a_n\geqslant 0$ и $b_n\geqslant 0$ (кроме задач 5, 6 и 7).

Число A называется *суммой* ряда $\sum a_n$, если

1) $A \geqslant a_1 + \ldots + a_n$ для любого n и

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует n, для которого $A < a_1 + \ldots + a_n + \varepsilon$.

Обозначение: $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, сокращенно $A = \sum a_n$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. Число $A_n := a_1 + \ldots + a_n$ называется *n-й частичной суммой* ряда $\sum a_n$.

Здесь не будет необходима строгая теория действительных чисел[3]. Можно пользоваться без доказательства (только) алгебраическими свойствами действительных чисел и принципом Вейерштрасса: *ряд $\{a_n\}$ с положительными членами сходится, если последовательность $a_1 + \ldots + a_n$ ограничена* (т. е. если существует число A со свойством (1)). Этот принцип можно «доказать», используя десятичную запись.

В следующих задачах *равенства* с рядами являются *утверждениями*, которые подробно формулируются так: если правая часть существует, то левая тоже существует и равна правой. Выражение «для любого n» часто опускается.

0. а) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$;

б) $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_k + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$.

1. Явное вычисление частичной суммы (например, через разложение на простейшие дроби). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

[3] С ней можно ознакомиться, например, по книге: *Зорич В. А.* Математический анализ. Том 1.

2. Составление уравнений. Сумму $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ можно найти из уравнения $1 + \frac{S}{2} = S$ (если доказать, что сумма существует). Найдите

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

3. Перегруппировка слагаемых. Сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots = \\ = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots\right) + \ldots$$

а) Найдите сумму ряда $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ (выяснив, при каких x он сходится).

б) Если $\sigma\colon \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ — перестановка (т. е. взаимно однозначное соответствие), то $\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$.

в) Найдите $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

г) Придумайте ряд (в котором не обязательно $a_n > 0$), для которого б) неверно.

4. Умножение рядов. Сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \\ = 1 \cdot 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \ldots$$

а) Найдите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$.

б) $\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\right) = 1$. (Определение суммы знакопеременного ряда дайте сами или посмотрите ниже.)

в) $\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\right)^2 = \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \ldots + \frac{2^n}{n!} + \ldots\right)$.

г) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$.

д) Верно ли г) без условия $a_n, b_n > 0$?

Число A называется *суммой* ряда $\sum a_n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство $|a_1 + \ldots + a_n - A| < \varepsilon$.

5. Преобразование Абеля. Сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ можно найти и из равенства

$$1\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+2\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)+3\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\Big)+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2}(2-1)+\frac{1}{4}(3-2)+\frac{1}{8}(4-3)+\ldots.$$

а)* Найдите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2^n}$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{m} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-a_mb_m-\sum\limits_{n=1}^{m} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$ (что получается при $m=1$)?

в) Если $b_n\leqslant b_{n-1}$ и последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю (тогда $a_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$), то

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n).$$

Сформулируйте самостоятельно условия, при которых верно это утверждение.

6. Сумма абсолютно сходящегося ряда (т. е. ряда, для которого $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится) не зависит от перестановки членов этого ряда.

7. Измените порядок членов ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

чтобы его сумма стала равна

а) ∞; б) 7.

8. а) Представьте z^3+3z^2-2z-1 в виде многочлена от $y=z+1$.

б) Найдите такие числа a_n, чтобы для любого z, $|z|<1$, получилось $\dfrac{1}{z^2+2z+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$.

9*. Для знакомых с производной.

а) Найдите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, используя равенство $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'=\sum\limits_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$ для $|x|<1$.

б) Найдите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^nn^k$ для $|x|<1$ и целых k.

10*. Сумма ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = 1$ и $x = 2$ и гиперболой $y = 1/x$.

Зачетные задачи: 1 а); 2 а); 3 а), б), г); 4 а), в), г); 5 б), в); 6; 7 а); 8 б). Из них письменно: 3 б); 4 г).

Ответы и указания

1. а) 1; б) 3/4; в) 1/6; г) 1/4; д) 5/4.

2. а) 2.

3. а) $1/(1-x)^2$ при $0 \leqslant x < 1$, расходится при $x > 1$.
б) 3/4.
в) $(k+1)/2^{k-1}$.
г) $a_{2k-1} = 1/k$, $a_{2k} = -1/k$.

4. а) 8.

8. б) Разложите $\frac{1}{z^2 + 2z + 2} = \frac{1}{(z+1)^2 + 1}$ по степеням $z + 1$ и переразложите по степеням z.

Сходимость рядов (11)

1. Какие из следующих рядов сходятся (в зависимости от параметра $s > 0$, если он задан в условии)?

а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{k}{k+1} + \ldots$

б) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[k]{k}} + \ldots$

в) $\frac{1}{2-1} + \frac{1}{2^2-1} + \ldots + \frac{1}{2^n-1} + \ldots$

г) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$

д) $2^1 + 1^2 + \ldots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \ldots$

е) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots$

ж) $1 + \frac{1}{2\sqrt[s]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[s]{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt[s]{n}} + \ldots$ (s целое).

з) $1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$

и)* $\frac{1}{2(\log_2 2)^s} + \ldots + \frac{1}{n(\log_2 n)^s} + \ldots$

к)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. Через $a!!$ обозначается произведение всех чисел от 1 до a, имеющих ту же четность, что и a.

Указание: если не получается, то см. далее.

2. В этой задаче считается, что $a_n \geqslant 0$ и $b_n \geqslant 0$.

а) **Необходимое условие сходимости.** Если ряд $\sum a_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство $a_n < \varepsilon$.

б) **Признак сравнения.** Если ряд $\sum a_n$ сходится и $b_n \leqslant a_n$, то ряд $\sum b_n$ тоже сходится.

в) **Признак Даламбера.** Если $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $a_{n+1}/a_n < 1 - \varepsilon$ для любого $n > N$, то ряд $\sum a_n$ сходится.

г) **Признак Коши.** Если $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и $\sqrt[n]{a_n} < 1 - \varepsilon$ для любого $n > N$, то ряд $\sum a_n$ сходится.

3. Какие из утверждений 3 б), 4 г), 5 в) предыдущего раздела верны без предположения о положительности слагаемых? Как подправить те, которые неверны?

4. Сходится ли ряд

а) $\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n!} + \ldots$;

б) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \ldots$;

в) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \ldots$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$;

д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{\pi n}{3}}{n}$;

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$?

Указание: если не получается, то см. далее.

5. а) Ряды

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \ldots$$

и

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) - \ldots$$

сходятся.

б) Суммы рядов из а) равны (обозначим эти суммы через S).

в) Для любого $n > 1000$ имеем

$$S - 0{,}01 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} < S + 0{,}01.$$

г) Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ сходится и его сумма равна S.

6. а) **Признак Лейбница.** Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает к нулю (т. е. $a_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

б) **Признак Абеля.** Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает, а частичные суммы ряда $\sum b_n$ ограничены, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

7. Для каких $z \in \mathbb{R}$ сходится ряд?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$; г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, где $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ (определите понятие $\varlimsup$; выясните только для $|z| \neq R$).

8. Для каких $z \in \mathbb{C}$ сходятся ряды из предыдущей задачи?

Указания

1. е) Используйте равенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}.$$

Приложение (11)

Некоторые используемые определения были известны большинству учеников, напомнены на занятиях и здесь не приводятся [4)].

1. Нарисуйте векторные поля и интегральные кривые, соответствующие следующим системам дифференциальных уравнений, а также найдите формулы для общих решений.

[4)] См. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1966.

а) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y. \end{cases}$

2. а)–д) Найдите линейное (аффинное) преобразование, которое переводит фазовый портрет системы из задачи 1 в фазовый портрет линейного векторного поля с одной из матриц $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$.

е)* Фазовый портрет любого линейного векторного поля на плоскости (или, что то же самое, линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями) переводится некоторым линейным преобразованием в фазовый портрет одного из вышеуказанных примеров.

ж)* Ни один из этих примеров не переводится ни в какой другой линейным преобразованием.

Сдвигом последовательности $\{a_n\}$ называется последовательность $b_n = a_{n+1}$ (обозначение: $b_n = Ta_n$). Очевидно, сдвиг является линейным оператором на пространстве последовательностей. Рассмотрим также единичный оператор $E\{a_n\} = \{a_n\}$. Тогда $\Delta = T - E$.

На множестве операторов (действующих на пространстве последовательностей) естественно определяются операции суммы и умножения на число. Очевидно, что множество операторов с этими операциями является линейным пространством над $\mathbb{R}$. *Умножением* операторов называется их композиция.

3. а) $\Delta \sum = T$. Чему равен $\sum \Delta$? Приведите другой пример некоммутативности умножения операторов.

б) Является ли множество операторов с операцией умножения группой?

в) Справедлив ли закон ассоциативности для умножения операторов друг на друга и на числа?

г) Выполняется ли дистрибутивность для сложения и умножения операторов?

Итак, несмотря на некоммутативность умножения многочлен от оператора определен. Поэтому рекуррентное уравнение

$$c_k a_{n+k} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_0 = 0$$

можно записать в виде

$$(c_k T^k + \ldots + c_1 T + c_0 E)\{a_n\} = 0.$$

4. а) Пусть характеристическое уравнение рекуррентного уравнения порядка l имеет корень λ кратности l. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении этого рекуррентного уравнения.

Указание: $b_n = \dfrac{a_n}{\lambda^n}$.

5. а) Если $P(T)(T-\lambda E)^l a_n = 0$ для многочлена P, то для последовательности $b_n = \dfrac{a_n}{\lambda^n}$ имеем $\Delta^l P(T) b_n = 0$.

б) Решите уравнение $\Delta^{l-1} b_n = \lambda^n n^k$.

6. а) Если λ — корень многочлена P кратности l (у P могут быть и другие корни), то $P(T)[f(n)\lambda^n] = 0$ для любого многочлена $f(n)$ степени $< l$.

б)* Для любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ и $l_1, \ldots, l_k$ последовательности $n^i \lambda_j^n$ ($j = 1, \ldots, k$; $i = 0, \ldots, l_j$) линейно независимы.

Указание: рассмотрите $\lim\limits_{n\to\infty}$.

в) Выведите из а) и б) теорему о решениях линейного однородного рекуррентного уравнения.

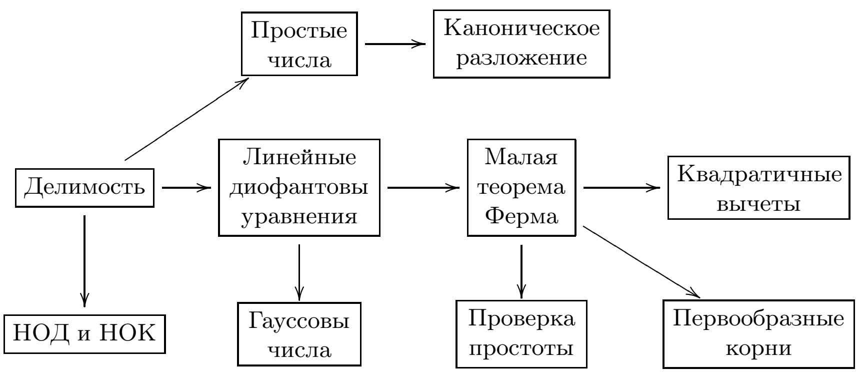
Г Л А В А 3

МИНИКУРС ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ [1)]

А. Б. Скопенков

Первые четыре пункта приводятся для полноты, чтобы миникурс можно было изучать «с нуля» (из них на занятиях Школ использовались только наиболее сложные задачи).

Схема зависимости пунктов следующая (если в одном пункте используются только определения из другого, то эти пункты не считаются зависимыми):



Для успешного решения задач по теории чисел настоятельно рекомендуем проработать книгу: *Виноградов И. М.* Основы теории чисел (после изучения настоящего миникурса или параллельно с ним).

Латинскими буквами обозначаются *целые* числа.

Делимость и деление с остатком (7–8)

Число a *делится* на ненулевое число b, если существует такое k, что $a = kb$. Обозначение: $b|a$. В этом случае b называется *делителем* числа a.

---

1) Отдельные разделы написаны А. Я. Канель-Беловым, А. И. Галочкиным, А. А. Засориным, С. В. Конягиным, Д. А. Пермяковым и И. Н. Шнурниковым. Многие решения написаны М. В. Прасоловым под редакцией автора. В разделе «Малая теорема Ферма» использованы задачи от Д. А. Пермякова, а в разделе «Первообразные корни» — от А. Я. Канеля-Белова и М. В. Прасолова.

1. Какие из следующих утверждений верны для любых n, a, b?

а) $2|(n^2 - n)$;

б) $4|(n^4 - n)$;

в) если $c|a$ и $c|b$, то $c|(a + b)$;

г) если $b|a$, то $bc|ac$ для любого c;

д) если $bc|ac$ для некоторого c, то $b|a$.

2. а) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 4, 5, 10, 3, 9, 11.

б) Делится ли число $11\dots1$ из 1993 единиц на 111111?

в) Число $1\dots1$ (2001 единиц) делится на 37.

3. а) Если k не кратно ни 2, ни 3, ни 5, то $k^4 - 1$ кратно 240.

б) Если $a + b + c$ делится на 30, то и $a^5 + b^5 + c^5$ делится на 30.

4. Пусть a делится на 2 и не делится на 4. Докажите, что число четных делителей a равно числу нечетных делителей a.

5. а) Для любых a и b существует такое n, что $nb \leqslant a < (n + 1)b$.

б) **Теорема о делении с остатком.** Для любых чисел a и b ($b \neq 0$) существуют и единственны такие числа q и r, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < |b|$.

Эти числа называются *частным* и *остатком* от деления a на b.

6. а) Найдите частные и остатки от деления числа 1996 на -17, -17 на 4 и $n^2 + n + 1$ на $n + 1$ (для каждого целого n).

б) Найдите все возможные частные и все возможные остатки от деления числа 57.

в) Найдите последнюю цифру числа $1997^{1997^{1997}}$.

Зачетные задачи: 1 б) г) д); 2 б), в); 3 а), б); 4; 5 а), б); 6 а)–в). Из них письменно: 2 в), 4.

Контрольные вопросы

I. Сколько делителей у числа 4?

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 7.

II. Какие из следующих утверждений верны для любых чисел a, b, c, n?

а) $6|n^3 - n$;

б) $3 \nmid n^2 + 1$;

в) если $b|a$, то $|b| \leqslant |a|$;

г) если $a|b$ и $b|a$, то $|a| = |b|$;

д) если $c|ab$, то $c|a$ или $c|b$.

III. Остаток от деления -24 на -10 равен:
а) 4; б) -4; в) 6; г) -6.

Указания и решения

1. *Ответы*: а), в)–д) да; б) нет.

а) Имеем $n^2 - n = n(n-1)$. Четные числа идут через один. Поэтому одно из чисел n или $n-1$ четное. Значит, их произведение $n^2 - n$ четное.

б) $4 \nmid (2^4 - 2) = 14$.

в) Если $a = kc$ и $b = mc$, то $a + b = (k+m)c$.

г) Если $a = kb$, то $ac = k(bc)$.

д) Если $ac = kbc$, то $c(a - kb) = 0$. Так как $bc \neq 0$, то $c \neq 0$. Значит, $a = kb$.

2. а) Можно считать, что $n > 0$. Тогда $n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$ для некоторых целых $0 \leqslant a_i \leqslant 9$.

Признак делимости на 2. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра этого числа делится на 2.

Доказательство. Заметим, что число $n - a_0$ всегда четно. Предположим, что $2|a_0$. Если число делит каждое слагаемое, то оно делит сумму. Тогда $2|n$. И наоборот, если $2|n$, то $2|a_0$. $\square$

Признак делимости на 4. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя последними цифрами этого числа, делится на 4.

Доказательство. Заметим, что число $(n - 10a_1 - a_0)$ всегда делится на 4. Предположим, что число $a_0 + 10a_1$, образованное двумя последними цифрами данного числа, делится на 4. Тогда $4|n$. И наоборот, если $4|n$, то $4|(a_0 + 10a_1)$. $\square$

Признак делимости на 5. Если последняя цифра числа 5 или 0, то число делится на 5.

Докажите аналогично доказательству признака делимости на 2.

Признак делимости на 10. Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10.

Докажите аналогично доказательству признака делимости на 2.

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа делится на 3, то само число делится на 3.

Доказательство. При любом m число

$$10^m - 1 = (10-1)(10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1)$$

делится на 3. Вычтем сумму цифр из числа n и сгруппируем слагаемые:

$$n - a_m - a_{m-1} - \ldots - a_1 - a_0 =$$
$$= (10^m - 1)a_m + (10^{m-1} - 1)a_{m-1} + \ldots + (10 - 1)a_1 + (1 - 1)a_0.$$

Как мы показали ранее, каждое слагаемое в последней сумме делится на 3. Отсюда вытекает утверждение задачи. □

Признак делимости на 9. Если сумма цифр числа делится на 9, то само число делится на 9.

Докажите аналогично доказательству признака делимости на 3.

Признак делимости на 11. Вычтем из суммы всех цифр числа n, стоящих на четных местах, сумму всех цифр на нечетных местах. Если полученное число делится на 11, то и само число n делится на 11.

Доказательство. Докажем сначала, что число $10^m - (-1)^m$ при любом m делится на 11. Для нечетного m число

$$10^m + 1 = (10 + 1)(10^{m-1} - 10^{m-2} + 10^{m-3} - \ldots - 10 + 1)$$

делится на 11. А для четного положительного m число

$$10^m - 1 = (10^{m-1} + 1) \cdot 10 - 11$$

делится на 11.

Рассмотрим разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах. Вычтем ее из числа n и сгруппируем слагаемые:

$$n - (-1)^m a_m - (-1)^{m-1} a_{m-1} + \ldots + a_1 - a_0 = (10^m + (-1)^m)a_m +$$
$$+ (10^{m-1} + (-1)^{m-1})a_{m-1} + \ldots + (10 + 1)a_1 + (1 - 1)a_0.$$

Так как каждое слагаемое в последней сумме делится на 11, то сумма делится на 11. Откуда вытекает утверждение. □

НОД и НОК (7–8)

Наибольшее число, делящее и a, и b, называется *наибольшим общим делителем* (a, b) чисел a и b (предполагается, что числа a и b не равны нулю одновременно).

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $(a, b) = 1$.

1. Найдите все возможные значения

а) $(n, 12)$; б) $(n, n + 1)$; в) $(n, n + 6)$;

г) $(2n + 3, 7n + 6)$; д) $(n^2, n + 1)$.

2. а) Для любых двух чисел a и b наибольший общий делитель (a, b) существует и единствен.

б) $(a, b) = b$ тогда и только тогда, когда a делится на b.

в) (a, b) делится на любой общий делитель a и b.

г) $(ca, cb) = c(a, b)$ при $c > 0$.

д) $\dfrac{a}{(a, b)}$ и $\dfrac{b}{(a, b)}$ взаимно просты.

3. Бинарный алгоритм. а) Используя равенства $(2m, 2n) = 2(m, n)$, $(2m + 1, 2n) = (2m + 1, n)$ и $(2m + 1, 2n + 1) = (2m + 1, m - n)$, постройте алгоритм нахождения НОД.

б) Найдите $(2^{2^k} + 1, 2^{2^l} + 1)$.

4. Если дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима, то и дробь $\dfrac{a + b}{ab}$ несократима.

Наименьшее положительное число, делящееся на a и на b, называется *наименьшим общим кратным* $[a, b]$ чисел a и b (предполагается, что числа a и b не равны 0).

5. Найдите: а) $[192, 270]$; б) $[a^2 - ab + b^2, ab]$.

6. а) Для любых двух чисел a и b существует $[a, b]$ и единственно.

б) $[a, b] = a$ тогда и только тогда, когда a делится на b.

в) Любое общее кратное a и b делится на $[a, b]$.

г) $[ca, cb] = c[a, b]$ при $c > 0$.

д) $\dfrac{[a, b]}{a}$ и $\dfrac{[a, b]}{b}$ взаимно просты.

Зачетные задачи: 1 г), д); 2 в)–д); 3 а), б); 4; 5 а), б); 6 а)–г). Из них письменно: 3 а), 6 в).

Контрольные вопросы

I. $(-24; -10)$ равно

а) 4; б) -4; в) 2; г) -2.

II. $[15; -10]$ равно

а) 30; б) -30; в) 5; г) -5.

III. Какие из следующих утверждений верны для любых чисел a, b?

а) Дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима тогда и только тогда, когда $(a, b) = 1$;

б) Дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{a - b}{ab}$ несократима;

в) Дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{a - b}{a + b}$ несократима.

Указания и решения

1. *Ответы*:

а) 1, 2, 3, 4, 6, 12. б) 1. в) 1, 2, 3, 6. г) 1, 3, 9. д) 1.

Решение. а) Число $(n, 12)$ является положительным делителем числа 12. Докажем, что все положительные делители числа 12 удовлетворяют условию. Пусть $d|12$. У числа d нет делителей, больших его самого. Значит, $(d, 12) = d$.

б) Пусть $d|n$, $d|(n+1)$ и $d > 0$. Тогда $d|(n+1-n) = 1$. То есть $d = 1$.

в) Заметим, что множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел a и $a \pm b$. Действительно, если $d|a$ и $d|b$, то $d|(a \pm b)$. Наоборот, если $d|(a \pm b)$ и $d|a$, то $d|(a \pm b - a) = \pm b$.

Пользуясь этим утверждением, получаем $(n, n+6) = (6, n)$. Аналогично пункту а) число $(6, n)$ пробегает все положительные делители числа 6.

г) Пользуясь утверждением из пункта в), получим цепочку равенств:

$$(2n+3, 7n+6) = (2n+3, 5n+3) = (2n+3, 3n) = (2n+3, n-3) = \\ = (n+6, n-3) = (n+6, -9) = (n+6, 9).$$

Последнее выражение пробегает все положительные делители числа 9.

д) Пусть $d > 0$ — общий делитель чисел n^2 и $n+1$. Тогда

$$d|(n+1)(n-1) = n^2 - 1.$$

Значит, $d|(n^2 - (n^2 - 1)) = 1$. То есть $d = \pm 1$.

2. а) Делитель числа не превосходит его по модулю. Значит, количество общих делителей чисел a и b конечно. А среди них есть наибольший.

б) Пусть $b|a$. Так как делитель числа не превосходит его по модулю, то $(a, b) = b$. Пусть теперь $(a, b) = b$. Тогда $b|a$ по определению.

в) Пусть $a > b \geqslant 0$. Как было замечено в решении задачи 1с, общие делители чисел a и b совпадают с общими делителями чисел $a \pm b$ и b.

Рассмотрим пару чисел a и b. Далее будем действовать по следующему алгоритму: если $m > n$, то пару чисел m и n будем заменять на пару чисел $m - n$ и n; если $m < n$, то меняем их местами.

Полученные на k-м шаге числа m_k и n_k положительные. Общие делители чисел m_k и n_k совпадают с общими делителями чисел $m_k - n_k$ и n_k, поэтому все общие делители (и в частности НОД) у всех получаемых пар одинаковы.

За два подряд идущих шага максимум чисел в паре уменьшается. Значит, на некотором шаге максимум чисел в паре достигнет своего минимального значения и алгоритм закончит работу. Это означает, что на некотором шаге получится пара с равными числами $m_N = n_N$. Их НОД равен (a,b), значит $m_N = n_N = (a,b)$. Следовательно, делители числа (a,b) совпадают с общими делителями чисел a и b.

г) Число $c(a,b)$ является общим делителем чисел ca и cb.

Покажем, что $(ca,cb)|c(a,b)$, откуда будет следовать утверждение. Очевидно, что $c|ca$ и $c|cb$. Значит, по пункту в) имеем $c|(ca,cb)$. По определению делимости $(ca,cb) = ck$ для некоторого целого числа k. НОД двух чисел делит их, значит, $(ck)|(ca)$ и $(ck)|(cb)$. Получаем $k|a$ и $k|b$. Значит, по прошлому пункту получаем $k|(a,b)$. Домножаем на c: $(ca,cb)|c(a,b)$.

д) Если d — общий делитель чисел $\frac{a}{(a,b)}$ и $\frac{b}{(a,b)}$, то $d(a,b)$ — общий делитель чисел a и b. Значит, по пункту в) $d(a,b)|(a,b)$. Получаем, что $d = \pm 1$.

Простые числа (8)

Число $p > 1$ называется *простым*, если оно не имеет положительных делителей, кроме p и 1.

1. а) Найдите все такие p, что p, $p+2$, $p+4$ простые.

б) Если $111\ldots11$ (n единиц) простое, то n простое. Обратное неверно.

в)* Для любого n существует m, такое что все числа $m+1, \ldots, m+n$ составные.

2. (а) Если $a > 1$ не делится ни на одно простое p, такое что $p \leqslant \sqrt{a}$, то a простое.

б) **Решето Эратосфена.** Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — все простые числа от 1 до n. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ вычеркнем все числа, делящиеся на p_i и большие p_i. Тогда все невычеркнутые числа, меньшие n^2, — простые.

в) Выпишите все простые числа от 1 до 200.

3. а) Простых чисел бесконечно много.

б)* Простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

Теорема Дирихле. *Если $a, b > 0$ не имеют общих делителей, отличных от ± 1, то простых чисел вида $ak+b$ бесконечно много.* (Для доказательства этой теоремы нужна теория, не излагаемая здесь.)

4. Обозначим n-е в порядке возрастания простое число через p_n.

а) $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

б) $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_n - 1$ при $n \geqslant 2$.

в) Между $p_1 + \ldots + p_n$ и $p_1 + \ldots + p_{n+1}$ всегда есть точный квадрат.

5. а) Пусть p простое и $n < p < 2n$. Тогда C_{2n}^n делится на p.

б) $2^{2p_{n+1}} > p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

6. а) Верно ли, что для любого n число $n^2 + n + 41$ простое?

б) Для любого многочлена f существует такое n, что $f(n)$ составное, т. е. непростое, отличное от ± 1.

7. Найдите все такие простые числа p, q, r, что $p^q + q^p = r$.

Зачетные задачи: 2 а)–в); 3 а); 4 а)–в); 5 а), б); 6 а), б); 7. Из них письменно: 2 а); 4 а).

Контрольные вопросы

I. Каких чисел больше среди чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$?

а) Простых; б) непростых; в) простых и непростых чисел поровну.

II. Какие из следующих утверждений верны для любого числа n?

а) $p_n \geqslant 2n - 5$; б) $p_n \leqslant 2n + 5$; в) $p_n \leqslant 2^{2^n}$.

Указания и решения

1. а) *Ответ*: $p = 3$.

Решение. У чисел p, $p + 2$, $p + 4$ разные остатки от деления на 3. Значит, одно из них делится на 3. Это число простое, значит, оно равно 3. Единица не является простым числом, следовательно, $p + 2 \neq 3$. Получаем $p = 3$.

Число $p = 3$ подходит: числа 3, 5, 7 являются простыми.

б) Докажем, что если число n составное, то число $11\ldots1$ (n единиц) тоже составное. Заметим, что $11\ldots1 = \dfrac{10^n - 1}{9}$. Пусть $n = ab$, где a и b не равны 1. Имеем

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \ldots + x + 1).$$

Подставляя $x = 10^a$, получаем требуемое.

Обратное утверждение неверно: $111 = 37 \cdot 3$.

Каноническое разложение (8)

1. а) Любое натуральное n раскладывается в произведение простых чисел.

б) **Каноническое разложение.** Для любого натурального n найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_m$ и натуральные $a_1, \ldots, a_m$, что $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$.

в)* **Основная теорема арифметики.** Разложение натурального числа в произведение простых единственно с точностью до порядка сомножителей.

Указание. Можно использовать леммы из «Линейных диофантовых уравнений».

2. Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$ — каноническое разложение. Найдите

а) количество $\alpha(n)$ натуральных делителей числа n;

б) сумму $s(n)$ натуральных делителей числа n;

в) $\sum\limits_{d|n} \alpha(d)$, где сумма ведется по всем натуральным делителям числа n.

Указание. Решайте задачу сначала для простого n, потом для $n = p^\alpha$, потом для $n = p_1 p_2$ и затем для общего случая.

3. Найдите каноническое разложение чисел

а) 1995; б) 17!; в) C_{22}^{11}.

4. а) Число $n!$ не делится на 2^n ни при каком $n \geqslant 1$.

б) Показатель, с которым простое p входит в каноническое разложение числа $n!$, равен $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left[\dfrac{n}{p^i}\right]$.

в) Найдите число нулей в конце числа 1979!.

5. а) Известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

б) $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

в) Выразите $[a, b, c]$ через a, b, c, (a, b), (b, c), (c, a), (a, b, c).

г) Выразите (a, b, c) через a, b, c, $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, a]$, $[a, b, c]$.

д)* Для n чисел существуют формулы, аналогичные формулам предыдущих пунктов.

Указание. Используйте формулу включений-исключений и каноническое разложение.

6. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его. Четное число n совершенное тогда и только тогда, когда $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ простые.

7. а) Если $(a, b) = 1$ и $ab = m^2$, то существуют такие числа k и l, что $a = k^2$, $b = l^2$.

б) Найдите некоторые такие числа $n > m > 100$, что $1 + 2 + \ldots + n = m^2$.

в) Найдите все такие числа $m > n > 1$, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = m^2$.

г) Если $n > 2$, $ab = c^n$ и $(a, b) = 1$, то $a = x^n$ и $b = y^n$ для некоторых x и y.

д) Число $m(m + 1)$ не является степенью простого числа ни при каком целом $m > 1$.

8. а) Если $ab=cd$, то существуют такие числа k,l,m,n, что $a=kl$, $b=mn$, $c=km$, $d=ln$.

б) Найдите все такие числа a,b,c,d,k,m, что $ab=cd$, $a+d=2^k$, $b+c=2^m$.

9. Найдите наименьшее такое n, что из любых n чисел, не превосходящих 200, можно выбрать два, одно из которых делится на другое.

Контрольные вопросы

I. Найдите каноническое разложение числа 400:
а) $4\cdot 10^2$; б) $2^4\cdot 5^2$; в) $(2\cdot 2\cdot 5)^2$.

II. Назовем положительное четное число *четнопростым*, если его нельзя представить в виде произведения двух меньших четных чисел. Какие из следующих утверждений верны?

а) Любое положительное четное число раскладывается в произведение четнопростых чисел.

б) Разложение положительного четного числа в произведение четнопростых чисел единственно с точностью до порядка сомножителей.

III. Укажите, какие из следующих чисел совершенные:
а) 1; б) 6; в) 15; г) 28.

Указания и решения

1. а) Пусть не любое натуральное число является произведением простых чисел. Тогда возьмем наименьшее натуральное число n, не являющееся произведением простых. Оно не простое, значит, составное. Тогда $n=ab$ для некоторых не равных единице чисел a и b. Так как $n>a$ и $n>b$, то ввиду минимальности n числа a и b являются произведениями простых. Значит, n является произведением простых. Мы пришли к противоречию с предположением.

б) По задаче 1а любое натуральное число n представляется в виде $n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_m$, где все числа $p_1,p_2,\ldots,p_m$ — простые.

Далее, многократно применяем следующую операцию: если на i-м месте в этом произведении стоит число, равное числу p_1, а на $(i-1)$-м месте стоит число, не равное p_1, то мы их меняем местами. В конце концов, все множители в произведении, равные p_1, окажутся слева. Получим $n=p_1^{a_1}\cdot p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}$, где все числа p_{i_j} не равны p_1.

То же можно сделать с остальными множителями и получить искомый вид.

в) Пусть утверждение задачи неверно. Возьмем наименьшее число n, имеющее два канонических разложения:

$$n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{a_m}=q_1^{b_1}\cdot q_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot q_k^{b_k}.$$

В силу минимальности n, любое число p_i не равно любому числу q_j, иначе можно было бы поделить обе части равенства на них и получить меньшее число, имеющее два различных канонических разложения.

Лемма. *Пусть $p|ab$. Тогда $p|a$ или $p|b$.*

Доказательство. Будем доказывать лемму в эквивалентной формулировке: если для фиксированного числа a число b — наименьшее положительное, такое что $p|ab$ и b не делится на p, то $p|a$.

Ясно, что если $p|ab$, то $p|a(b-p)$. Поэтому, ввиду минимальности b, получаем $b<p$. Так как $p|ab$, то $ab \geqslant p$. Рассмотрим числа $b, 2b, \ldots$ $\ldots, (a-1)b, ab$. Тогда найдется такое число i, что $(i-1)b<p \leqslant ib$. Если $ib=p$, то $b=1$, откуда $p|ab=a$. Имеем тогда $ib>p$.

Заметим, что $ib-p<b$ и $p|a(ib-p)$. Число b — наименьшее положительное число, такое что $p|ab$ и b не делится на p. Поэтому число $ib-p$ равно нулю. Но мы получали, что $ib>p$ — противоречие. Значит, $b=1$ и $p|a$. □

Возьмем какое-нибудь число p_i из левой части равенства. Тогда

$$p_i | p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m} = q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_k^{b_k}.$$

Значит, по лемме $p_i | q_1^{b_1} \cdot q_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot q_{k-1}^{b_{k-1}}$ или $p_i | q_k^{b_k}$. Отщепляя множители далее, получим, что число p_i делит одно из чисел $q_j^{b_j}$, т. е. одно из чисел q_j. Так как q_j простое, то $q_j = p_i$. Противоречие.

3. (а) $1995 = 5 \cdot 399 = 5 \cdot 3 \cdot 133 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$ $(= 5 \cdot 7 \cdot 57)$.

б) Подсчитаем показатель при степени двойки, входящей в каноническое разложение $17! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 17$. Каждое второе число в этом произведении делится на 2. Поэтому можно вынести 2^8. Каждое четвертое число делится на 4, т. е. можно вынести еще 2^4. Аналогично можно еще вынести 2^2 и 2^1. Оставшиеся множители нечетные. Поэтому искомая степень двойки — это $2^{8+4+2+1} = 2^{15}$. Рассуждая аналогично, получаем

$$17! = 2^{15} \cdot 3^{\left[\frac{17}{3}\right]+\left[\frac{17}{9}\right]} \cdot 5^{\left[\frac{17}{5}\right]} \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

в) Аналогично пункту б) имеем

$$11! = 2^{\left[\frac{11}{2}\right]+\left[\frac{11}{4}\right]+\left[\frac{11}{8}\right]} \cdot 3^{\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{11}{9}\right]} \cdot 5^{\left[\frac{11}{5}\right]} \cdot 7 \cdot 11 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11,$$

$$22! = 2^{\left[\frac{22}{2}\right]+\left[\frac{22}{4}\right]+\left[\frac{22}{8}\right]+\left[\frac{22}{16}\right]} \cdot 3^{\left[\frac{22}{3}\right]+\left[\frac{22}{9}\right]} \cdot 5^{\left[\frac{22}{5}\right]} \cdot 7^{\left[\frac{22}{7}\right]} \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

Поэтому

$$C_{22}^{11} = \frac{22!}{11! \cdot 11!} = 2^{19-16} \cdot 3^{9-8} \cdot 5^{4-4} \cdot 7^{3-2} \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

5. в) *Ответ*: $[a,b,c] = \dfrac{a \cdot b \cdot c \cdot (a,b,c)}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)}$.

Линейные диофантовы уравнения (8–9)

1. а) Кузнечик передвигается вдоль прямой прыжками по 6 см и 10 см (в обе стороны). В какие точки он сможет попасть?

б) На острове Утопия в каждой неделе 7 дней, а в каждом месяце 31 день. Томас Мор прожил там 365 дней. Докажите, что среди них был понедельник 13-го числа.

в) Миша прибавил к дню своего рождения, умноженному на 12, месяц своего рождения, умноженный на 31. Получилось 670. Когда у Миши день рождения (найдите все возможные решения)?

г) Решите уравнение в целых числах: $nx+(2n-1)y=3$ (n — параметр).

2. а) Любую сумму, большую 23 пиастров, можно разменять монетами по 5 и 7 пиастров.

б)* Найдите наименьшее m, такое что любую сумму, большую m пиастров, можно разменять монетами по 12, 21 и 28 пиастров.

3. а) Для любого n число n^5-n делится на 30.

б) Если число a делится на 2, на 3 и на 5, то a делится на 30 (докажите по определению делимости, не используя основной теоремы арифметики, ибо обычно при доказательстве основной теоремы арифметики используется результат, близкий к тому, который нужно доказать).

4. а) Для любого неотрицательного n число $20^{2n}+16^{2n}-3^{2n}-1$ делится на 323.

б) Если число a делится на 17 и на 19, то a делится на 323 (см. замечание к 3 а)).

5. а) Уравнение $19x+17y=1$ имеет решение (здесь и далее — в целых числах).

б) Для любых чисел a, b и c уравнение $ax+by=c$ имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на (a,b).

в) Пусть пара (x_0,y_0) — решение уравнения $ax+by=c$. Тогда множество решений этого уравнения есть

$$\left\{\left(x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t,\ y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t\right)\,\middle|\, t\in\mathbb{Z}\right\}.$$

6. а) **Лемма о представлении НОД.** Для любых чисел a и b существуют такие числа x и y, что $ax+by=(a,b)$.

б) Если $(c,b)=1$ и $b|ac$, то $b|a$;

в) Если p простое и $p|ab$, то $p|a$ или $p|b$;

г) Если $(b,c)=1$, $b|a$ и $c|a$, то $bc|a$.

7. *Алгоритмом Евклида* называется процесс построения из данной пары a_0,b_0 последовательности пар a_k,b_k по следующему правилу:

если $b_k \neq 0$, то $a_{k+1} = b_k$ и b_{k+1} равно остатку от деления a_k на b_k;

если $b_k = 0$, то следующие пары не строят, а говорят, что алгоритм завершил работу за k шагов.

а) $(a, b) = (a - b, b)$.

б) $(a, b) = (b, r)$, где r — остаток от деления a на b.

в) Докажите, что для любых чисел a и $b \neq 0$ существует такое n, что алгоритм Евклида завершает работу за n шагов (т. е. $b_n = 0$). Для этого n выполнено $a_n = (a, b)$.

г) Укажите способ нахождения хотя бы одного решения (x_0, y_0) уравнения $ax + by = c$ (любой: метод Эйлера, по алгоритму Евклида или через разложение в цепную дробь).

д)* Составьте блок-схему алгоритма решения уравнения $ax + by = c$.

8. а) Найдите $(2^{32} + 1, 2^{16} + 1)$.

б) Найдите $(2^{91} - 1, 2^{63} - 1)$.

в) Для каких чисел a, b, n число $n^a + 1$ делится на $n^b - 1$?

9. Из угла бильярдного поля под углом 45° выпускают шарик. Собьет ли он кеглю, стоящую в $(2; 1)$, если размеры доски

а) 12×18; б) 17×18?

10. а) Решите системы сравнений [2)]

$$\begin{cases} x \equiv -1 \ (7), \\ x \equiv 15 \ (5), \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 6 \ (12), \\ x \equiv 8 \ (20), \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 7 \ (8), \\ x \equiv 18 \ (25), \\ 6x \equiv 2 \ (7). \end{cases}$$

б) **Китайская теорема об остатках.** Если числа $m_1, \ldots, m_s$ попарно взаимно просты, то для любых $a_1, \ldots, a_s$ существует такое x, что $x \equiv a_i \ (m_i)$ для любого $i = 1, \ldots, s$.

в) Придумайте алгоритм нахождения такого x.

г) Найдутся 1000 идущих подряд чисел, ни одно из которых не является степенью простого.

11. Линейные диофантовы уравнения с несколькими переменными. а) На какие клетки может попасть шахматная фигура тянитолкай, которая может совершать следующие передвижения по бесконечной клетчатой доске:

на 2 клетки вверх и на 5 вправо;

на 2 клетки вниз и на 5 влево;

на 3 клетки вверх и на 8 вправо;

на 3 клетки вниз и на 8 влево?

б) Как изменится ответ для конечной доски $n \times n$ клеток?

---

2) Определение сравнимости см. с. 84.

в)* Придумайте алгоритм решения в целых числах уравнения $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c$.

Контрольные вопросы

I. Кузнечик передвигается вдоль прямой прыжками по 6 см и 10 см (в обе стороны). Сможет ли он попасть в точку, находящуюся от начальной на расстоянии

а) 3,5 см; б) 7 см; в) 14 см?

II. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $ax + by = (a, b)$ для данных ненулевых a и b?

а) Ни одного; б) одно; в) бесконечно много; г) зависит от конкретных чисел a и b.

Указания и решения

1. а) *Ответ*: кузнечик сможет попасть в клетки, находящиеся на четном расстоянии от начала.

Решение. Кузнечик прыгает на четное расстояние, поэтому он может отдалиться от начальной точки только на четное расстояние.

Докажем теперь, что он может попасть в точку на расстоянии $2n$ справа от начала. Ему достаточно сделать $2n$ прыжков вправо на 6 и n прыжков влево на 10: $6(2n) - 10n = 2n$. Для точки слева от начала рассуждения аналогичны.

б) Возьмем 7 подряд идущих полных месяцев, в течение которых Томас Мор был на острове. Занумеруем их числами от одного до семи в порядке следования. Также занумеруем дни недели. Нужно показать, что одно из тринадцатых чисел будет первым днем недели. Число дней в одном месяце имеет остаток 3 от деления на 7. Значит, если тринадцатое число i-го месяца — это k-й день недели, то тринадцатое число $(i + 1)$-го месяца — это $(k + 3)$-й день недели по модулю 7. Пусть тринадцатое число первого выбранного месяца k-й день недели. Тогда дни недели тринадцатых чисел выбранных месяцев это: k, $k + 3$, $k + 6$, $k + 2$, $k + 5$, $k + 1$, $k + 4$. Среди них встречаются все дни недели. Значит, один из них — понедельник.

2. а) Сумму в n пиастров, где $24 \leqslant n < 29$, можно разменять монетами в пять и семь пиастров: $24 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$, $25 = 5 \cdot 5$, $26 = 5 + 3 \cdot 7$, $27 = 4 \cdot 5 + 7$, $28 = 4 \cdot 7$.

Пусть у нас n пиастров, где $n \geqslant 24$. Докажем утверждение задачи по индукции. Для $n < 29$ мы все выяснили. А если $n \geqslant 29$, то $n - 5$ пиастров можно разменять по предположению индукции.

3. б) *Указание.* $3a - 2a = a$, поэтому a делится на 6. $6a - 5a = a$, поэтому a делится на 30.

Решение. По условию $2|a, 3|a$ и $5|a$. Поэтому $6|3a$ и $6|2a$. Значит, $6|3a - 2a = a$. Аналогично $30|6a$ и $30|5a$. Значит, $30|6a - 5a = a$.

а) Разложим число $n^5 - n$ на множители:

$$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1).$$

Число $n(n-1)$ делится на 2. Число $(n-1)n(n+1)$ делится на 3. Если ни одно из чисел $n, (n-1), (n+1)$ не делится на 5, то остаток от деления числа n на 5 равен 2 или 3. Тогда n^2+1 делится на 5.

Имеем: $n^5 - n$ делится на 2, на 3 и на 5. По пункту б) получаем, что $n^5 - n$ делится на 30.

4. а) *Указание.* $19a - 17a = 2a$, поэтому $2a$ делится на 323; $17a - 8 \cdot 2a = a$, поэтому a делится на 323.

Решение. По условию $17|a$ и $19|a$. Поэтому $17 \cdot 19|17a$ и $19 \cdot 17|19a$. Значит, $17 \cdot 19|(19a - 17a) = 2a$. Имеем $17 \cdot 19|(17a - 8 \cdot 2a) = a$.

б) Так как $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$, то $a^n - b^n$ делится на $a - b$. Поэтому

$$20^{2n} - 1 + 16^{2n} - 3^{2n} = (20^{2n} - 3^{2n}) - ((16^2)^n - 1)$$

делится на 17. Аналогично

$$20^{2n} - 1 + 16^{2n} - 3^{2n} = (20^{2n} - 1) + ((16^2)^n - (3^2)^n)$$

делится на 19. По пункту а) получаем, что $20^{2n} - 3^{2n} + 16^{2n} - 1$ делится на 30.

5. а) Если $19x + 17y = 1$, то $17|(19x - 1)$. А также $17|(2x - 1)$. Значит, можно взять $x = 9$. Подставляем $x = 9$ в равенство и получаем $17y = 1 - 19 \cdot 9 = -170$, откуда $y = 10$.

б) *Указание.* Можно считать, что $a > b > 0$ и тогда доказывать индукцией по $a + b$.

6. а) См. 5 б).

б) *Указание.* Докажите индукцией по c. В шаге индукции поделите b на c с остатком. *Другое указание.* Выведите из а).

8. а) *Указание.* Докажите, что $(n^a - 1, n^b - 1) = n^{(a,b)} - 1$.

10. а) *Ответы*: $x \equiv 10\ (35)$, $\varnothing$, $x \equiv 943\ (1400)$.

г) Например, $10^7! + 2$, $10^7! + 3$, $\ldots$, $10^7! + 1001$. Вместо $10^7!$ можно взять число, которое находится по китайской теореме об остатках.

Целые точки под прямой (9–10)

Эти задачи подводят школьника к алгоритму вычисления суммы $f_\alpha(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\alpha k]$, т. е. количества целых точек «под прямой $y = \alpha x$». Через $[x]$ и $\{x\}$ обозначаются целая и дробная части числа x соответственно. Алгоритм строится в задачах 2 а)–в), задача 1 полезна «для разогрева».

1. Найдите $f_\alpha(n)$ для

а) целого α;

б) целого 2α;

в) целого 3α;

г) $\alpha = a/n$ для данных целых a и n;

д) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_\alpha(n)}{n^2}$ (те, кто не знают, что это такое, могут пропустить эту задачу).

2. а) $f_\alpha(n) = f_{\{\alpha\}}(n) + \dfrac{1}{2}[\alpha]n(n+1)$.

б) $f_\alpha(n) + f_{1/\alpha}([n\alpha]) - [n/q] = n[n\alpha]$, где q — знаменатель несократимой дроби, представляющей число α, если α рационально, и $q = \infty$ (т. е. $[n/q] = 0$), если α иррационально.

в) Найдите алгоритм вычисления суммы $f_\alpha(n)$.

г) Найдите алгоритм вычисления суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \{\alpha k\}$.

Контрольные вопросы

I. Найдите $[-2,5]$.

а) -1; б) -2; в) -3.

II. Найдите $f_{\sqrt{2}}(4)$.

а) 10; б) 12; б) 14.

III. Существуют ли такие различные α и β, чтобы при любом n выполнялось равенство $f_\alpha(n) = f_\beta(n)$?

а) Существуют; б) не существуют.

Указания и решения

1. а) *Ответ*: $\alpha \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Решение. Сначала вычислим сумму $1 + 2 + \ldots + n$. Заметим, что $i + (n + 1 - i) = n + 1$. В данной сумме сгруппируем i-е и $(n + 1 - i)$-е слагаемые в пары для всех $i = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} k = n \cdot \dfrac{(n+1)}{2}$.

Поэтому
$$\sum_{k=1}^{n}[\alpha k]=\alpha\sum_{k=1}^{n}k=\alpha\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

б) *Ответ*: $\alpha\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$. Возможны другие формы записи ответа, например, $[\alpha]\dfrac{n(n+1)}{2}+\{\alpha\}\dfrac{n^2+(-1)^n}{2}$.

Решение. Если α — целое, то по задаче 1 а) $\sum\limits_{k=1}^{n}[\alpha k]=\alpha\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Теперь для произвольного полуцелого (но не целого) α:

$$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+\ldots+[n\alpha]=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+2\alpha+\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)+\ldots=$$
$$=\alpha\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

в) *Ответ*: Для целого α см. выше. Для нецелого α имеем

$$f_{\alpha(n)}=\begin{cases}\alpha\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\left[\dfrac{n+1}{3}\right] & \text{при } n\neq 3k+1,\\ \alpha\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\left[\dfrac{n}{3}\right]-\{\alpha\} & \text{при } n=3k+1.\end{cases}$$

Указание. Для нецелого α имеем

$$[\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]=\alpha+2\alpha+3\alpha-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=6\alpha-1.$$

2. б) *Указание.* Посчитайте количество целых точек в прямоугольнике $1\leqslant x\leqslant n$, $1\leqslant y\leqslant[n\alpha]$.

в) *Указание*:

$$f_{2/3}(n)=n\left[\frac{2n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]-f_{3/2}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right);$$
$$f_{3/2}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{2n}{3}\right]\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)+f_{1/2}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right);$$
$$f_{1/2}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]\right)=\left[\frac{2n}{3}\right]\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]-f_2\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right),$$

поскольку $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right]$ для целого $n>0$ и, значит, $\left[\dfrac{\left[\frac{2n}{3}\right]}{2}\right]=\left[\dfrac{n}{3}\right]$;

$$f_2\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)=\left[\frac{n}{3}\right]\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right).$$

Замечания

Частный случай равенства 2 б) (на котором основан предлагаемый алгоритм) для положительных нечетных взаимно простых чисел $p<q$, $\alpha=p/q$ и $n=(q-1)/2$ (тогда $[n\alpha]=(p-1)/2$) появляется при доказательстве квадратичного закона взаимности [3]; доказательство общего случая аналогично. Сумма из 2 г) вычислена (более громоздким способом, чем предложенный здесь) в статье: *Добровольская В. Н.* Неполные суммы дробных долей // Чебышёвский сборник. 2004. Т. 5, № 2 (10). С. 42–48.

Малая теорема Ферма (9–10)

Пусть m — натуральное число. Числа a и b называются *сравнимыми* по модулю $m\neq 0$, если $a-b$ делится на m (или a и b имеют одинаковые остатки от деления на m). Обозначение: $a\equiv b \mod m$ или $a\equiv b \mod m$. Сравнимость $a\equiv b\ (m)$ равносильно тому, что a и b имеют одинаковый остаток при делении на m.

Сравнимость сохраняется при почленном сложении, вычитании, умножении, возведении в степень, делении на число, взаимно простое с модулем. Сравнение является отношением эквивалентности. Пример:

$$3^{16}=(3^2)^8=9^8=(9^2)^4=81^4\equiv 12^4=(12^2)^2\equiv 6^2\equiv 13 \mod 23.$$

1. Последовательность остатков от деления a^n $(n=0,1,\ldots)$ на $b\neq 0$ периодична начиная с некоторого места.

2. а) Обозначим $Z_{97}=\{0,1,\ldots,96\}$. Рассмотрим отображение $f\colon Z_{97}\to Z_{97}$, заданное так: $f(a)$ равно остатку от деления числа $14a$ на 97. Тогда f — взаимно однозначное соответствие.

Указание. Достаточно доказать, что f сюръективно. Иногда как раз доказывают, что f *инъективно*, но необходимая для этого основная лемма арифметики обычно доказывается через разрешимость уравнения $97x+14y=1$, из которой сразу вытекает *сюръективность* отображения f.

б) $(14\cdot 1)\cdot(14\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(14\cdot 96)\equiv 96! \mod 97$.

в) $14^{96}\equiv 1 \mod 97$.

г) **Малая теорема Ферма.** Если p простое, то n^p-n делится на p для любого целого n.

д) **Малая теорема Ферма (alio modo).** Если p простое и n не делится на p, то $n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.

[3] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. Вопрос 1б к гл. II и V.2.l.

е) Докажите, что для простого p число C_p^k делится на p для $k = 1, 2, \ldots, p-1$, и получите из этого иное доказательство малой теоремы Ферма.

3. Найдите остаток от деления

а) 2^{100} на 101; б) 3^{102} на 101; в) 8^{900} на 29;

г) 3^{2000} на 43; д) 7^{60} на 143; е) $2^{60}+6^{50}$ на 143.

4. а) Если p простое и $p>2$, то 7^p-5^p-2 делится на $6p$.

б) Число $\underbrace{11\ldots1}_{2002}$ делится на 2003.

в) Если p и q — различные простые числа, то $p^q+q^p \equiv p+q \mod pq$.

г) Число $30^{239}+239^{30}$ составное.

Далее буквами $p, q, p_1, \ldots, p_k$ обозначаются различные простые числа.

5. а) $p-1$ делится на наименьшее $k>0$, для которого $a^k \equiv 1 \mod p$.

б) Длина периода десятичной дроби $1/p$ делит $p-1$.

в) Если $p>2$ и 2^p-1 делится на d, то $d-1$ делится на $2p$. Иными словами, любой простой делитель числа 2^p-1 имеет вид $2kp+1$.

г)* Используя равенство $641 = 5^4+2^4 = 1+5\cdot 2^7$, докажите, что число $2^{2^5}+1$ составное.

д)* Верно ли, что если n^p-n делится на p для любого целого n, то p простое? (То есть верна ли теорема, обратная к малой теореме Ферма в некоторой формулировке последней?)

6. а) Если $p \neq q$ и n не делится ни на p, ни на q, то $n^{(p-1)(q-1)}-1$ делится на pq.

б) Если n не делится на p, то $n^{p^\alpha(p-1)}-1$ делится на $p^{\alpha+1}$.

в) **Теорема Эйлера.** Если n взаимно просто с $m = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ и $\varphi(m) = (p_1-1)p_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot(p_k-1)p_k^{\alpha_k-1}$, то $n^{\varphi(m)}-1$ делится на m.

г) $\varphi(m)$ равно количеству чисел от 1 до m, взаимно простых с m.

е) Известно, что n — нечетное число от 3 до 47, не делящееся на 5. Как быстро вычислять неизвестное n по известному $n^7 \mod 50$? (Эта задача показывает, почему для шифрования так важно знать разложение числа на простые множители.)

Зачетные задачи: 2 г); 3 б)–е); 4 а)–в); 5 а)–в); 6 а)–в). Из них письменно: 3 е); 4 а); 5 а); 6 б).

Контрольные вопросы

I. Найдите остаток от деления 2^{29} на 29.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

II. Найдите остаток от деления 2^{30} на 30.

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

III. Какие из следующих утверждений верны для любых a, b, m?

а) $a \equiv a \mod m$;

б) $a \equiv b \mod m \iff b \equiv a \mod m$;

в) если $a \equiv b \mod m$ и $b \equiv c \mod m$, то $a \equiv c \mod m$;

г) если $a \equiv b \mod m$ и $c \equiv d \mod m$, то $a + c \equiv b + d \mod m$;

д) если $a \equiv b \mod m$ и $c \equiv d \mod m$, то $ac \equiv bd \mod m$;

е) если $a \equiv b \mod m$, то для любого $c \neq 0$ $ac \equiv bc \mod mc$;

ж) $a \equiv -a \mod m$;

з) любое число сравнимо с суммой своих цифр по модулю 9 и по модулю 3.

Указания и решения

2. а) $14 \cdot 7k \equiv k \mod 97$.

б) $(14 \cdot 1) \cdot (14 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (14 \cdot 96) \equiv f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(96) = 96! \mod 97$.

в) Сократите равенство из б) на 96!.

3. *Ответы*: а) 1; б) 9; в) 7; г) 15; д) 1; е) 24.

Квадратичные вычеты (10–11)

Цель этого цикла задач — мотивировать проблему разрешимости сравнения $x^2 \equiv a \mod p$ и наметить ее решение для простого p. Я старался показать, как был *придуман* квадратичный закон взаимности (другой способ придумать его сообщил мне А. Я. Канель-Белов).

1. а) Выясните, какие остатки могут быть у квадратов (целых) чисел при делении на 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

б) Если $a^2 + b^2$ делится на 3 (на 7), то a и b делятся на 3 (на 7).

в) Число вида $4k + 3$ не представимо в виде суммы двух квадратов.

г) Число, имеющее простой делитель вида $4k + 3$ в нечетной степени, не представимо в виде суммы двух квадратов.

д)* Остальные целые числа представимы в виде суммы двух квадратов.

е) Существуют сколь угодно большие тройки последовательных чисел, ни одно из которых не является точным квадратом.

ж) Существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех квадратов.

Через p обозначается нечетное простое число. Латинские буквы обозначают целые числа или вычеты по модулю p (что именно — видно из контекста).

2. Решите уравнения в целых числах (а)—ж)).

а) В нечетных числах: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=y^2$.

б) $3x=5y^2+4y-1$.

в) $x^2+y^2=3z^2$.

г) $x^2+y^2+z^2=4t^2$.

д) $2^x+1=3y^2$.

е) $x^2=2003y-1$.

ж) $x^2+1=py$, где $p=4k+3$.

з) Если $p=4k+3$ делит a^2+b^2, то $p|a$ и $p|b$.

3. Сведите уравнение $py=at^2+bt+c$ к сравнению $x^2\equiv a \mod p$.

Остаток $a\neq 0$ называется *квадратичным вычетом (квадратичным невычетом) по модулю* p, если сравнение $x^2\equiv a \mod p$ разрешимо (неразрешимо). Слова «по модулю p» далее опускаются.

4. а) Для некоторых a и p оба числа a и $-a$ являются квадратичными вычетами.

б) Сравнение $x^2\equiv a^2 \mod p$ имеет ровно два решения для a, не делящегося на p.

в) Число квадратичных вычетов равно числу квадратичных невычетов и равно $\dfrac{p-1}{2}$.

5. а) Для любого $a\neq 0$ существует и единственно b, такое что $ab\equiv 1 \mod p$. Обозначение: $b=a^{-1}$.

б) Решите сравнение $x\equiv x^{-1} \mod p$.

в) **Теорема Вильсона.** $(p-1)!+1$ делится на p.

6. а) Если $a\neq 0$ — квадратичный вычет, то a^{-1} тоже квадратичный вычет.

б) Число квадратичных вычетов четно тогда и только тогда, когда -1 является квадратичным вычетом.

в) Уравнение $x^2+1=py$ разрешимо в целых числах при $p\equiv 1 \mod 4$ (и неразрешимо при $p\equiv 3 \mod 4$).

7. а) Произведение двух квадратичных вычетов является квадратичным вычетом.

б) Произведение квадратичного вычета и квадратичного невычета является квадратичным невычетом.

в) Произведение двух квадратичных невычетов является квадратичным вычетом.

8. Если число $p=8k+5$ простое, то

а) $2^{4k+2}\equiv -1 \mod p$;

б) уравнение $x^2-2=py$ неразрешимо в целых числах.

9. Если число $p = 8k + 1$ простое, то

а) $2^{4k} \equiv 1 \mod p$,

б) уравнение $x^2 - 2 = py$ разрешимо в целых числах.

10. а) Если число $p = 8k \pm 1$ простое, то $2^{(p-1)/2} \equiv 1 \mod p$.

б) Если число $p = 8k \pm 3$ простое, то $2^{(p-1)/2} \equiv -1 \mod p$.

в) Для каких простых чисел p разрешимо в целых числах уравнение $x^2 - 2 = py$?

11. а) Если число $p = 12k \pm 1$ простое, то $3^{(p-1)/2} \equiv 1 \mod p$.

б) Если число $p = 12k \pm 5$ простое, то $3^{(p-1)/2} \equiv -1 \mod p$.

в) Для каких простых чисел p разрешимо в целых числах уравнение $x^2 - 3 = py$?

12. Обозначим

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} +1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Например, $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$ по задаче 10; $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ по задаче 7.

а) **Критерий Эйлера.** $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \mod p$.

б) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{(p-1)/2} \left[\frac{2ax}{p}\right]}$.

в) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{(p-1)/2} \left[\frac{ax}{p}\right]}$ для нечетного a.

г)* **Квадратичный закон взаимности Гаусса.**

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)$$

для простых нечетных чисел p и q.

д) Как при помощи предыдущих задач быстро вычислять $\left(\frac{a}{p}\right)$?

Зачетные задачи: 2 а), в), ж); 4 б), в); 5 б), в); 6 б), в); 7 б), в); 9 а), б); 11 а). Из них письменно: 4 в); 9 а).

Контрольные вопросы

I. Может ли -1 быть квадратичным вычетом по какому-нибудь простому модулю p?

а) Может; б) не может.

II. Какие из следующих сравнений разрешимы:

а) $x^2 \equiv 10\ (11)$;

б) $x^2 \equiv 2\ (41)$;

в) $x^2 \equiv 6\ (17)$?

III. Какие из следующих утверждений верны для любых целых a и m, таких что $0 < a < m$?

а) Сравнение $x^2 \equiv a \mod m$ имеет не более 2 решений.

б) Сравнение $ax \equiv 1 \mod m$ имеет не более 1 решения.

в) Сравнение $ax \equiv 1 \mod m$ имеет не менее 1 решения.

Указания и решения

1. а) *Ответ*: квадраты целых чисел дают остатки от деления

на 3:	0, 1;	на 4:	0, 1;
на 5:	0, 1, 4;	на 6:	0, 1, 3, 4;
на 7:	0, 1, 2, 4;	на 8:	0, 1, 4;
на 9:	0, 1, 4, 7;	на 10:	0, 1, 4, 5, 6, 9.

Решение. Достаточно найти квадраты остатков. Заметим, что 0 и 1 — квадраты по любому модулю. Кроме того, числа k^2 и $(-k)^2$ имеют один остаток от деления на n, поэтому можно смотреть только остатки чисел k^2 для $2 \leqslant k \leqslant n/2$.

$2^2 \equiv 0 \mod 4$;
$2^2 \equiv 4 \mod 5$;
$2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 3 \mod 6$;
$2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 2 \mod 7$;
$2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 1,\quad 4^2 \equiv 0 \mod 8$;
$2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 0,\quad 4^2 \equiv 7 \mod 9$;
$2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 9,\quad 4^2 \equiv 6,\quad 5^2 \equiv 5 \mod 10$.

б) По пункту а) число x^2 имеет остаток 0 или 1 от деления на 3. Поэтому если хотя бы одно из чисел a или b не делится на 3, то число $a^2 + b^2$ не делится на 3.

Также по пункту а) число x^2 может иметь остаток от деления на семь 0, 1, 2 или 4. Ни одно из чисел $0+1$, $0+2$, $0+4$, $1+1$, $1+2$, $1+4$, $2+2$, $2+4$, $4+4$ не делится на 7. Откуда получаем требуемое.

в) По пункту а) число x^2 имеет остаток от деления на четыре 0 или 1. Значит, сумма двух квадратов может иметь остаток 0, 1 или 2. Что и требовалось доказать.

1. д) Приведем доказательство Дона Загира (в исполнении М. В. Прасолова, ср. [1]) того, что *простые числа вида $4k+1$ представимы в виде суммы двух квадратов.*

Рассмотрим число способов представить простое число $p = 4k + 1$ в виде $p = x^2 + 4yz$, где x, y, z — натуральные числа. Достаточно показать, что это число способов нечетно.

Действительно, пусть мы это доказали. Все способы, в которых $y \neq z$, очевидным образом разбиваются на пары: тройке (x, y, z) сопоставляется тройка (x, z, y). Если общее число способов нечетно, то число способов, в которых $y = z$, также нечетно. Значит, число p можно представить в виде $p = x^2 + (2y)^2$.

Чтобы доказать, что общее число способов нечетно, разделим все способы, кроме одного, на пары.

Для этого рассмотрим следующую фигуру, состоящую из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников размера $y \times z$ (рис. 1). Возьмем на плоскости квадрат со стороной x с вершинами $(0, 0)$, $(0, x)$, (x, x) и $(x, 0)$. Приставим к нему прямоугольник $y \times z$ с вершинами в (x, x), $(x, x + y)$, $(x - z, x + y)$ и $(x - z, x)$. Три оставшихся прямоугольника $y \times z$ получаются из данного поворотом на $90°$, $180°$ и $270°$ относительно центра квадрата.

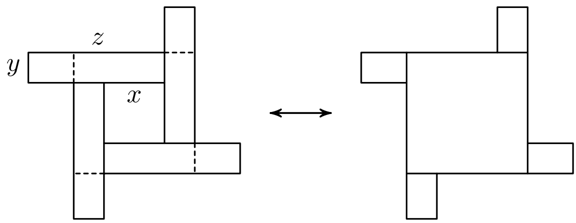


Рис. 1

Каждую такую фигуру можно разрезать на квадрат и четыре прямоугольника двумя способами. Для этого нужно продолжить стороны прямоугольников, как показано на рисунках рис. 1 и рис. 2.

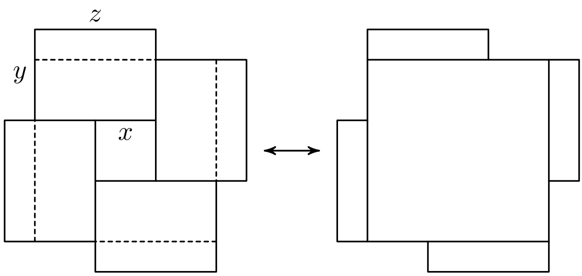


Рис. 2

Проверим, что таким образом мы разобьем все способы представления, кроме одного, на пары. Разберем два случая, показанных на рисунках 1 и 2.

Случай 1: $x + y < z$ *или* $2z < x$. Мы имеем два способа разрезания нашей фигуры. В первом участвуют квадрат со стороной x и четыре прямоугольника $y \times z$, а во втором — большой квадрат со стороной $x + 2y$ и четыре прямоугольника $(z - x - y) \times y$. Так каждому представлению $p = x^2 + 4yz$, в котором $x + y < z$, мы сопоставляем представление $p = (x + 2y)^2 + 4(z - x - y)y$. И наоборот, каждому представлению, в котором $2z < x$, мы сопоставляем представление, в котором $x + y < z$. Тем самым все способы представления, в которых $x + y < z$ или $2z < x$, оказались разбиты на пары.

Случай 2: $x < z < x + y$ *или* $z < x < 2z$. Каждому представлению $p = x^2 + 4yz$, в котором $x < z < x + y$, мы сопоставляем представление $p = (2z - x)^2 + 4(x + y - z)z$, и наоборот. Тем самым все представления, в которых $x < z < x + y$ или $z < x < 2z$, также оказались разбиты на пары.

Проверим, что ровно один способ представления не охватывается этими двумя случаями.

Разберем все варианты. Пусть сначала $x < z$. Если при этом $x + y < z$, то мы имеем ситуацию на рис. 1, слева. Если $x + y > z$, то мы имеем ситуацию на рис. 2, слева. Если $x + y = z$, то из рисунка видно, что число p — квадрат целого числа, что противоречит простоте числа p. Пусть теперь $x > z$. Если $x < 2z$ или $x > 2z$, то мы имеем ситуацию на рисунке 2 или 2. Если $x = 2z$, то число $p > 2$ четное, что опять же противоречит простоте числа p.

Осталось разобрать случай $x = z$. Тогда $x|p$, значит, $x = 1$. Это соответствует представлению $p = 1^2 + 4 \cdot k \cdot 1$. Это и есть способ без пары.

е) *Первое решение.* Рассмотрим целое число $n > 3$. Три последовательных числа $n^2 + 1, n^2 + 2, n^2 + 3$ меньше числа $(n + 1)^2$. Но для любого натурального a, $a^2 \leqslant n^2$ или $(n + 1)^2 \leqslant a^2$. Значит, ни одно из рассмотренных чисел не является точным квадратом.

Второе решение. По пункту а) ни одно из чисел $8k + 5$, $8k + 6$, $8k + 7$ не является точным квадратом.

2. б) *Ответ*: $\{(3k - 1, 15k^2 - 6k)\} = \{(3k + 2, 15k^2 + 24k + 9)\}$.

Указание к е), ж): используйте малую теорему Ферма.

8. а) *Указание.* Остатки от деления на p чисел $2 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, … …, $2 \cdot (4k + 2)$ совпадают с остатками от деления на p чисел a_1, a_2, … …, a_{2k+1}, $-a_{2k+2}$, $-a_{2k+3}$, …, $-a_{4k+2}$, где

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1}, a_{2k+2}, a_{2k+3} \ldots, a_{4k+2}\} = \{1, 2, \ldots, 4k + 2\}.$$

Поэтому $2^{4k} \cdot (4k)! \equiv -(4k)! \mod p$.

9 а), **10** а), б), **11** а), б), **12** б). Эти задачи решаются аналогично задаче 8 а.

10. в) *Ответ*: $p = 8k \pm 1$.

11. в) *Ответ*: $p = 12k \pm 1$.

12. *Указания.* а) Обозначим через P произведение всех квадратичных вычетов по модулю p. Если a квадратичный невычет, то $a^{\frac{p-1}{2}}P$ сравнимо с произведением всех квадратичных невычетов по модулю p. По задаче 6 имеем $P \equiv \pm 1 \mod p$. Поэтому и по теореме Вильсона последнее произведение сравнимо с $-P$. Значит, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p$.

Второе решение. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}\}$ — все квадратичные вычеты по модулю p. Пусть, напротив, a — квадратичный невычет и $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$. Тогда многочлен $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ имеет более $\dfrac{p-1}{2}$ корней. Противоречие с тем, что многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$ имеет не более n корней.

в) $\left(\dfrac{a}{p}\right) = \left(\dfrac{2}{p}\right)\left(\dfrac{\frac{a+p}{2}}{p}\right)$.

8 а), **9** а), **10** а), б). *Указание* (С. В. Конягин). Пусть $z = (1+i)/\sqrt{2}$. Тогда $(z + 1/z)^p - (z^p + 1/z^p)$ представимо в виде $p(A + B\sqrt{2})$, где A, B — целые числа.

11 а), б). *Указание* (С. В. Конягин). Пусть $z = (1 + i\sqrt{3})/2$. Тогда $(z + 1/z)^p - (z^p + 1/z^p)$ представимо в виде $p(A + B\sqrt{3})$, где A, B— целые числа.

Литература

[1] *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2007.

Первообразные корни (10–11)

Это занятие мотивировано следующей общей проблемой: решить сравнение $a^x \equiv b \mod m$ (при заданных параметрах a, b, m). Будем считать, что a и b не делятся на m.

1. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм решения такого сравнения для $m = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7$.

Пусть $(g, m) = 1$. Вычет g называется *первообразным корнем* по модулю m, если остатки от деления на m чисел $g^1, g^2, \ldots, g^{\varphi(m)} \equiv 1$ различны.

2. Докажите существование первообразного корня по модулю

а) 17; б) 257; в) $p=2^l+1$; г) 97;
д) $p=2^k\cdot 3^l+1$; е) $p=2^k\cdot 3^l\cdot 5^m+1$; ж) p.

Здесь p — простое число.

Теорема о первообразном корне. *Для любого простого p существует число g, для которого остатки от деления на p чисел g^1, g^2, g^3, ..., $g^{p-1}\equiv 1$ различны.*

3. Леммы к теореме о первообразном корне. Пусть p простое и a не делится на p.

а) $p-1$ делится на наименьшее $k>0$, для которого $a^k\equiv 1 \mod p$.

Указание: используйте малую теорему Ферма.

б) Для любых целых n и a сравнение $x^n\equiv a \mod p$ имеет не более n решений.

в) Если $p-1$ делится на d, то сравнение $x^d\equiv 1 \mod p$ имеет ровно d решений.

4. а) Если $(a,35)=1$, то $a^{12}\equiv 1 \mod 35$.

б) Если m делится на два различных простых нечетных числа и $(a,m)=1$, то $a^{\frac{\varphi(m)}{2}}\equiv 1 \mod m$.

5. а) Если m делится на два различных простых нечетных числа, то не существует первообразного корня по модулю m.

б) Пусть $x\equiv 3 \mod 4$. Может ли $x^2\equiv 1 \mod 2^{100}$?

в)* При $n>2$ не существует первообразного корня по модулю 2^n.

6. а) Число 2 является первообразным корнем по модулю 3^n.

Указание: $2^2=1+3$.

б) Число 2 является первообразным корнем по модулю 5^n.

Указание: $2^4=1+5\cdot 3$.

в) Найдите первообразный корень по модулю 7^n.

7. Пусть g первообразный корень по модулю простого $p>2$.

а) Существуют такие t и u, что $(g+pt)^{p-1}=1+pu$ и u не делится на p.

б) Для любого целого положительного n существует первообразный корень по модулю p^n.

в) То же по модулю $2p^n$.

8. Теорема. Первообразные корни существуют только по модулям $2, 4, p^n, 2p^n$.

9. Пусть p простое и a не делится на p. Положим $\operatorname{ord} a=\operatorname{ord}_p a:= =\min\{k\geqslant 1 \mid a^k\equiv 1 \mod p\}$. Число $\operatorname{ord}_p a$ называется *порядком (или индексом) элемента a по модулю p.*

а) Если $a^m \equiv a^n \mod p$, то $m-n$ делится на $\operatorname{ord} a$.

б) $a \cdot \operatorname{ord} x^a = \operatorname{ord} x$.

в) Если $\operatorname{ord} x$ и $\operatorname{ord} y$ взаимно просты, то $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord} x \cdot \operatorname{ord} y$.

10. При каких n

а) $2^n - 1$ делится на 3^{100}?

б) $2^n + 1$ делится на 3^{100}?

в) $5^n - 1$ делится на 2^{100}?

г) $3^n + 1$ делится на 2^{100}?

11. Найдите длину периода дроби а) $1/3^{100}$; б) $1/7^{100}$.

12. а) При циклической перестановке цифр в периоде дроби $1/7 = 0{,}(142857)$ получатся дроби вида $1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$. Докажите аналогичный факт для дроби $1/p$, если в ней длина периода равна $p-1$.

б) Найдите множество остатков от деления чисел вида 10^k на 3^{100}.

в) Докажите, что в десятичной записи дроби $1/3^{100}$ встречается любая комбинация из 20 идущих подряд цифр.

13*. Найдите такие n, чтобы среди последних 1000 цифр числа 2^n нашлось 100 подряд идущих а) нулей; б) девяток.

14*. Аналогично задаче 13 вопрос про 5^n.

15. Лемма Гензеля. Пусть p — простое число, $x \equiv 1 \mod p^n$, $x \not\equiv 1 \mod p^{n+1}$, $p > 2$ или $n > 1$. Докажите, что:

а) если $(a, p) = 1$, то $x^a \equiv 1 \mod p^n$, но $x^a \not\equiv 1 \mod p^{n+1}$;

б) $x^p \equiv 1 \mod p^{n+1}$ и если $n > 1$ либо $p > 2$, то $x^p \not\equiv 1 \mod p^{n+2}$;

в) если $a = p^k q$ и q взаимно просто с p, то $x^a \equiv 1 \mod p^{n+k}$ и $x^a \not\equiv 1 \mod p^{n+k+1}$.

16. Если x — первообразный корень по модулю p^3, где p — нечетное простое, то x — первообразный корень по модулю p^n.

17. Если $d | (2^{2^n} + 1)$, то $2^{n+1} | (d-1)$.

Контрольные вопросы

I. Найдите первообразный корень по модулю 7.

а) 1; б) 2; в) 3.

II. Для любого ли числа m существует первообразный корень по модулю m?

а) Для любого; б) не для любого.

III. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Назовем его *корнем по модулю* p любой элемент a множества $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, для которого $p | P(a)$. Какие из следующих утверждений верны для любого простого p и любого целого $n > 0$?

а) Многочлен $x^{p-1}-1$ имеет ровно $p-1$ корень по модулю p.

б) Многочлен x^n-1 имеет ровно n корней по модулю p.

в) Многочлен степени n имеет не более n корней по модулю p.

Указания и решения

2. *Указание.* Пункт в) вытекает из того, что если первообразного корня нет, то сравнение $x^{2^{l-1}} \equiv 1 \mod p$ имеет $p-1=2^l>2^{l-1}$ решений. Остальные пункты аналогичны.

3. б) *Указание.* Докажем более общее утверждение: *многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$ не может иметь более n корней в $\mathbb{Z}_p$.* Здесь многочленом называется набор его коэффициентов по модулю p, а не функция.

Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет в $\mathbb{Z}_p$ различные корни $x_1,\ldots$ $\ldots,x_n,x_{n+1}$. Представьте его в виде

$$P(x)=b_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)+ \\ +b_{n-1}(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})+\ldots+b_1(x-x_1)+b_0$$

(«*интерполяция Ньютона*»). Последовательно подставляя в сравнение $P(x)\equiv 0 \mod p$ вычеты $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$, получим $b_0\equiv b_1\equiv\ldots\equiv b_{n-1}\equiv$ $\equiv b_n\equiv 0 \mod p$.

То же самое решение можно записать и так. Пусть P — многочлен. Тогда многочлен $P-P(a)$ делится на $x-a$, т. е. $P-P(a)=(x-a)Q$ для некоторого многочлена Q с $\deg Q<\deg P$. Поэтому если $P(a)=$ $=0$, то $P=(x-a)Q$ для некоторого многочлена Q степени меньше $\deg P$. Теперь требуемое в задаче утверждение доказывается индукцией по степени многочлена P.

в) *Указание.* Заметьте, что многочлен $x^{p-1}-1$ над $\mathbb{Z}_p$ имеет ровно $p-1$ корень и делится на x^d-1. Докажите, что если многочлен степени a имеет ровно a корней и делится на многочлен степени b, то этот многочлен степени b имеет ровно b корней.

Другое решение можно получить, заметив, что если $p=kd$, то для любого a сравнение $y^k\equiv a \mod p$ имеет не более k решений.

10. в) *Ответ*: при $2^{98}\mid n$.

Указание. По 11 а) для решения задачи достаточно доказать, что 5^{2^k} *есть минимальная ненулевая степень пятерки, которая дает остаток 1 при делении на 2^{k+2}*. Это вытекает из 11 а) и сравнения $5^{2^k}\equiv$ $\equiv 2^{k+2}+1 \mod 2^{k+3}$. Докажем это сравнение индукцией по k.

База $k=0$ легко проверяется. Пусть сравнение верно для k. Тогда $5^{2^k}=$ $=t\cdot 2^{k+2}+1$, где t нечетно. Поэтому

$$5^{2^{k+1}}=(5^{2^k})^2=t^2\cdot 2^{2k+4}+t\cdot 2^{k+3}+1\equiv t\cdot 2^{k+3}+1\equiv 2^{k+3}+1 \mod 2^{k+4}.$$

Проверка простоты чисел Мерсенна (10–11)

С. В. Конягин

Здесь необходимо определение и простейшие свойства сравнений по модулю (см. раздел «Малая теорема Ферма»). Решите задачи 2 д) и 6 а) оттуда, а также 11 а) из раздела «Первообразные корни».

1. *Малая теорема Ферма не является достаточным условием простоты.*

а) Докажите, что если число $p \geqslant 5$ простое, то число $n = (2^{2p}-1)/3$ составное, но $2^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

б) Найдите такое составное n, что при $(a, n) = 1$ выполнено $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

2. Докажите, что

а) если $n > 2$ — простое число и a не делится на n, то $a^{(n-1)/2} \equiv \pm 1 \mod n$;

б) если $n = 2^s k + 1$ и $a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod n$ для некоторого a, то любой простой делитель p числа n удовлетворяет сравнению $p \equiv 1 \mod 2^s$;

в) если $n = 2^s k + 1$, $k \leqslant 2^s$ и $a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod n$ для некоторого a, то n простое.

Мы получили достаточное условие простоты чисел специального вида. Отметим, что если число $n = 2^s k + 1$ действительно является простым, то, как правило, найти число a, удовлетворяющее сравнению $a^{(n-1)/2} \equiv -1 \mod n$, можно небольшим перебором.

Цель оставшихся задач — доказательство следующего критерия простоты чисел $2^m - 1$. В дальнейшем считаем, что $m \geqslant 3$.

Критерий Люка. Число $n = 2^m - 1$ простое тогда и только тогда, когда m простое и M_{m-1} делится на n. Здесь последовательность Люка задана формулами $M_1 = 4$ и $M_k = M_{k-1}^2 - 2$.

3. Докажите, что если число $2^m - 1$ простое, то число m простое.

4. Далее p, $p \geqslant 5$, — простое число. Обозначим $x_k^{\pm} = (2+\sqrt{3})^k \pm \pm (2-\sqrt{3})^k$, $X^+ = \{k\colon x_k^+ \equiv 0 \mod p\}$ и $X^- = \{k\colon x_k^-/\sqrt{3} \equiv 0 \mod p\}$. (Решите задачи 10 и 11 из раздела «Квадратичные вычеты» при помощи указаний от С. В. Конягина.)

Докажите, что

а) для любого целого k числа x_k^+ и $x_k^-/\sqrt{3}$ целые;

б) если $z_1, z_2 \in X^+$, то $z_1 + z_2 \in X^-$;

в) если $z_1, z_2 \in X^-$, то $z_1 + z_2 \in X^-$;

г) если $z_1 \in X^+$ и $z_2 \in X^-$, то $z_1 + z_2 \in X^+$;

д) $p + 1 \in X^-$ или $p - 1 \in X^-$;

е) если $X^+ \neq \varnothing$ и z — минимальный положительный элемент множества X^+, то $X^+ = \{(2k+1)z\}$, где k пробегает множество целых чисел, и $z < p$;

ж) если m простое, то $M_k = x^+_{2^{k-1}}$.

5. Пусть m — простое число и $n = 2^m - 1$. Докажите, что

а) если n простое, то $M_{m-1} \equiv 0 \mod n$;

б) если $M_{m-1} \equiv 0 \mod n$, то n простое.

Контрольные вопросы

I. Какие из указанных чисел могут быть простыми при некотором $n > 2$?

а) $2^n + 1$; б) $2^n - 1$; в) $3 \cdot 2^n + 1$;
г) $2^{3n} + 1$; д) $2^{3n} - 1$; е) $2^{2^n} + 1$.

II. Вычислите $(2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4$.

а) $97 + 56\sqrt{3}$; б) 126; в) 194.

III. Известно, что число $5 \cdot 2^{n+1} + 1$ делит $2^{5\cdot 2^n} + 1$. Что можно сказать о числе $5 \cdot 2^{n+1} + 1$?

а) Оно простое; б) оно составное; в) оно может быть и простым, и составным, в зависимости от числа n.

Указания и решения

1. а) Действительно, $2^p = 2 \cdot (2^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \mod 3$. Поэтому $n = (2^p - 1)\dfrac{2^p+1}{3}$ составное.

Далее, $2^{2p} = 2^2 \cdot (2^{p-1})^2 \equiv 4 \mod p$. Значит, $2^{2p} - 4$ делится на $2p$. Так как $p > 3$, то $n - 1 = (2^{2p} - 4)/3$ также делится на $2p$. Следовательно, $2^{n-1} = (2^{2p})^{\frac{n-1}{2p}} \equiv 1 \mod (2^{2p} - 1)$. Итак, $2^{n-1} - 1$ делится на $2^{2p} - 1 = 3n$.

б) *Указание.* Можно искать n в виде $n = pqr$, где p, q, r — различные простые числа.

2. а) Действительно,

$$a^{n-1} - 1 = (a^{\frac{n-1}{2}})^2 - 1 = (a^{\frac{n-1}{2}} - 1)(a^{\frac{n-1}{2}} + 1)$$

делится на n по малой теореме Ферма. Поэтому одно из чисел $a^{\frac{n-1}{2}} - 1$, $a^{\frac{n-1}{2}} + 1$ делится на n.

б) Пусть 2^t — наибольшая степень двойки, делящая $\operatorname{ord}_p a$ (см. определение в задаче 9 раздела «Первообразные корни»). Тогда $\operatorname{ord}_p a = 2^t l$, где l нечетно. По задаче 9 а) пункта «Первообразные корни» $p - 1$ делится на $\operatorname{ord}_p a = 2^t l$. Поэтому достаточно доказать, что $t \geqslant s$.

По задаче 9 а) раздела «Первообразные корни» $n-1=2^s k$ делится на $\mathrm{ord}_p\, a = 2^t l$. Значит, k делится на l. Если $t<s$, то $(n-1)/2=2^{s-1}k$ делится на $2^t l$. Отсюда $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \mod p$, что противоречит $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \mod n$.

в) Если n составное, то у него имеется простой делитель $p \leqslant \sqrt{n}$. По предыдущему пункту $p \geqslant 2^s+1$, откуда $n \geqslant (2^s+1)^2$. Это противоречит тому, что $n=2^s k+1 \leqslant (2^s)^2+1$.

5. а) $2+\sqrt{3}=((1+\sqrt{3})/\sqrt{2})^2$.

Алгоритм Евклида для гауссовых чисел (10–11)

А. Я. Канель-Белов

Всем хорошо знаком алгоритм Евклида. Даны два числа a, b. Из них выбирается большее, из большего вычитается меньшее, и большее заменяется на разность, с новой парой чисел производится та же процедура. С помощью алгоритма Евклида доказываются арифметические свойства чисел, и это вы изучали раньше. Приведем принципиально новые (для большинства школьников) его применения.

В этом разделе используется понятие комплексных чисел.

1. Решите уравнения в целых числах.
а) $x^2+4=y^3$, б) $x^2+2=y^n$, в)* $x^3+y^3=z^3$.

Попробуйте порешать их, не читая дальнейшего! Впрочем, у вас вряд ли получится. Возвращайтесь к этой задаче по мере чтения дальнейшего материала.

При решении уравнения $x^2+4=y^3$ в целых числах хочется действовать так: $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$, а дальше при нечетном x оба эти множители взаимно просты, и потому оба кубы. Из этого вытягивается решение. (Случай четного x хитрее: обе скобки могут делиться на $(1+i)^3$.) Попробуйте довести решение, а затем сравнить с приведенным в конце темы.

Одним словом, хочется наслаждаться дополнительными возможностями при разложении на множители за счет использования *гауссовых чисел*, т. е. чисел вида $a+bi$ с целыми a и b. Однако не всё коту масленица — так получается не всегда, но иногда все же получается. Чтобы применять разложение на множители для решения уравнений, нужна *однозначность разложения на простые множители.* Если она имеет место, то мы имеем все те же арифметические удовольствия, что и для целых чисел. Следующая задача показывает удивительный факт: для *арифметических* удовольствий достаточно доказать *геометрический* факт о возможности деления с остатком.

2. Будем называть *простыми* те гауссовы числа, которые не раскладываются на (отличные от ± 1 и $\pm i$) множители.

а) Однозначность разложения на простые множители вытекает из следующего свойства (аналога основной леммы арифметики).

Факториальность. *Если простое число p делит ab, то p делит a или p делит b.*

б) Факториальность вытекает из следующего свойства.

Главноидеальность. *Пусть d есть наибольший общий делитель чисел a, b* (дайте его определение самостоятельно!). *Тогда $ma + nb = d$ для некоторых чисел m, n.*

в) Главноидеальность обеспечивается возможностью делить с остатком (причем остаток должен быть меньше делителя). То есть она вытекает из следующего свойства.

Евклидовость. *Для любых чисел a, b существует такое число k, что $|a - kb| < |b|$.*

Про обычные числа и многочлены вы все знаете. *Докажем евклидовость множества целых гауссовых чисел.* Покажем, как разделить a на b. Множество чисел $(p + qi)b$, кратных b, образуют квадратную решетку со стороной $|b|$. Число a попадает в один из образовавшихся квадратиков. Остается воспользоваться геометрическим фактом: *расстояние от точки внутри квадрата до ближайшей вершины строго меньше длины стороны квадрата.*

3. Верна ли евклидовость (и, значит, факториальность!) в множестве чисел вида $a + b\xi$, где ξ есть

а) $\sqrt{-2}$? б) $\sqrt{-3}$? в) $(1 - \sqrt{-3})/2$?
г) $(1 - \sqrt{-5})/2$? д) $(1 - \sqrt{-7})/2$?

4. Эту задачу проще решать без гауссовых чисел, однако потренируйтесь их применять!

а) Докажите что простое число вида $4k - 1$ не разлагается в сумму двух квадратов, а простое вида $4k + 1$ разлагается одним способом.

б) Докажите, что существует число, ровно 1024 способами разлагающееся в сумму двух квадратов.

Дополнение

Следующие две задачи посвящены алгоритму Евклида для вещественных чисел, т. е. цепным дробям.

5. От прямоугольника отрезают квадрат и с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Может ли последовательность отношений сторон у этих прямоугольников быть периодической, если одна из сторон исходного прямоугольника равна 1, а другая равна

а) $\sqrt{2}$; б) $(1+\sqrt{5})/2$; в) $\sqrt[3]{2}$; г)* $\sqrt{2005}$?

6*. Пусть α — иррациональное число. Применим к паре $(\alpha, 1)$ алгоритм Евклида. Докажите что получившиеся числа будут величинами наилучших приближений (по недостатку или по избытку) αn к целым.

Число αn называется *наилучшим приближением*, если при всех $1 \leqslant m < n$ расстояние от αn до ближайшего целого меньше расстояния αm до ближайшего целого. Аналогично определяются наилучшие приближения *по недостатку* и *по избытку*.

Зачетные задачи: 1 б); 2 а)–в); 3 а)–г); 4 а), б).

Указания и решения

1. а) *Ответ.* $x = \pm 2$, $y = 2$ и $x = \pm 11$, $y = 5$.

Решение (Р. А. Девятов). Перейдем к целым гауссовым и получим уравнение: $(x+2i)(x-2i) = y^3$.

Целое гауссово число называется *точным кубом*, если оно равно b^3 для некоторого целого гауссова b. Заметим, что «обратимые» числа ± 1, $\pm i$ все являются точными кубами. Поэтому точным кубом является любое целое гауссово число, представимое в виде ωa^3, где a — целое гауссово число и ω — одно из «обратимых» чисел $\pm 1, \pm i$. Поэтому мы будем называть точными кубами числа такого вида.

Два целых гауссовых числа a и b называются *ассоциированными*, если $a = \omega b$, где ω — одно из «обратимых» чисел ± 1, $\pm i$.

Лемма. *Оба числа $x+2i$ и $x-2i$ являются точными кубами.*

Доказательство. Будем использовать единственность разложения на простые гауссовы множители с точностью до умножения на «обратимые» числа $\pm 1, \pm i$. Пусть $d = \text{НОД}\,(x+2i, x-2i)$. Тогда $x + 2i - (x-2i) = 4i = -i(1+i)^4$ делится на d. Так как число $1+i$ простое, то d — степень числа $1+i$, причем не более чем четвертая.

Заметим, что разложение на простые целые гауссовы для числа $x-2i$ отличается от разложения $x+2i$ заменой всех простых множителей на сопряженные.

Так как $1+i = i(1-i)$, то степени, в которых $1+i$ входит в разложение чисел $x+2i$ и $x-2i$ на множители, одинаковы. Обозначим их через k. Тогда y^3 делится на $1+i$ во вдвое большей степени $2k$. Так как $2k$ делится на 3, то и k делится на 3. Так как d — степень $(1+i)$, причем не более чем четвертая, то $x+2i$ либо не делится на $1+i$, либо делится на $(1+i)^3$.

Если $x+2i$ не делится на $1+i$, то $x+2i$ и $x-2i$ взаимно просты. Так как их произведение $(x+2i)(x-2i)$ является точным кубом, то сами числа $x+2i$ и $x-2i$ в этом случае являются точными кубами.

Если $x+2i=a(1+i)^3$ для некоторого целого гауссова a, то и $x-2i=b(1+i)^3$ для некоторого целого гауссова b. Тогда $y^3=ab(1+i)^6$, т. е. y^3 делится на $(1+i)^6$. Значит, y делится на $(1+i)^2$. Поэтому $ab=\left(\frac{y}{(1+i)^2}\right)^3$, т. е. ab является точным кубом. Но a и b взаимно просты, поэтому сами являются точными кубами. А значит, и $x+2i=a(1+i)^3$, и $x-2i=b(1+i)^3$ являются точными кубами. $\square$

Продолжение решения. Пусть

$$x+2i=(c+di)^3=c^3+3c^2di+3cd^2i^2+d^3i^3=c^3-3cd^2+(3c^2d-d^3)i.$$

Приравняем мнимые части: $2=3c^2d-d^3$, $2=d(3c^2-d^2)$. Это равенство обычных целых чисел, поэтому можно разобрать только 2 случая: $d=\pm2$ и $d=\pm1$.

Случай 1. $d=\pm1$. Тогда $3c^2-1=\pm2$, т. е. $3c^2=-1$ или 3. Но -1 оно равняться не может, значит, $c=\pm1$, $c+di=1+i$ или ассоциировано с ним, $x+2i=2+2i$ или ассоциировано с ним, откуда $x=\pm2$, $y=2$.

Случай 2. $d=\pm2$. Тогда $3c^2-2=\pm1$, т. е. $3c^2=1$ или 3. Но 1 оно равняться не может, значит, $c=\pm1$, $c+di=2+i$ или ассоциировано с ним, $x+2i=11+2i$ или ассоциировано с ним, откуда $x=\pm11$, $y=5$.

б) Используйте 3 а).

в) Используйте 3 в).

2. б) Если p не делит b, то тогда $pm+bn=1$. Если при этом p делит ab, то тогда p делит $nab+mpa$, т. е. p делит a.

в) Положим $a'=a-kb$. Любой общий делитель чисел a',b является общим делителем чисел a,b. В то же время множество чисел вида $ma'+nb$ содержит a (и, разумеется, b), а значит, и любое число вида $pa+qb$. Аналогично можно убедиться в обратном — что множество чисел вида $pa+qb$ содержит множество чисел вида $ma'+nb$. Итак, пару (a,b) можно заменить на пару (a',b), которая в разумном смысле «меньше». Процесс останавливается на паре $(s,0)$, т. е. на нахождении наибольшего общего делителя.

3. а) Аналогично задаче 1 г). Необходимый геометрический факт: *любая точка внутри прямоугольника $\sqrt{2}\times1$ удалена на расстояние строго меньше 1 от ближайшей вершины.*

б) Факториальность неверна: $4=2\cdot2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$.

1–3. См. книгу: *Постников М. М.* Теорема Ферма: введение в теорию алгебраических чисел. § 4. М.: Наука, 1978.

5, 6. См. книгу: *Арнольд В. И.* Цепные дроби. М.: МЦНМО, 2000.

Разные задачи по элементарной теории чисел

Разные задачи (8–9). ***А. И. Галочкин***

1. Дискретность множества целых чисел. Решите уравнения в целых положительных числах:

а) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$;

б) $4xy+4yz+4xz=5xyz+14$;

в) $y^3=x^3+9x^2+17$;

г) $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$ (в целых числах).

д) Пусть x, y, z, u, v, w — такие целые положительные числа, что

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{2003}{z}}=u+\cfrac{1}{v+\cfrac{2003}{w}}.$$

Найдите наибольшее возможное значение разности $y-v$.

2. Десятичная система счисления. Признаки делимости.

а) В числе 65 432 789 вычеркните наименьшее число цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

б) Для того чтобы число делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы разность между числом с отброшенной последней цифрой и удвоенной последней цифрой делилась на 7.

в) Если число делится на 1998 и между любыми его цифрами вставить подряд три нуля, то вновь получившееся число тоже будет делиться на 1998.

г) Число $\dfrac{5}{17}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, вычеркнули первую цифру после запятой и получившееся число обратили в обыкновенную дробь. Какая дробь получилась?

д) В последовательности $[2^n\sqrt{2}]$ имеется бесконечное множество четных чисел.

3. Теорема единственности разложения чисел в произведение простых сомножителей. Метод спуска. Решите в целых числах уравнения:

а) $3\cdot 2^x+1=y^2$; б) $x^2+y^2+z^2=2xyz$;

в) $x^2+y^2=z^2$; г) $x^4+y^4=z^2$.

4. Применение принципа Дирихле.

а) Если $(a, m)=1$, то разрешимо сравнение $a^x\equiv 1 \mod m$.

б) Если p — простое число, то разрешимо сравнение $1+x^2+y^2\equiv 0 \mod p$.

в) Разрешимо сравнение $ax+by\equiv 0 \mod m$ для некоторых $|x|,\ |y|\leqslant \leqslant \sqrt{m}$, $|x|+|y|\neq 0$.

г) Если m — нечетное число, не кратное пяти, то существует число, делящееся на m, десятичная запись которого состоит из одних единиц.

5. Применение формул.

а) Любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.

б) Если $m^2+mn+9n^2$ делится на 35^2, то m и n делятся на 35.

6. Целая часть числа. Решите уравнения

а) $x^2=[3x]$; б) $[x]+[3x]+[5x]=100$; в) $x^2-5[x]+4=0$.

Указания

3. в) Достаточно решить для взаимно простых x и z. Тогда $y^2 = (z-x)(z+x)$, где $(z-x, z+x)\in\{1,2\}$.

г) Используйте в). *Ответ*: нет решений.

Разные задачи (8–10). *Д. А. Пермяков, И. Н. Шнурников*

1. Пусть p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа $p^n\cdot q^m$?

2. Найдите остаток от деления 6^{100} на 7.

3. Докажите, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

4. а) Докажите, что $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ делится на n при нечетном n.

б) Найдите все натуральные $n>1$, такие что $1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n$ делится на n.

5. Назовем натуральное число n удобным, если n^2+1 делится на 1 000 001. Докажите, что среди чисел 1, 2, …, 1 000 000 четное число удобных.

6. Докажите, что $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

7. Найдите остаток от деления на 7 числа

$$10^{10}+10^{100}+10^{1000}+\ldots+10^{10\,000\,000\,000}.$$

8. Пусть $56a=65b$. Докажите, что $a+b$ — составное число.

9. Докажите, что число является точным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число натуральных делителей.

10. а) Пусть $p>5$ — простое число. Докажите, что существует число вида $111\ldots111$, которое делится на p.

б) Пусть n — натуральное число, взаимно простое с 10. Докажите, что существует число вида $111\ldots111$, которое делится на n.

11*. Пусть n — натуральное число, такое что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

12*. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

13*. Докажите, что существует не менее 100 значений $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, таких что и $\sin\alpha$, и $\cos\alpha$ рациональны.

14. Для любого целого n число $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ не целое.

15. Покажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много пар взаимно простых чисел a, b, таких что a делит $n+b^2$ и b делит $n+a^2$.

16. Докажите, что для каждого натурального числа $n>1$ найдется кратное ему число $m<n^4$, в десятичной записи которого используется не более 4 различных цифр.

17. Найдите все натуральные числа n, для которых все n чисел, состоящие из $n-1$ цифры 1 и одной цифры 7, простые.

18. Решите уравнение $3^m + 4^n = 5^k$ в натуральных числах.

19. Найдите все нечетные числа $n>1$, для которых существует такая перестановка a_1, a_2, ..., a_n чисел 1, 2, ..., n, что все n следующих выражений положительны: $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_n$, $a_2 - a_3 + a_4 - \ldots - a_n + a_1$, $a_3 - a_4 + \ldots + a_n - a_1 + a_2$, ..., $a_n - a_1 + a_2 - \ldots + a_{n-1}$.

20. Существует ли множество из 2007 натуральных чисел, сумма любого подмножества которых есть квадрат, куб или бóльшая степень целого числа?

21. Докажите, что в любое конечное множество натуральных чисел можно добавить еще несколько чисел так, что каждое число из полученного набора будет делить сумму всех остальных чисел набора.

Контрольные вопросы

I. Выберите все значения n из приведенных ниже, при которых $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n.

а) 7; б) 8; в) 10.

II. Существует ли простое число вида $111\ldots111$, где количество единиц равно $3n$?

а) Существует; б) не существует.

Разные задачи (10–11). *И. Н. Шнурников, А. Засорин*

1. Найдите все целые числа n, для которых
а) n^2+1 делится на $n+1$; б) $n-3|n^3-3$.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых число $4n^2+1$ делится одновременно и на 13, и на 5.

3. Докажите, что для всех натуральных n имеем:
а) $169|3^{3n+3}-26n-27$;
б) $19|2^{2^{6n+2}}+3$;
в) $F_n|2^{F_n}-2$, где $F_n=2^{2^n}+1$;
г) $3\cdot(1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5)$ делится на $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;
д) $n^2|(n+1)^n-1$;
е) $(2^n-1)^2|2^{(2^n-1)n}-1$.

4. Докажите, что а) $13|2^{70}+3^{70}$; б) $11\cdot31\cdot61|20^{15}-1$.

5. а) Докажите, что существует бесконечное число таких натуральных чисел n, что $n|2^n+1$.
б) Найдите все такие простые числа n.

6. Докажите, что если k нечетное, а n натуральное, то $2^{n+2}|k^{2^n}-1$.

7. Докажите, что для натуральных m и $a>1$ имеем: $\left(\dfrac{a^m-1}{a-1}, a-1\right)=$ $=(a-1,m)$.

8. Исследовать, в зависимости от натурального числа n, какое из чисел $a_n=2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ и $b_n=2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ делится и какое не делится на 5.

9. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует такое натуральное число x, что каждый из членов бесконечной последовательности $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ делится на n.
б) Докажите, что существует бесконечно много нечетных чисел n, для которых ни при каком четном x ни одно из чисел бесконечной последовательности $x^x+1, x^{x^x}+1, x^{x^{x^x}}+1, \ldots$ не делится на n.
См. также задачи 4 б) и 10–14 предыдущего раздела.

Указания и решения

1. а) *Ответ*: $\{-3;-2;0;1\}$.
Пусть $n+1|n^2+1$. Тогда $n+1|n^2+1-(n+1)(n-1)=2$. Значит, $n+1=\pm2$ или $n+1=\pm1$. Тогда находим $n=-3,-2,0$ или 1. Проверкой убеждаемся, что все такие значения n подходят.

Разные задачи[4] **(10–11).** ***А. Я. Канель-Белов***

2000, 5. Существует ли такое целое n, имеющее ровно 2000 различных простых делителей, что 2^n+1 делится на n?

2002, 3. Найдите все такие целые $m, n \in \{1, 2, 3\}$, что для бесконечного количества целых чисел $a > 0$ число $a^m + a - 1$ делится на $a^n + a^2 - 1$.

2003, 2. Найдите все пары (a, b) целых положительных чисел, для которых a^2 делится на $2ab^2 - b^3 + 1$.

2003, 6. Пусть p — простое число. Докажите, что для некоторого простого q число $n^p - p$ не делится на q ни при каком n.

2005, 4. Найдите все целые числа, взаимно простые с $2^n+3^n+6^n-1$ для любого n.

2006, 5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(P(\ldots(x)\ldots))$, где P применен k раз ($k>0$). Докажите, что существует не более n таких целых чисел t, что $Q(t)=t$.

2007, 5. Пусть a и b — положительные целые числа, для которых $4ab-1$ делит $(4a^2-1)^2$. Докажите, что $a=b$.

1. а) Число x оканчивается на 2. После того как его последнюю цифру переставили в начало, оно удвоилось. Найдите все такие x.

б) Последнюю цифру числа x переставили в начало. Оно удвоилось. Докажите, что x есть циклический сдвиг периода дроби $\dfrac{2}{19}$.

2. Даны числа R и m. Последовательность задана рекуррентно: a_0 задано, $a_{n+1} = m^{a_n}$. Докажите, что остатки a_n от деления на R стабилизируются.

3. Докажите, что если p простое и $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{p} = \dfrac{m}{n}$, то

а) $p|m$; б) $p^4|(np-m)$.

4*. Натуральный ряд разбит на несколько арифметических прогрессий. Докажите, что у двух из них разность совпадает.

5*. Положим $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 9^{a_n}$. Докажите, что в десятичном разложении числа $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ встречается любая комбинация цифр.

6. При каком наименьшем n из любых n чисел можно выбрать k ($k>0$), попарно сравнимых по модулю m ($m>0$)?

---

[4] Указаны год и номер задачи на Международной математической олимпиаде.

Указания

2005, 4. Возьмите простое $n = (n-1)+1$ и покажите, что тогда $2^n + 3^n + 6^n - 1$ делится на n.

2003, 6. Используйте индексы и свойства круговых многочленов.

2002, 3. Используйте соображения типа алгоритма Евклида и деление с остатком.

2003, 2. Используйте идею размножения решений по Виету (как для уравнения Маркова[5)]). Если $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1)$, то a есть корень квадратного уравнения $a^2 - 2akb^2 + (b^3-1)k = 0$. Случай $a \leqslant b$ легко разбирается. Далее, если написанное квадратное уравнение имеет целое решение, то оно имеет (в силу теоремы Виета) и другое целое решение. Хотя бы одно из этих решений $a_1 \leqslant a_2$ меньше b, поскольку $0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b$.

2006, 5. Рассмотрите орбиты под действием многочлена P и используйте то, что $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

5. См. *Ерошин А. Е.* Периодические десятичные дроби // Матем. просв. №8. С. 239–245. М.: МЦНМО, 2004.

[5)] См.: *Крейн М.* Диофантово уравнение А. А. Маркова // Квант. 1985. №4.

Часть II

ГЕОМЕТРИЯ

Г Л А В А 4

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Всюду в данной главе, кроме специально оговоренных случаев, используются обозначения: ABC — данный треугольник, A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — точки на сторонах BC, CA и AB соответственно (или на продолжениях этих сторон, если это оговорено в условии задачи); ω — вписанная окружность, I — ее центр, r — ее радиус; Ω — описанная окружность, O — ее центр, R — ее радиус; G — точка пересечения медиан (центр тяжести, центроид), H — точка пересечения высот (ортоцентр). Проведем биссектрисы AI, BI, CI до пересечения с Ω в точках A', B', C' соответственно. Таким образом, A', B', C' — середины дуг AB, BC, CA. *Ортотреугольник* — треугольник с вершинами в основаниях высот, *серединный треугольник* — треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника. Перпендикуляр, опущенный из точки A на BC, обозначается $h(A, BC)$.

Принцип Карно (8–9)

В. Ю. Протасов, А. А. Гаврилюк

1. Теорема Карно. В точках A_1, B_1, C_1, лежащих на сторонах треугольника ABC, или на их продолжениях, восставлены перпендикуляры к этим сторонам. Докажите, что они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$C_1A^2 - C_1B^2 + A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = 0.$$

2. Сформулируйте и докажите теорему Карно для произвольных точек плоскости A_1, B_1, C_1, не обязательно лежащих на прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

3. Пусть вневписанная окружность треугольника касается его стороны AB в точке C_1 и касается продолжений двух других сторон. Аналогично определяются точки A_1 и B_1. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках A_1, B_1, C_1 пересекаются в одной точке.

4. На плоскости даны три пересекающиеся окружности. Докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке.

5. Пользуясь предыдущей задачей, получите еще одно доказательство теоремы о пересечении трех высот треугольника.

Степенью точки относительно окружности называется число d^2-R^2, где R — радиус окружности, и d — расстояние от ее центра до данной точки. Для точки, лежащей внутри окружности, степень равна (взятому со знаком минус) произведению отрезков любой хорды, проходящей через эту точку. Для точки, лежащей вне окружности, степень равна произведению любой секущей, проходящей через эту точку, на ее внешнюю часть, а также равна квадрату отрезка касательной от данной точки до точки касания.

6. Докажите, что геометрическим местом точек, степени которых относительно двух данных окружностей равны, является прямая, перпендикулярная линии центров окружностей (*радикальная ось*).

7. Охарактеризуйте все треугольники, у которых перпендикуляры к сторонам, восставленные в точках пересечения сторон с биссектрисами противоположных углов, пересекаются в одной точке.

8. На сторонах треугольника ABC построены прямоугольники ABB_1A_1, BCC_2B_2 и CAA_2C_1. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

9. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC соответственно. B_2 — основание перпендикуляра из точки B на A_1C_1. Аналогично определены A_2 и C_2. Докажите, что $h(C_1, A_2B_2)$, $h(B_1, A_2C_2)$ и $h(A_1, B_2C_2)$ пересекаются в одной точке.

10. Докажите, что $h(A, B_1C_1)$, $h(B, A_1C_1)$ и $h(C, A_1B_1)$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $h(A_1, BC)$, $h(B_1, AC)$ и $h(C_1, AB)$ пересекаются в одной точке.

11. Даны равносторонний треугольник ABC и точка D. Пусть A_1 — центр вписанной окружности треугольника BCD. Аналогично определены точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые $h(A, B_1C_1)$, $h(B, A_1C_1)$ и $h(C, A_1B_1)$ пересекаются в одной точке.

12. На плоскости даны 2 различные точки A, B и числа α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$. Найдите геометрическое место таких точек X, что $\alpha AX^2 + \beta BX^2 = \gamma$.

13. На плоскости даны точки $A_1, \ldots, A_n$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим такие точки X плоскости, что

$$\alpha_1 A_1X^2 + \ldots + \alpha_n A_nX^2 = c.$$

Докажите, что их геометрическое место имеет один из следующих видов, и классифицируйте случаи:

— окружность

— прямая

— точка

— все точки плоскости

— пустое множество

Зачетные задачи: 2, 4–8.

Контрольный вопрос

В каком из следующих случаев перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника, могут не пересекаться в одной точке?

а) A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон с вписанной окружностью.

б) A_2, B_2, C_2 — точки касания сторон с соответствующими вневписанными окружностями.

в) A_3, B_3, C_3 — основания биссектрис треугольника.

Указания и решения

1. Пусть перпендикуляры, восставленые в точках A_1 и B_1, пересекаются в точке M. Применяя к прямоугольным треугольникам CMA_1, BMA_1, AMB_1 и CMB_1 теорему Пифагора, получаем, что $B_1A^2 - B_1C^2 = MA^2 - MC^2$. (Данный прием, когда разность квадратов наклонных заменяется на разность квадратов их проекций, называется *принципом Карно.*)

Пусть теперь перпендикуляры к сторонам треугольника, восставленные в точках A_1, B_1, C_1, пересекаются в точке M. Тогда, применив принцип Карно, получим требуемое равенство.

Обратно, пусть точки A_1, B_1, C_1 таковы, что

$$C_1A^2 - C_1B^2 + A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = 0.$$

Обозначим через M точку пересечения перпендикуляров, восставленных из A_1 и B_1 к соответствующим сторонам, и опустим из M перпендикуляр на AB. Как показано выше, он попадет в точку C_1, ч. т. д.

3. Пусть $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр треугольника. Тогда $BC_1 = CB_1 = p - a$, $AC_1 = CA_1 = p - b$, $AB_1 = BA_1 = p - c$, и утверждение задачи сразу следует из теоремы Карно.

5. *Указание.* Рассмотрите три окружности, построенные на сторонах треугольника как на диаметрах.

Центр вписанной окружности (9–10)

В. Ю. Протасов

Задачи этого раздела близки по тематике задачам разделов «Прямая Эйлера», «Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек», «Биссектрисы, высоты и описанная окружность». Поэтому рекомендуется решать задачи этих разделов параллельно.

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами прямоугольника.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABC и CDA равна сумме радиусов вписанных окружностей треугольников BCD, DAB.

3. Через точку M внутри данного треугольника провели три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника.

а) Докажите, что M лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

Указание. Используйте гомотетию с центром в точке I.

б) Укажите способ построения такой точки M для данного треугольника.

в) Пусть x — радиус данных окружностей. Докажите, что $\frac{2r}{3} \leqslant x \leqslant \frac{R}{3}$. Верно ли, что если одно из неравенств обращается в равенство, то треугольник — правильный?

г) Докажите *неравенство Эйлера:* $R \geqslant 2r$. Для каких треугольников оно обращается в равенство?

4. Каждая из трех равных окружностей касается двух сторон треугольника, четвертая окружность того же радиуса касается этих трех окружностей.

а) Докажите, что центр четвертой окружности лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

б) Укажите способ построения таких окружностей для данного треугольника.

в) Выразите радиус данных окружностей через радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника.

5. Дан треугольник ABC. Точки A_0, B_0, C_0 — середины его сторон. Вписанная окружность касается стороны BC в точке A_1, точка A_2 симметрична A_1 относительно биссектрисы угла A. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые A_0A_2, B_0B_2 и C_0C_2 пересекаются в одной точке.

Зачетные задачи: все, кроме любых четырех пунктов.

Контрольный вопрос

Величина угла AIB равна:
а) $\pi - \angle C$; б) $(\pi + \angle C)/2$; в) $2\angle C$.

Указания и решения

1. Напомним, что для любого треугольника ABC выполнено равенство $\angle AIB = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle ACB$. Поэтому если биссектриса угла C пересекает описанную окружность треугольника в точке C', то $\angle C'IA = \angle C'AI = (\pi - \angle ABC)/2$, и значит, $C'A = C'I = C'B$. Пусть теперь I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Тогда точки A, B, I_c, I_d лежат на одной окружности, следовательно, $\angle BI_dI_c = \pi - \angle BAI_c = \pi - \angle BAD/2$. Аналогично $\angle BI_dI_a = \pi - \angle BCD/2$. Значит, $\angle I_aI_dI_c = (\angle BAD + \angle BCD)/2 = \pi/2$.

3. в) *Указание.* Три треугольника, гомотетичные данному относительно его вершин с коэффициентом $\dfrac{2}{3}$, имеют единственную общую точку. Из этого следует, что x не может быть меньше, чем $\dfrac{2r}{3}$. Далее, из подобия исходного треугольника и треугольника с вершинами в центрах данных окружностей следует, что $\dfrac{x}{R} = \dfrac{r-x}{r} = 1 - \dfrac{x}{r} \leqslant 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Прямая Эйлера (9–10)

В. Ю. Протасов

Задачи этого раздела близки по тематике задачам разделов «Центр вписанной окружности», «Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек», «Биссектрисы, высоты и описанная окружность». Поэтому рекомендуется решать задачи этих разделов параллельно.

Напоминание. В любом треугольнике точки O, G и H лежат на одной прямой (*прямой Эйлера*), причем $GH = 2 \cdot GO$.

1. Докажите, что прямая Эйлера параллельна стороне AB тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\angle B = 3$.

2. Прямая Эйлера треугольника параллельна одной из его биссектрис. Докажите, что либо треугольник равнобедренный, либо один из его углов равен 120°.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 120^\circ$. Докажите, что $OH = AB + AC$.

4. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.

5. Все углы треугольника ABC меньше 120°, T — его *точка Торричелли* (т. е. точка, для которой выполнено равенство $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$).

а) Докажите, что прямая Эйлера треугольника ATB параллельна прямой CT.

Указание. Можно воспользоваться задачей 2.

б) Докажите, что прямые Эйлера треугольников ATB, BTC и CTA пересекаются в одной точке.

6. В вершинах треугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что центр описанной окружности треугольника, образованного этими тремя касательными, лежит на прямой Эйлера исходного треугольника.

Контрольный вопрос

Прямая Эйлера неравнобедренного треугольника проходит через одну из его вершин. Чему равен угол в этой вершине?

а) 90°; б) 120°; в) 60°; г) таких треугольников не существует.

Указания и решения

1. Так как расстояние от O до AB равно $R\cos C$, а высота проведенная из вершины C, равна $AC\sin A = 2R\sin A\sin B$, то параллельность прямой Эйлера и AB равносильна равенству $3\cos C = 2\sin A\sin B$. Учитывая, что $\cos C = -\cos(A+B) = \sin A\sin B - \cos A\cos B$, получаем утверждение задачи.

4. Из условия следует, что степени точки O относительно этих окружностей равны R^2. Кроме того, если AA' и BB' — высоты треугольника, то четырехугольник $ABA'B'$ — вписанный, и значит, $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$. Поэтому степени точки H относительно всех трех окружностей также равны, т. е. прямая OH является их общей радикальной осью.

Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек (9–10)

В. Ю. Протасов

Задачи этого раздела близки по тематике задачам разделов «Центр вписанной окружности», «Прямая Эйлера», «Биссектрисы, высоты и описанная окружность». Поэтому рекомендуется решать задачи этих разделов параллельно.

1. Внутри равностороннего треугольника ABC найти геометрическое место точек M, для которых $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = 90°$.

2. Пусть a, b, c — длины сторон остроугольного треугольника, u, v, w — расстояния от соответствующих вершин до ортоцентра. Докажите, что $avw + bwu + cuv = abc$.

3. Дан остроугольный треугольник. Найдите для него все *треугольные бильярды*, т. е. все вписанные в него треугольники, обладающие следующим свойством: две стороны, выходящие из любой вершины вписанного треугольника образуют равные углы с соответствующей стороной данного треугольника.

4. Пусть $A_1B_1C_1$ — ортотреугольник треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — проекции вершин A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_2, B_2, C_2 на прямые BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь принципом Карно.

5. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника и относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

Применив результат задачи 5 и гомотетию с коэффициентом $\frac{1}{2}$, решите следующую задачу:

6. Докажите, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности (*окружность девяти точек*). Радиус этой окружности равен $\frac{R}{2}$, а центр находится в середине отрезка OH.

7. Длины сторон остроугольного треугольника умножили на косинусы противоположных углов. Докажите, что из трех получившихся отрезков можно сложить треугольник. Чему равен радиус его описанной окружности, если радиус описанной окружности исходного треугольника равен R?

8. Теорема Тебо. Пусть ABC — данный треугольник, $A_1B_1C_1$ — его ортотреугольник. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CB_1A_1 пересекаются в одной точке, лежащей на окружности девяти точек треугольника ABC.

9. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABC, BCD, CDA, DAB пересекаются в одной точке.

10. Теорема Брахмагупты. Дан вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон, делит противоположную сторону пополам.

11. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что восемь точек: середины сторон и проекции середин сторон на противоположные стороны лежат на одной окружности (*окружность восьми точек* четырехугольника).

Зачетные задачи: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11.

Контрольный вопрос

Пусть AA', BB', CC' — высоты треугольника ABC. Тогда его ортоцентр H является

а) ортоцентром;

б) центром тяжести;

в) центром описанной окружности;

г) центром вписанной окружности

треугольника $A'B'C'$?

Указания и решения

2. Так как $\angle AHB = \pi - \angle ACB$, радиус описанной окружности треугольника AHB равен R. Аналогично равны R радиусы описанных окружностей треугольников BHC и CHA. Поэтому утверждение задачи следует из того, что $S_{ABC} = S_{AHB} + S_{BHC} + S_{CHA}$ и формулы $S = \dfrac{abc}{4R}$.

5. Пусть точки H_1, H_2 симметричны H относительно прямой AB и середины отрезка AB. Тогда радиусы окружностей, описанных около равных треугольников AHB, AH_1B и BH_2A, равны. Поскольку точки H_1, H_2 не лежат на окружности ABH, они лежат на равной ей окружности ABC.

8. Треугольник CB_1A_1 является образом треугольника CAB при композиции гомотетии с центром C и симметрии относительно биссектрисы угла C. Поэтому угол между прямыми Эйлера треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1 равен углу C. Кроме того, центрами окружностей, описанных около этих треугольников, являются середины отрезков HA и HB. Таким образом, отрезок между этими центрами виден из точки пересечения двух прямых Эйлера под углом C и, значит, эта точка лежит на окружности Эйлера. Тогда третья прямая пересекает окружность Эйлера в той же точке.

Несколько неравенств, связанных с треугольником (10–11)

В. Ю. Протасов

1. а) Верно ли, что площадь ортотреугольника не превосходит площади серединного треугольника?

б) Тот же вопрос, но теперь известно, что треугольник — остроугольный.

2. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A', B', C'. Докажите, что $S_{AC'BA'CB'} \geqslant 2S_{ABC}$.

3. Найдите наименьшее α, для которого верно следующее утверждение.

В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Тогда $S_{PAQ} < S_{BMC}$.

В задачах 4–7 мы обозначаем через a, b, c длины сторон данного треугольника, x, y, z — расстояния от произвольной точки M внутри треугольника до его сторон, а u, v, w — расстояния от нее до вершин треугольника.

4. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеют место неравенства:

а) $u \geqslant \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z$; б) $u \geqslant \frac{c}{a}y + \frac{b}{a}z$.

5. Покажите, что внутри остроугольного треугольника найдется единственная точка M, для которой все три неравенства из пункта а) задачи 4 (для трех вершин треугольника) обращаются в равенства. Что это за точка? Тот же задание про три неравенства из пункта б).

6. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеем $u + v + w \geqslant 2(x + y + z)$ (*неравенство Эрдёша*). Для каких треугольников и каких точек M это неравенство обращается в равенство?

7. Докажите, что для произвольной точки M, лежащей внутри треугольника, имеем

$$2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) \leqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

8. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что один из углов $\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA$ не превосходит $30°$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для четырехугольника.

Зачетные задачи: 1 а); 2, 3, 4 а), б); 5 а), б); 6, 7.

Указания и решения

1. б) Докажем более общее утверждение: если точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB и прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то

$$S_{A'B'C'} \leqslant \frac{S_{ABC}}{4}.$$

Прежде всего отметим, что для любых точек A', B', C', лежащих на сторонах треугольника ABC,

$$S_{A'B'C'} = \frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + BA' \cdot CB' \cdot AC'}{4R}.$$

Действительно, обозначив $AC'/AB = \gamma$, $CA'/CA = \beta$, $BA'/BC = \alpha$, получим, что $S_{A'B'C} = \beta(1-\alpha)S_{ABC}$. Используя это и два аналогичных равенства, получаем

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} - S_{A'B'C} - S_{A'BC'} - S_{AB'C'} = \\ = S_{ABC}(\alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)).$$

Заменив S_{ABC} на $\dfrac{abc}{4R}$, получим требуемое равенство.

Если отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы $AB' \cdot BC' \cdot CA' = BA' \cdot CB' \cdot AC'$ и

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + BA' \cdot CB' \cdot AC' = \\ = \sqrt{(AB' \cdot B'C) \cdot (BC' \cdot C'A) \cdot (CA' \cdot A'B)} \leqslant \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{8},$$

откуда сразу следует искомое неравенство.

3. *Указание.* Докажите сначала, что треугольник BMC подобен треугольнику QIP, где I — центр вписанной окружности треугольника PAQ. Кроме того, $S_{QIP}/S_{PAQ} = PQ/p$, где p — периметр треугольника PAQ. Полезен будет также тот факт, что $p = 2AB$.

4. а) *Указание.* Выразите двумя способами площадь невыпуклого четырехугольника со сторонами b, c, w, v.

б) *Указание.* Рассмотрите точку, симметричную точке M относительно соответствующей биссектрисы треугольника.

6. *Указание.* Сложите все 6 неравенств из задачи 4 и воспользуйтесь неравенством $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$, $t > 0$.

Биссектрисы, высоты и описанная окружность (9–10)

П. А. Кожевников

В предлагаемой серии задач связываются в единую конструкцию классические элементы треугольника. Задачи этого раздела близки по тематике задачам разделов «Центр вписанной окружности», «Прямая Эйлера», «Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек». Поэтому рекомендуется решать задачи этих разделов параллельно.

1. Докажите, что треугольники $AB'C'$ и $IB'C'$ равны (и аналогично $\triangle CA'B' = \triangle IA'B'$, $\triangle BC'A' = \triangle IC'A'$).

2. Докажите, что AA', BB', CC' — высоты треугольника $A'B'C'$.

3. Лемма о трезубце. Докажите, что $A'I = A'B = A'C$ (и аналогично $B'I = B'C = B'A$, $C'I = C'A = C'B$).

4. Докажите, что диагонали шестиугольника в пересечении треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точке I и параллельны сторонам треугольника ABC.

5[1]**.** Докажите, что $\dfrac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \dfrac{2r}{R}$.

Пусть гомотетия с центром I и коэффициентом 2 переводит треугольник $A'B'C'$ в треугольник $I_aI_bI_c$.

6. Докажите, что I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC.

Пусть A'', B'', C'' — середины дуг BAC, CBA, ACB окружности Ω соответственно.

7. Докажите, что A'', B'', C'' — середины отрезков I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

[1] См. Задачник Кванта. Математика. 1982 г. № 10.

Пусть ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно.

8. Докажите, что прямые A_1A'', B_1B'', C_1C'' проходят через одну точку.

9. Докажите, что прямая IO проходит через ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

Указания и решения

1. Имеем (см. рис. 1) $\angle AB'C' = \angle ACC' = \angle BCC' = \angle BB'C'$, т. е. $\angle AB'C' = \angle IB'C'$. Аналогично $\angle AC'B' = \angle IC'B'$.

2. Из задачи 1 следует, что точки A и I симметричны относительно $B'C'$. Отсюда $AI \perp B'C'$.

Таким образом, на одной картинке можно изучать биссектрисы (треугольника ABC) и высоты (треугольника $A'B'C'$). Треугольник $A'B'C'$ может быть произвольным остроугольным (как подобрать соответствующий треугольник ABC?). Симметрия A и I относительно $B'C'$ означает следующее важное свойство ортоцентра: точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно одной из его сторон, лежит на описанной окружности.

3. Из задачи 1 следует, что $B'A = B'I$. Аналогично $B'C = B'I$.

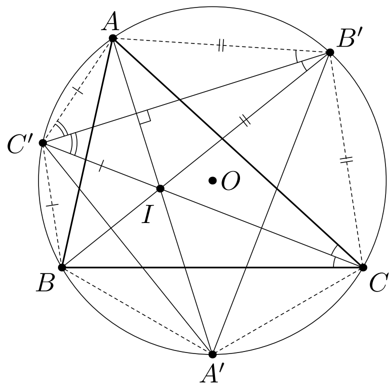


Рис. 1

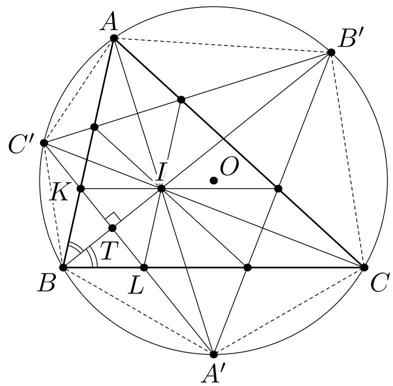


Рис. 2

4. Пусть (см. рис. 2) $K = AB \cap A'C'$, $L = BC \cap A'C'$, $T = BI \cap KL$. Так как $BI \perp KL$, то $\triangle BKT = \triangle BLT$, откуда $KT = LT$. Так как $BT = IT$ (задача 1), то $KBLI$ — ромб и $KI \parallel BC$. Аналогично $LI \parallel BC$.

5. Посчитаем площадь S шестиугольника $AB'CA'BC'$ двумя способами. С одной стороны,

$$S = S(AB'IC') + S(BC'IA') + S(CA'IB') = \\ = 2(S(B'IC') + S(C'IA') + S(A'IB')) = 2S(A'B'C').$$

С другой стороны,

$$S = S(OAB'C) + S(OBC'A) + S(OCA'B) = \\ = \frac{1}{2}(OB' \cdot AC + OC' \cdot BA + OA' \cdot CB) = \frac{R(AC + BA + CB)}{2} = \frac{R \cdot S(ABC)}{r}.$$

Приравнивая, получаем требуемое.

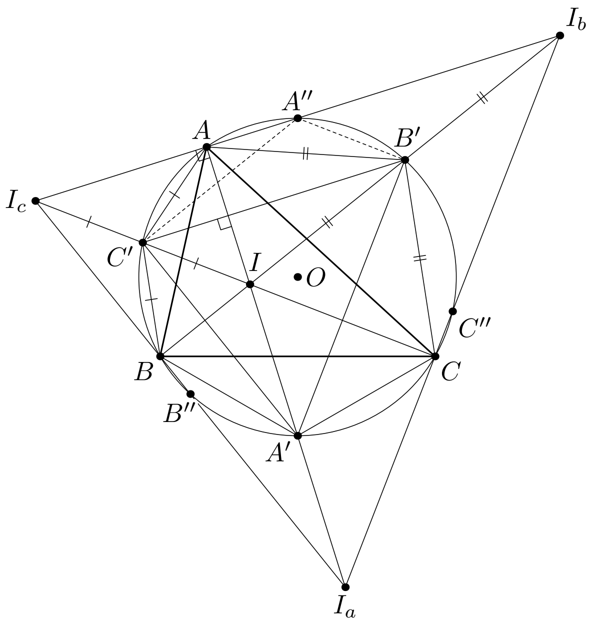


Рис. 3

6. Так как $I_bI_c \parallel B'C'$ (см. рис. 3), то I_bI_c перпендикулярно биссектрисе AA'. Так как точки A и I симметричны относительно $B'C'$, то I_bI_c проходит через A, значит, I_bI_c — внешняя биссектриса треугольника ABC. Аналогично I_aI_b и I_cI_a — внешние биссектрисы.

Из построения вытекает, что I_a лежит на прямой AI (это и так ясно, поскольку центр вневписанной окружности лежит на биссектрисе), причем $A'I_a = A'I$.

7. Точки A'' и A' — диаметрально противоположные точки Ω, отсюда $\angle A'AA'' = 90^\circ$, и, значит, A'' лежит на внешней биссектрисе I_bI_c угла BAC. $AA'' \parallel B'C'$, поэтому $A''B' = AC'$. Но $AC' = C'I$ (задача 3), следовательно, $A''B' = C'I$. Аналогично $A''C' = B'I$, откуда $A''B'IC'$ — параллелограмм. Получаем, что $A''I$ делит $B'C'$ пополам, а следовательно (из гомотетии с центром I), делит I_bI_c пополам.

Для треугольника $I_aI_bI_c$ окружность Ω является окружностью девяти точек (это точки A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''), а треугольник ABC — ортоцентрический (из наших рассмотрений ясно свойство ортоцентрического треугольника: его биссектрисы совпадают с высотами исходного треугольника).

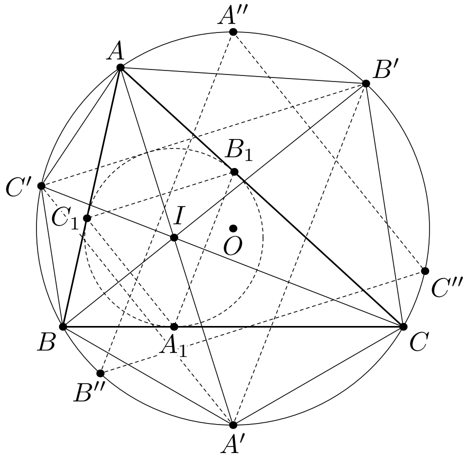


Рис. 4

8. Треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ симметричны относительно O (см. рис. 4). Значит, соответствующие стороны треугольников $A'B'C'$, $A''B''C''$ и $A_1B_1C_1$ параллельны (они перпендикулярны биссектрисам AA', BB', CC' треугольника ABC). Таким образом, треугольники $A''B''C''$ и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, и прямые A_1A'', B_1B'', C_1C'' проходят через центр гомотетии.

9. Треугольники $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, поэтому их прямые Эйлера (прямые, соединяющие ортоцентр и центр описанной окружности) параллельны или совпадают. Но IO — прямая Эйлера треугольника $A'B'C'$, а I — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, прямые Эйлера обязаны совпадать.

«Полувписанная» окружность (9–10)

П. А. Кожевников

Примем следующие обозначения для элементов треугольника ABC:

A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности ω со сторонами;

ω_A, ω_B, ω_C — вневписанные окружности, A_2, B_2, C_2 — точки их касания со сторонами;

A' и A'' — середины дуг BC описанной окружности ω, соответственно не содержащей и содержащей точку A; B' и B'', C' и C'' определяются аналогично.

Основная серия задач

Рассмотрим окружность S_A (назовем ее *полувписанной*), касающуюся сторон AB, AC и окружности Ω (внутренним образом) в точках K, L, $T=T_A$. Аналогично определяются окружности S_B, S_C и соответствующие точки касания T_B и T_C.

Докажите следующие утверждения.

1. Точки T, K, C' (а также T, L, B') лежат на одной прямой.

2. TA — симедиана (т. е. прямая, симметричная медиане относительно соответствующей биссектрисы) треугольника $B'C'T$.

3. Прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в одной точке X, которая является центром гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей окружность ω в окружность Ω.

4. TA'' — медиана треугольника $B'C'T$.

5. Точки T, I, A'' лежат на одной прямой.

6. Точки T, I, K, B (а также T, I, L, C) лежат на одной окружности, причем CC' (соответственно BB') касается этой окружности.

7. Точки K, I, L лежат на одной прямой.

8. AA' — биссектриса угла TAA_2. Отсюда вытекает новое решение задачи 3 и новое описание точки X: точка X изогонально сопряжена точке Нагеля (т. е. точке пересечения прямых AA_2, BB_2, CC_2).

9. Прямые KL, TA' и BC пересекаются в одной точке или параллельны. (Из Соросовских олимпиад.)

10. Точка пересечения Y_A из задачи 9 и точки Y_B, Y_C, определенные аналогичным образом, лежат на одной прямой.

11. Найдите аналоги предыдущих задач для «внешней полувписанной» окружности, т. е. окружности S'_A, касающейся продолжений сторон AB, AC и окружности Ω внешним образом.

Контрольные вопросы

I. Точка T_A лежит на
а) дуге AB, не содержащей C;
б) дуге AC, не содержащей B;
в) дуге BC, не содержащей A.

II. Центр окружности S_A лежит на
а) биссектрисе угла A;
б) медиане, проведенной из A;
в) высоте, проведенной из A.

Дополнительные задачи

Следующие задачи — про «обобщенные полувписанные» окружности, т. е. окружности, касающиеся одной из сторон треугольника и описанной окружности.

12. Пусть D — точка на стороне AC треугольника ABC, S_1 — окружность, касающаяся окружности Ω внутренним образом в точке R, а также отрезков BD и AD в точках M и N соответственно. Докажите, что

а) точки B, M, I, R лежат на одной окружности;

б) прямая MN проходит через центр I вписанной окружности ω треугольника ABC.

(Обобщение задач 6 и 7.)

13. Пусть D — точка на отрезке AC треугольника ABC; S_1 — окружность, касающаяся отрезков BD и AD, а также окружности Ω внутренним образом; S_2 — окружность, касающаяся отрезков BD и CD, а также окружности Ω внутренним образом.

а) Докажите, что линия центров окружностей S_1 и S_2 проходит через I.

б) Докажите, что окружности S_1 и S_2 равны тогда и только тогда, когда $D = B_2$ (см. с. 125).

14. Найдите аналоги предыдущих задач для «обобщенных полувписанных» окружностей, касающихся Ω внешним образом.

Решения, указания, комментарии

1. В случае касания двух окружностей полезно рассмотреть гомотетию с центром в точке касания, которая переводит одну из окружностей в другую.

В данной задаче при гомотетии H с центром T, переводящей S_A в Ω, прямая AB переходит в касательную l_C, параллельную AB, а K — в точку касания Ω и l_C (см. рис. 1). Остается заметить, что точка касания — это C'.

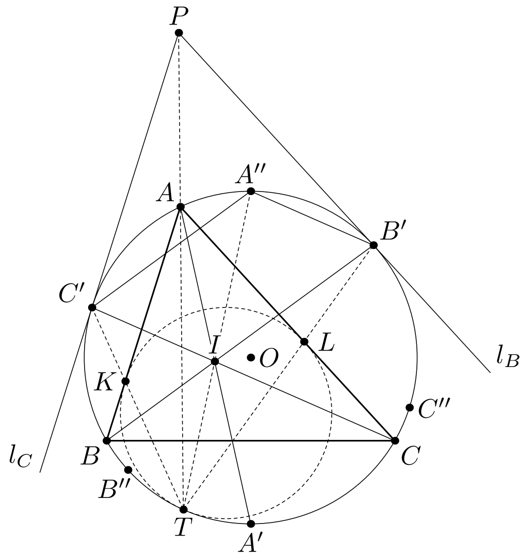


Рис. 1

2. Продолжим рассмотрение гомотетии H из решения задачи 1. Пусть касательные l_B и l_C к Ω пересекаются в $P = P_A$. Тогда P — образ A при гомотетии H. Следовательно, точки T, A и P лежат на одной прямой.

Остается воспользоваться известным свойством симедианы: она проходит через точку пересечения касательных, проведенных к описанной окружности в двух вершинах треугольника.

(Одно из самых красивых доказательств свойства симедианы приведено в книге Ефремова[2]. Идея доказательства: достроим треугольник $B'TC'$ до параллелограмма $B'TC'Q$. Подсчетом углов с вершинами B' и C' нетрудно показать, что P и Q — изогонально сопряжены относительно треугольника $B'TC'$.)

3. Треугольники ABC и $P_AP_BP_C$ гомотетичны. Прямые $AP_A = AT_A$, $BP_B = BT_B$ и $CP_C = CT_C$ пересекаются в центре гомотетии X этих треугольников. Описание точки X вытекает из того, что вписанная окружность треугольника $P_AP_BP_C$ совпадает с Ω.

Другое решение этой задачи можно получить, применив теорему о трех гомотетиях к гомотетиям с положительными коэффициентами, переводящим ω в S_A, S_A в Ω, Ω в ω соответственно.

[2] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.

4. То, что TA'' — медиана треугольника $B'C'T$, следует из предыдущей задачи и равенства дуг $C'A$ и $A''B'$.

5. Дуги $C'A''$ и $B'C$ равны, поэтому $CC' \parallel A''B'$. Аналогично, прямые $BB' \parallel A''C'$. Следовательно, $C'A''B'I$ — параллелограмм, значит, $A''I$ делит отрезок $B'C'$ пополам. Теперь все следует из предыдущей задачи.

6. Углы ITK и IBK опираются на равные дуги $A''C'$ и AB' окружности Ω. Касание следует из равенства $\angle BIC' = \angle BTI$.

7. Из касания CC' с окружностью BKI следует равенство $\angle C'IK = \angle ABI$. Далее, из подсчета углов следует, что $\angle AIK = \angle AIC' + \angle C'IK = 90°$. Аналогично $\angle AIL = 90°$.

Задача имеет независимое решение: достаточно применить теорему Паскаля к (самопересекающемуся) шестиугольнику $ABB'TC'C$.

8. Помимо гомотетии в случае касания окружностей бывает полезна инверсия.

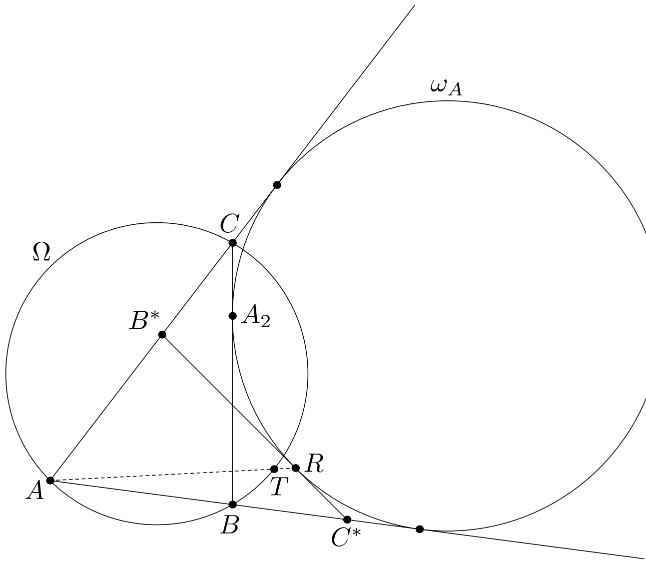


Рис. 2

При инверсии с центром A и подходящим радиусом окружность Ω перейдет в прямую B^*C^*, симметричную BC относительно биссектрисы угла BAC (см. рис. 2). В силу симметрии B^*C^* касается ω_A, поэтому окружность S_A при данной инверсии перейдет в ω_A. Следовательно,

T и точка R касания B^*C^* и ω_A инверсны. Значит, A, R, T лежат на одной прямой. Остается заметить, что AR и AA_2 симметричны относительно биссектрисы угла A.

9. Например, Y_A — это радикальный центр (точка пересечения радикальных осей) окружностей Ω, IBC и ITA' (подсчет углов показывает, что две последние окружности касаются прямой KL).

10. Y_A — радикальный центр окружностей Ω, IBC и I (точка I рассматривается как окружность нулевого радиуса). Следовательно Y_A лежит на радикальной оси окружностей Ω и I. На той же радикальной оси лежат точки Y_B и Y_C.

11. Есть «алгебраические» причины, по которым, например, вписанная и вневписанная окружности обладают похожими свойствами. Уравнение окружности, касающейся трех данных прямых, — это уравнение либо вписанной, либо одной из вневписанных окружностей, разница лишь в геометрическом расположении. Поэтому, скажем, факты для вписанной окружности зачастую имеют своего «близнеца» для вневписанной окружности.

12. Меры дуг RN и RB' окружностей S_1 и Ω равны (из гомотетии с центром B'), поэтому $\angle ARB' = \angle ACB' = \angle CAB'$ (см. рис. 3). Треугольники $B'AR$ и $B'NA$ подобны, откуда $B'N \cdot B'R = B'A^2$. Так как $B'I = B'A$ (лемма о трезубце), то $B'N \cdot B'R = B'I^2$ и треугольники $B'IR$ и $B'NI$ подобны, следовательно, $\angle RNI = \angle RIB$.

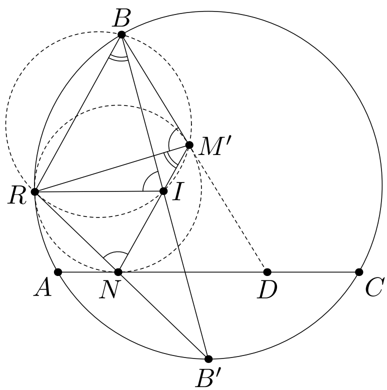


Рис. 3

Пусть M' — вторая точка пересечения NI с S_1. Снова воспользовавшись равенством дуг RN и RB' окружностей S_1 и Ω, получим

$\angle RM'N = \angle RBB'$. Из этого равенства следует, что точки B, M', I, R лежат на одной окружности, отсюда $\angle RIB = \angle RM'B$.

Итак, $\angle RNM' = \angle RM'B$, значит, BM' касается S_1, т. е. $M' = M$.

13. а) Пусть I_1, I_2 — центры окружностей S_1, S_2; пусть S_1 касается BD и AD в точках M_1 и N_1, а S_2 касается BD и CD в точках M_2 и N_2 (см. рис. 4). Из предыдущей задачи $I = M_1N_1 \cap M_2N_2$.

Точки N_1, N_2, D лежат на одной прямой, а точки I_1, I_2, I таковы, что $I_1N_1 \parallel I_2N_2$ (перпендикуляры к AC), $I_1D \parallel IN_2$, $I_2D \parallel IN_1$ (I_1D и I_2D — биссектрисы углов ADB и CDB). Отсюда нетрудно установить, что точки I_1, I_2, I лежат на одной прямой. (См. задачу 2 из раздела «Обобщенная теорема Наполеона».)

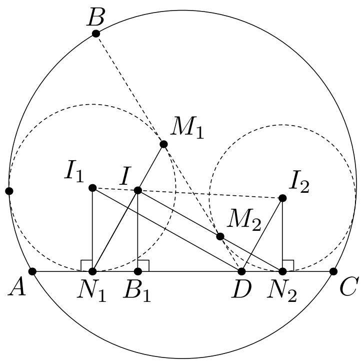


Рис. 4

б) (Приведем доказательство в одну сторону.) Пусть окружности S_1 и S_2 равны. Тогда $AN_1 = CN_2$, $I_1N_1 = IB_1 = I_2N_2$. Получаем равенство треугольников IN_1B_1 и I_2DN_2, откуда $N_1B_1 = DN_2$. Из доказанного следует, что B_1 и D симметричны относительно середины AC, значит, $D = B_2$.

Литература

[1] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М: МЦНМО, 2007.

[2] *Протасов В. Ю.* Вокруг теоремы Фейербаха // Квант. 1992. № 9.

[3] *Сонкин М.* Окружности, вписанные в сегменты, и касательные // Конференция Турнира городов 1999 г.

[4] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 9–10. М.: Дрофа, 2007.

Обобщенная теорема Наполеона (9–10)

П. А. Кожевников

Классическая теорема Наполеона гласит, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника вне его, являются вершинами равностороннего треугольника.

Предлагаем для решения серию задач, внешне не имеющих никакой связи с теоремой Наполеона. Можно решать задачи любыми методами, а затем познакомиться с обобщением теоремы Наполеона и получить решения задач как следствия этого сильного факта.

Задачи

1. Докажите, что центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его, являются вершинами квадрата.

2. На боковых сторонах трапеции $ABCD$ построены треугольники ABE и CDF так, что $AE \parallel CF$ и $BE \parallel DF$. Докажите, что если E лежит на стороне CD, то F лежит на стороне AB.

3. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу. (Задачник «Кванта» 1992 г.)

4. Через вершину A треугольника ABC проведены прямые l_1 и l_2, симметричные относительно биссектрисы угла A. Докажите, что проекции точек B и C на l_1 и l_2 соответственно, середина стороны BC и основание высоты, опущенной из вершины A, лежат на одной окружности.

5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, точки K и M — середины сторон AB и CD, точки L и N — проекции E на BC и AD. Докажите, что $KM \perp LN$.

6. На описанной окружности треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. При отражении A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB соответственно получаются точки A_2, B_2, C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (Геометрическая олимпиада им. И. Ф. Шарыгина.)

Формулировка и доказательство обобщенной теоремы Наполеона

Через $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ будем обозначать угол поворота от вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, отсчитываемый против часовой стрелки; этот угол определен с точностью до прибавления $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема. *Пусть на сторонах треугольника ABC построены такие треугольники* (*возможно вырожденные*) BCA_1, CAB_1, ABC_1, *что выполнены условия:*

1) $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}) + \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A}) + \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B}) = 2\pi k$;

2) $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = BA_1 \cdot CB_1 \cdot AB_1$.

Тогда углы треугольника $A_1B_1C_1$ находятся из равенств:

$$\angle(\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \angle(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1});$$
$$\angle(\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{B_1C_1}) = \angle(\overrightarrow{CA_1}, \overrightarrow{CB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1});$$
$$\angle(\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1A_1}) = \angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC}) + \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA_1}).$$

Таким образом, в теореме утверждается, что при выполнении условий 1) и 2) углы треугольника $A_1B_1C_1$ зависят лишь от углов треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC, и не зависят от углов самого треугольника ABC.

Эта теорема в несколько ослабленном виде (при $A_1B = A_1C$, $B_1C = B_1A$, $C_1A = C_1B$) в начале 1990-х годов была предложена И. Ф. Шарыгиным в виде задачи в журнале «Математика в школе».

Если $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}) = \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A}) = \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B}) = 120^\circ$ и $A_1B = A_1C$, $B_1C = B_1A$, $C_1A = C_1B$, то теорема превращается в теорему Наполеона.

Если каждый из углов $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C})$, $\angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A})$, $\angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B})$ равен 0 или π, обобщенная теорема Наполеона превращается в теорему Менелая.

Доказательство. Рассмотрим поворотную гомотетию H_a с центром A_1, переводящую B в C, поворотную гомотетию H_b с центром B_1, переводящую C в A, и поворотную гомотетию H_c с центром C_1, переводящую A в B. При выполнении гомотетии H_a произвольный вектор $\vec{a}$ поворачивается на $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C})$ и длина его изменяется в $\dfrac{A_1C}{A_1B}$ раз. Аналогичное утверждение справедливо для гомотетий H_b и H_c. Таким образом, при выполнении композиции $H_c \circ H_b \circ H_a$ вектор $\vec{a}$ поворачивается на угол $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}) + \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A}) + \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B}) = 2\pi k$ (т. е. не меняет направления), а длина его изменяется в $\dfrac{A_1C}{A_1B} \cdot \dfrac{B_1A}{B_1C} \cdot \dfrac{C_1B}{C_1A} = 1$ раз (т. е. длина не изменяется). Учитывая, что $H_c(H_b(H_a(B))) = H_c(H_b(C)) = H_c(A) = B$ (т. е. у композиции $H_c \circ H_b \circ H_a$ имеется неподвижная точка B), получаем, что $H_c \circ H_b \circ H_a$ — тождественное преобразование.

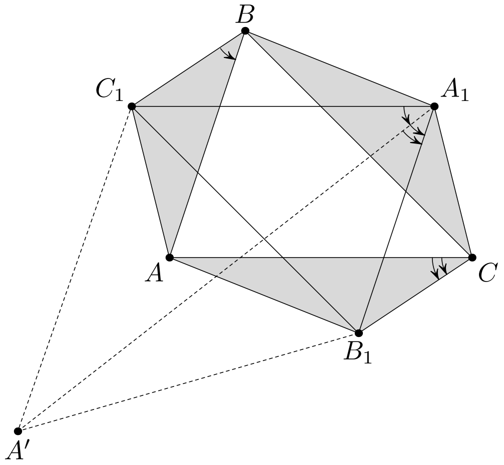


Рис. 1

Пусть $H_b(A_1) = A'$. Тогда $H_c(A') = H_c(H_b(A_1)) = H_c(H_b(H_a(A_1))) = A_1$. Треугольники $B_1XH_b(X)$ подобны и одинаково ориентированы для всех точек X, поэтому треугольники B_1A_1A' и B_1CA подобны и одинаково ориентированы, откуда $\angle(\overrightarrow{A_1A'}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1})$. Аналогично треугольники C_1A_1A' и C_1BA подобны и одинаково ориентированы, откуда $\angle(\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1A'}) = \angle(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BA})$. Отсюда вытекает, что

$$\angle(\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \angle(\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1A'}) + \angle(\overrightarrow{A_1A'}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \angle(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1}).$$

Таким же образом доказываются остальные равенства углов. $\square$

Указания и решения

Убедимся, что все предложенные задачи можно рассматривать как частные случаи обобщенной теоремы Наполеона. В некоторых задачах наметим также другие решения.

1. Пусть K, L, M, N — центры квадратов, построенных соответственно на сторонах AB BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$; O — центр параллелограмма. Применив теорему для треугольников ABK,

BCL, CAO, построенных на сторонах треугольника ABC, получаем, что треугольник KOL — равнобедренный прямоугольный с прямым углом O. Аналогично треугольники LOM, MON, NOK — равнобедренные прямоугольные с прямым углом O.

Независимое решение можно получить, заметив, что KAN и KBL — равные треугольники, получающиеся друг из друга поворотом на $90°$.

2. Пусть F' — такая точка на стороне AB, что $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{ED} \cdot \frac{EC}{BC}$. Теорему можно применить для треугольников ABF, BEC, EAD, построенных на сторонах треугольника ABE. Из теоремы следуют равенства углов: $\angle F'CD = \angle AED$ и $\angle F'DC = \angle BEC$, откуда $F'C \parallel AE$ и $F'D \parallel BE$, т. е. $F' = F$.

Другое решение. Пусть $O = AB \cap CD$, $F_1 = AB \cap CF$. Тогда $BC \parallel AD$, $F_1C \parallel AE \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$, $\frac{OA}{OF_1} = \frac{OE}{OC}$. Перемножив равенства, получим $\frac{OB}{OF_1} = \frac{OE}{OD}$, откуда $F_1D \parallel BE$, т. е. $F_1 = F$.

Третье решение можно получить из теоремы Паппа: точки $X = BC \cap AD$, $Y = FC \cap AE$, $Z = FD \cap BE$ лежат на бесконечно удаленной прямой, поэтому точки $A = EY \cap DX$, $B = EZ \cap CX$, $F = CY \cap DZ$ должны лежать на одной прямой.

3. Пусть K и L — соответственно середины дуг AB и AD рассматриваемых сегментов; M — середина BD. Применяя теорему для треугольников BAK, ADN, DBM, построенных на сторонах треугольника ABD, получаем, что $\angle KMN = \angle KBA + \angle NDA = 90°$.

4. Пусть K и L — проекции B и C на l_1 и l_2 соответственно; M — середина BC, AH — высота. Прямоугольные треугольники ABK и ACL подобны, поэтому теорема применима для треугольников BAK, ACL, CBM, построенных на сторонах треугольника ABC. Отсюда $\angle(ML, MK) = \angle(CL, CA) + \angle(BA, BK)$. Из того, что точки A, B, K, H лежат на одной окружности, а также точки A, C, L, H лежат на одной окружности, следует, что

$$\angle(HL, HK) = \angle(HL, HA) + \angle(HA, HK) = \angle(CL, CA) + \angle(BA, BK).$$

Получаем, что $\angle(ML, MK) = \angle(HL, HK)$, т. е. точки K, L, M, H лежат на одной окружности.

5. Из вписанности четырехугольника следует равенство $\angle EAN = \angle EBL$. Прямоугольные треугольники ANE и BLE подобны, поэтому теорема применима для треугольников ANE, BLE, ABK, построенных на сторонах треугольника ABE. Отсюда

$$\angle(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LN}) = \angle(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EN}) = \angle(\overrightarrow{EL}, \overrightarrow{EB}) = \angle(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NK}),$$

значит, треугольник KLN равнобедренный ($KL = KN$). Аналогично $ML = MN$. Отсюда следует, что четырехугольник $KLMN$ симметричен относительно своей диагонали KM.

6. Проверим применимость теоремы для треугольников ABC_2, BCA_2, CAB_2, построенных на сторонах треугольника ABC. Из подсчета углов (вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается) следует, что $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}) + \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A}) + \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B}) = 2\pi k$. Из симметрии $\angle(\overrightarrow{A_2C}, \overrightarrow{A_2B}) = \angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C})$, $\angle(\overrightarrow{B_2A}, \overrightarrow{B_2C}) = \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A})$, $\angle(\overrightarrow{C_2B}, \overrightarrow{C_2A}) = \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B})$; поэтому условие 1) выполнено.

Далее, из теоремы Чевы в синусах

$$\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AB_1} = \frac{2R\sin\angle ABB_1 \cdot 2R\sin\angle BCC_1 \cdot 2R\sin\angle CAA_1}{2R\sin\angle BAA_1 \cdot 2R\sin\angle CBB_1 \cdot 2R\sin\angle ABB_1} = 1,$$

поэтому условие 2) выполнено.

Из теоремы следует, что

$$\begin{aligned}\angle(\overrightarrow{A_2C_2}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \angle(\overrightarrow{BC_2}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_2}) = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1}) + \angle(\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CA}) =\\ = \angle(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1C_1}) + \angle(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1A}) + \pi k = \angle(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) + \pi k.\end{aligned}$$

Итак, получаем равенство углов (ориентированных) между прямыми $\angle(A_2C_2, A_2B_2) = \angle(A_1B_1, A_1C_1)$. Аналогично

$$\angle(B_2A_2, B_2C_2) = \angle(B_1C_1, B_1A_1), \quad \angle(C_2B_2, C_2A_2) = \angle(C_1A_1, C_1B_1).$$

Получаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны (и противоположно ориентированы).

Теорема Сонда (9–10)

А. А. Заславский

В 1894 г. французский математик П. Сонда́ открыл следующую теорему (определения см. ниже).

Теорема Сонда. *Пусть два треугольника (не гомотетичных) перспективны и ортологичны, P — центр их перспективы, Q — один из центров ортологичности. Тогда прямая PQ перпендикулярна оси перспективы.*

Следствие. Пусть P — центр перспективы двух треугольников, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Тогда точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой (*ось ортологичности*).

Публикуя эту теорему, Сонда заметил, что ему известно только аналитическое доказательство. Геометрическое доказательство теоремы Сонда нашел в 1896 г. петербургский математик Соллертинский. Однако его доказательство, впрочем довольно сложное, не привлекло широкого внимания и было надолго забыто. Только в 2006 г. французский математик Франсуа Ридо обнаружил это доказательство и сумел упростить его. Одновременно другое доказательство нашел ульяновский школьник Александр Красильников. В приводимой ниже серии задач дается доказательство теоремы Сонда, соединяющее идеи Ридо и Красильникова. Эти задачи предназначены для школьников 10–11 классов.

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, и C_1C_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы.*

1. Теорема Дезарга. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2) лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы.*

Треугольник $A_2B_2C_2$ называется *ортологичным* треугольнику $A_1B_1C_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на B_2C_2, из B_1 на A_2C_2 и из C_1 на A_2B_2, пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности.*

2. Взаимность ортологичности. Докажите, что если треугольник $A_2B_2C_2$ ортологичен треугольнику $A_1B_1C_1$, то и $A_1B_1C_1$ ортологичен $A_2B_2C_2$. (Центры ортологичности могут при этом не совпадать.)

Контрольные вопросы

I. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC. Являются ли треугольники ABC и $A_0B_0C_0$

а) перспективно-ортологичными;

б) перспективными, но не ортологичными;

в) ортологичными, но не перспективными;

г) ни перспективными, ни ортологичными?

II. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон треугольника ABC с вписанной окружностью. Укажите центры ортологичности треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

а) центр тяжести M и центр вписанной окружности I;

б) центр описанной окружности O и I;

в) ортоцентр H и I;

г) оба центра находятся в точке I.

III. Пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот треугольника ABC. Является ли осью ортологичности треугольников ABC и $A_2B_2C_2$

а) прямая Эйлера OH;
б) прямая Нагеля MI;
в) прямая OI;
г) прямая IH?

IV. Пусть A_3, B_3, C_3 — вторые точки пересечения биссектрис треугольника ABC с его описанной окружностью. Следует ли из теоремы Сонда, что ось перспективы треугольников ABC и $A_3B_3C_3$ перпендикулярна

а) прямой Эйлера;
б) прямой Нагеля;
в) прямой OI?
г) Теорема Сонда здесь неприменима.

3. Лемма 1. На трех прямых a, b, c, проходящих через одну точку, взяты точки A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3. Докажите, что попарные оси перспективы треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ пересекаются в одной точке.

4. Пользуясь леммой 1, сведите общий случай теоремы Сонда к случаю двух треугольников с общей вершиной.

5. Лемма 2 (Соллертинский). Пусть дано проективное преобразование f и точка P. Докажите, что геометрическое место точек пересечения прямых l и $f(l)$, где l проходит через P, — это коника, проходящая через точки A и B. При этом, если $f(AB) = AB$, коника распадается на две прямые, одна из которых совпадает с AB.

6. Докажите, что если два треугольника ортологичны и центры ортологичности совпадают, то треугольники перспективны.

7. Лемма 3 (Ф. Ридо). Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ ортологичны, Q — точка пересечения перпендикуляров из A, B, C на стороны $A'B'C'$, Q' — точка пересечения перпендикуляров из A', B', C' на стороны ABC. Докажите, что четырехугольники $ABCQ$ и $A'B'C'Q'$ аффинно эквивалентны.

8. Пусть треугольники ABC и $A'B'C$ ортологичны с центрами Q, Q'; T — точка пересечения AB и $A'B'$. Докажите, что $QQ' \perp CT$.

9. Пусть треугольники ABC и $A'B'C$ ортологичны с центрами Q, Q'; P — точка пересечения AA' и BB'. Докажите, что QQ' проходит через P.

10. Докажите теорему Сонда.

Дополнительные задачи

11. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны с центром P и ортологичны с центрами Q, Q'. Докажите, что коники $ABCPQ$, $A'B'C'PQ'$ — равносторонние гиперболы с параллельными асимптотами.

12. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны с центром P и ортологичны с центрами Q, Q'. A_2 — точка пересечения прямых AQ' и A_1Q, B_2, C_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ перспективно-ортологичен каждому из треугольников ABC, $A_1B_1C_1$.

13. Докажите, что оси перспективы и ортологичности для всех трех пар треугольников предыдущей задачи совпадают.

14. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Сонда для тетраэдров.

15. Тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D'$ ортологичны, причем центры ортологичности совпадают.

а) Верно ли, что тетраэдры перспективны?

б) Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' гиперболичны, т. е. любая прямая, пересекающая три из них, пересекает и четвертую (или параллельна ей).

Примечание. Задачи 1–4 — вспомогательные, их утверждения можно использовать при решении остальных задач. Задачи 7–10 — зачетные.

Указания и решения

5. *Доказательство леммы* 2. Пусть X, Y, Z — три точки искомого ГМТ. Рассмотрим конику, проходящую через точки A, B, X, Y, Z. Пусть U — произвольная точка этой коники. Так как двойные отношения четверок прямых AX, AY, AZ, AU и BX, BY, BZ, BU равны, получаем, что $f(AU) = BU$, т. е. U принадлежит искомому ГМТ.

6. Зафиксировав один из треугольников ABC и общий центр ортологичности Q, будем подвергать второй треугольник $A'B'C'$ гомотетии с центром Q. При этом точки A', B', C' будут двигаться по трем проходящим через Q прямым, а прямые $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$ будут сохранять свои направления. Следовательно, два треугольника все время будут ортологичны с общим центром Q, а соответствие между прямыми AA' и BB' будет проективным. По лемме Соллертинского точка пересечения прямых AA' и BB' будет описывать конику, проходящую через A и B. Нетрудно убедиться, что на этой конике лежат также точки C, Q и ортоцентр H треугольника ABC. Поскольку через пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная коника, точка пересечения прямых AA' и CC' описывает эту же конику, т. е. прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Примечание. Из приведенного рассуждения следует, что коники $ABCPQ$ и $A'B'C'PQ$, где P — центр перспективы треугольников, являются равносторонними гиперболами.

7. *Указание.* Достаточно доказать равенство отношений площадей треугольников $S_{ABQ}/S_{ACQ} = S_{A'B'Q'}/S_{A'C'Q'}$.

8. Будем так равномерно двигать прямые AB и $A'B'$ параллельно самим себе, чтобы через точку C они прошли одновременно. Тогда точка их пересечения будет двигаться по прямой CT. Из леммы Ридо следует, что в момент прохождения AB через Q прямая $A'B'$ проходит через Q'. Пусть T' — соответствующая точка пересечения. Тогда $CQ \perp Q'T'$ и $CQ' \perp QT'$, т. е. T' — ортоцентр треугольника CQQ', откуда сразу следует утверждение задачи.

9. *Указание.* Треугольники ABQ и $A'B'Q'$ ортологичны с общим центром ортологичности C и, следовательно, перспективны.

Литература

[1] Материалы 16-й Летней конференции международного математического Турнира Городов.
`http://www.turgor.ru/lktg/2004/persor.ru/index.htm`

Изогональное сопряжение и прямая Симсона (10–11)

А. В. Акопян

Перед решением задач этого раздела рекомендуется разобрать задачи разделов «Центр вписанной окружности», «Прямая Эйлера», «Ортоцентр, ортотреугольник и окружность девяти точек», «Биссектрисы, высоты и описанная окружность».

Педальным (подéрным) треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны ABC. Описанная окружность педального треугольника называется *педальной (подерной) окружностью* точки P относительно треугольника ABC.

Контрольные вопросы

I. Какой из следующих треугольников не является педальным ни для какой точки? Треугольник, образованный а) серединами сторон;

б) основаниями биссектрис;

в) точками касания сторон с вписанной окружностью;

г) основаниями высот.

II. Пусть стороны треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A', B', C'. Для какой точки треугольник $A'B'C'$ будет педальным?

а) Для центра тяжести.

б) Для центра вписанной окружности.

в) Для точки, симметричной центру вписанной окружности относительно центра описанной.

г) Такой точки не существует.

1. Докажите, что педальный треугольник вырождается (проекции лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Полученная таким образом прямая называется *прямой Симсона* точки P относительно треугольника ABC.

2. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка B' на описанной окружности выбрана так, что PB' перпендикулярна AC. Докажите, что прямая BB' параллельна прямой Симсона точки P.

3. Докажите, что при вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону и скорость поворота в два раза меньше, чем скорость изменения дуги PA.

4. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам (где H - ортоцентр треугольника ABC).

Окружностно-чевианным треугольником точки P относительно треугольника ABC называется треугольник, вершины которого — это точки повторного пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью ABC.

5. Докажите, что педальный и окружностно-чевианный треугольники точки P относительно треугольника ABC подобны и одинаково ориентированы.

Пусть дан произвольный треугольник ABC. Для любой точки P, отличной от вершин треугольника, отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис соответствующих вершин треугольника. Оказывается, эти три прямые всегда пересекаются в одной точке (или же параллельны, т. е. пересекаются в одной точке на проективной плоскости), назовем ее P'.

6. Докажите это (рекомендуется воспользоваться задачей 5).

Точку P' называют *изогонально сопряженной* точке P относительно треугольника ABC, а преобразование, переводящее каждую точку проективной плоскости в изогонально сопряженную, — *изогональным сопряжением.*

7. Отразим точку P относительно сторон треугольника. Докажите, что центр окружности, проходящей через получившиеся три точки, изогонально сопряжен P. (Это, безусловно, тоже будет доказательством корректности определения изогонального сопряжения.)

Докажите несколько элементарных свойств изогонального сопряжения.

8. Если точка P не лежит на прямых, содержащих стороны треугольника, то точка P' определяется однозначно, и изогонально сопряженной точкой к P' будет точка P. Такие две точки будем называть *изогонально сопряженными.*

9. Точкой, изогонально сопряженной к точке, лежащей на прямой, содержащей сторону треугольника, будет вершина треугольника, соответствующая этой стороне.

Контрольный вопрос III

Сколько точек изогональное сопряжение оставляет на месте?

а) 0; б) 1; в) 2; г) 4.

10. Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то изогонально сопряженной точке P будет точка на бесконечно удаленной прямой, которая задает направление, перпендикулярное прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

11. Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.

12. а) Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.

б) **Окружность Эйлера.** Докажите, что середины сторон и основания высот треугольника лежат на одной окружности.

13*. Пусть касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке A_1. Докажите, что прямая AA_1 симметрична медиане стороны BC относительно биссектрисы угла A.

14. Теорема Паскаля. Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Обозначим через X, Y, Z точки пересечения прямых

AE и BF, BD и CE, AD и CF соответственно. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Решения

1. Пусть P_a, P_b и P_c — проекции точки P на стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть эти три точки лежат на одной прямой. Мы рассмотрим случай, изображенный на рис. 1, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Четырехугольник PCP_bP_a вписанный, поэтому $\angle PP_bP_a = \angle PCP_a$. Аналогично $\angle PP_bP_c = \angle PAP_c$. Точки P_a, P_b, P_c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle PP_bP_c = \angle PP_bP_a$. Что то же самое, что $\angle PAP_c = \angle PCP_a$. Но это и означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Обратное утверждение доказывается абсолютно так же. Если P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то $\angle PAB = \angle PCP_a = \angle PP_bP_a$ (последнее верно в силу того, что точки P, C, P_a, P_b лежат на окружности). Аналогично $\angle PAB = \angle PP_bP_c$. Следовательно, точки P_a,P_b и P_c лежат на одной прямой.

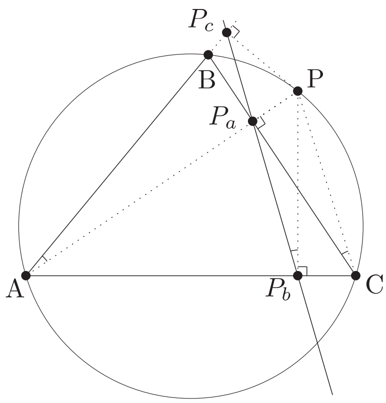


Рис. 1

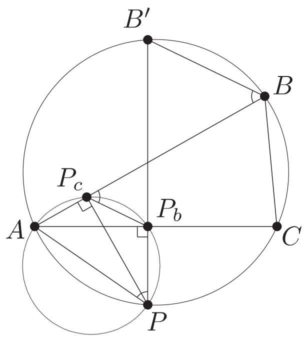


Рис. 2

2. Проекции точки P на стороны AB и AC обозначим через P_c и P_b соответственно (см. рис. 2). Тогда $\angle ABB' = \angle APB'$ как углы, опирающиеся на дугу AB'. Поскольку четырехугольник AP_cP_bP вписанный (AP — диаметр его описанной окружности), а сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$, то $\angle APB' = \angle APP_b = 180° - \angle AP_cP_b = \angle BP_cP_b$. Следовательно, прямая P_bP_c параллельна BB'.

3. Это легко следует из предыдущей задачи.

4. Легко понять, что $\angle AHC = 180° - \angle ABC$, а значит, точка H', симметричная H относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 3). Поскольку PB' и BH' перпендикулярны AC, четырехугольник $PB'BH'$ будет трапецией, причем равнобокой, поскольку он вписан. А значит, прямая, симметричная PH' относительно AC (т. е. прямой, параллельной оси симметрии трапеции), будет параллельна BB'. Следовательно, $P'H$ параллельна BB', а значит, и прямой Симсона точки P (здесь P' — образ точки P при симметрии относительно AC). Поскольку P_b (проекция точки P на сторону BC) является серединой PP', прямая Симсона будет средней линией треугольника HPP', а значит, будет делить PH пополам.

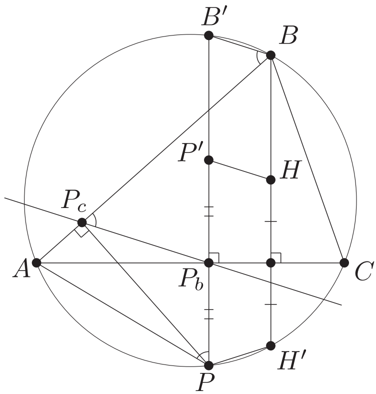


Рис. 3

5. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 4. Остальные случаи разбираются аналогично.

Точки P_a, P_b, P_c — это вершины педального треугольника, а точки A', B', C' — вершины окружностно-чевианного, $\angle AA'C' = \angle ACC' = \angle P_bP_aP$. Последнее равенство верно, поскольку четырехугольник PP_aCP_b вписанный. Аналогично доказывается, что $\angle AA'B' = \angle P_cP_aP$. А значит, $\angle C'A'B' = \angle P_bP_aP_c$. Аналогично $\angle A'B'C' = \angle P_aP_bP_c$ и $\angle A'C'B' = \angle P_aP_cP_b$. Но это и означает, что треугольники $A'B'C'$ и $P_aP_bP_c$ подобны.

6. Если взять точку P', аналогичную точке P в треугольнике $A'B'C'$, но для треугольника $P_aP_bP_c$, то эта точка будет играть роль изогонально сопряженной точке P в $P_aP_bP_c$.

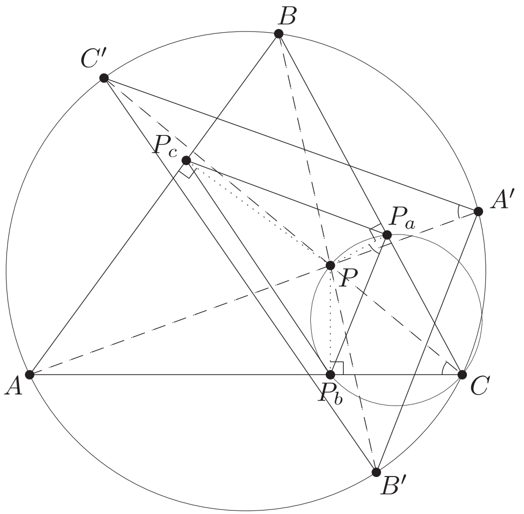


Рис. 4

7. Пусть P_a симметрична P относительно стороны BC, P_b и P_c определены аналогично (см. рис. 5). Пусть P' — это центр описанной

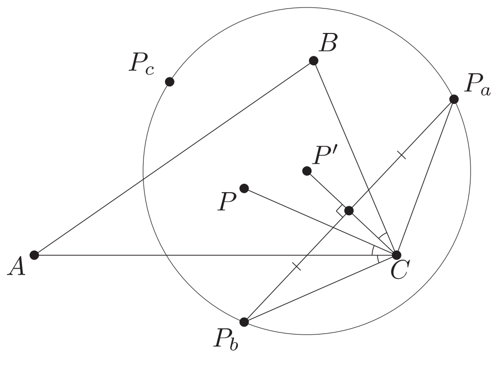


Рис. 5

окружности треугольника $P_aP_bP_c$. Точка C равноудалена от P_a и P_b, следовательно, прямая CP' является серединным перпендикуляром к отрезку P_aP_b. А значит, $\angle P_aCP' = \dfrac{1}{2}\angle P_aCP_b = \angle C$. Но тогда

$$\angle BCP' = \angle P_aCP' - \angle BCP_a = \angle C - \angle BCP = \angle ACP.$$

Аналогично показывается, что $\angle ABP' = \angle CBP$ и $\angle BAP' = \angle CAP$. А это и означает, что точка P' изогонально сопряжена P относительно ABC.

10. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 6, остальные случаи разбираются аналогично. Пусть точка P лежит на описанной окружности и P_b и P_c — проекции точки P на стороны AC и AB соответственно. Пересечения прямой Симсона точки P с прямой a, симметричной AP относительно биссектрисы угла A, обозначим через X. Четырехугольник APP_bP_c вписанный, а значит,

$$\angle AP_cP_b = 180^\circ - \angle APP_b = 180^\circ - (90^\circ - \angle PAP_b) = \\ = 90^\circ + \angle PAP_c = 90^\circ + \angle XAP_c.$$

Но поскольку внешний угол равен сумме двух оставшихся внутренних углов треугольника, $\angle AXP_c = 90^\circ$. Аналогично доказывается, что прямые, симметричные PB и PC относительно биссектрис соответствующих углов, перпендикулярны P_cP_b.

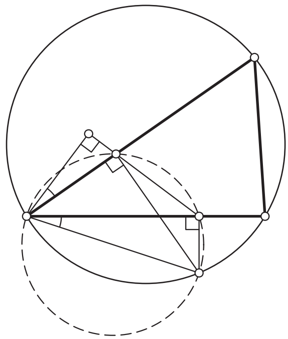


Рис. 6

11. Действительно, если точки P и P' изогонально сопряжены, то их педальная окружность — это окружность с центром в середине PP' и радиусом $P'P_a/2 = PP'_a/2$, где P_a и P'_a — это точки, симметричные P и P' относительно стороны ABC.

Обратное. Если педальные окружности точек P и Q совпадают, значит, по доказанному выше, они совпадают с педальной окружностью точки P', изогонально сопряженной P. По принципу Дирихле у педального треугольника точки Q две из трех вершин общие с педальным треугольником либо точки P, либо точки P'. Следовательно, точка Q совпадает с одной из этих точек, потому что проекции точки на две прямые полностью задают положение этой точки.

12. а) Пусть H — ортоцентр, а O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BAH = 90^\circ - \angle B$, но $\angle AOC = 2\angle B$, следовательно, $\angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle B) = 90^\circ - \angle B$. Откуда следует, что $\angle BAH = \angle OAC$, а это и означает, что AH при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AO. Аналогично для других двух углов.

б) Непосредственно следует из пункта а) и задачи 11.

13. Точка, симметричная A относительно M_a, очевидно, лежит на медиане AM_a (обозначим ее через A') (см. рис. 7). Как нетрудно проверить, прямые BA' и CA' при отражении относительно биссектрис соответствующих углов переходят в касательные к описанной окружности. Следовательно, A' переходит в A_1 при изогональном сопряжении.

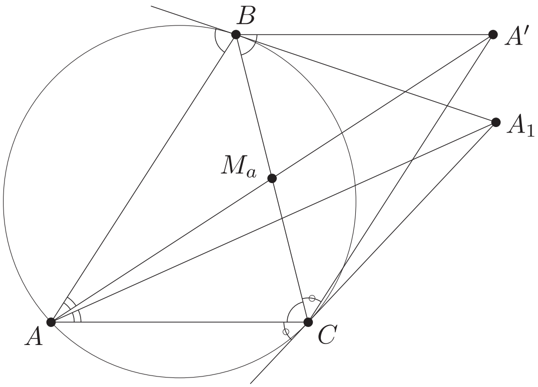


Рис. 7

14. Мы рассмотрим только один случай расположения точек на окружности (см. рис. 8), остальные рассматриваются аналогично.

Точки A, B, C, D, E и F лежат на одной окружности. Пусть прямые AB и DE пересекаются в точке X, прямые BC и EF — в точке Y, а AF и CD — в точке Z. Надо доказать, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

Углы BAF и BCF равны, поскольку опираются на одну дугу. Аналогично равны углы CDE и CFE. Кроме того, треугольники AZD и CZF подобны. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник AZD в CZF. При этом преобразовании точка X перейдет в точку X', изогонально сопряженную точке Y относительно треугольника CZF (в силу вышеуказанных равенств углов). А значит, $\angle AZX = \angle CZX' = \angle FZY$, а это и означает, что точки X, Z и Y лежат на одной прямой.

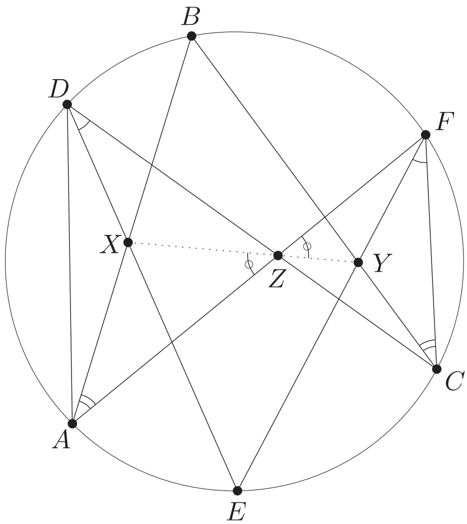


Рис. 8

Литература

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. 2007. Вып. 10.

ГЛАВА 5

ОКРУЖНОСТЬ

Простейшие свойства окружности [1] (8–9)

А. Д. Блинков

1. В треугольнике ABC $|AB| > |BC|$. На стороне AB взята точка P так, что $|BP| = |BC|$. Биссектриса BM треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке N. Докажите, что четырехугольник $APMN$ — вписанный. (См. [6].)

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ тогда и только тогда, когда $|AC| = |BC|$. (См. [9].)

3. Точка O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Окружность с центром D проходит через точки A, B и O. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности. (См. [6].)

4. Точка O, лежащая внутри треугольника ABC, обладает тем свойством, что прямые AO, BO и CO проходят через центры описанных окружностей треугольников BCO, ACO и ABO соответственно. Докажите, что O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. (См. [9].)

5. Из произвольной точки круглого бильярдного стола пущен шар. Докажите, что внутри стола найдется такая окружность, что траектория шара ее ни разу не пересечет. (См. [6].)

6. Три окружности одинакового радиуса проходят через точку H. Пусть A, B и C — точки их попарного пересечения, отличные от H. Докажите, что H — ортоцентр треугольника ABC. (См. [9].)

7. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон BC и AD — в точке Q. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AQB и BPC со сторонами четырехугольника являются вершинами ромба. (См. [9].)

---

[1] Цифры в скобках после номера задачи означают ее источник в списке литературы.

8. Центры трех попарно касающихся внешним образом окружностей лежат в вершинах прямоугольного треугольника. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных и содержащей их внутри себя, если периметр треугольника равен P. (См. [11].)

Зачетные задачи: 3, 4, 6 и 7.

Контрольные вопросы

I. Прямые a, b и c пересекаются попарно. Сколько существует окружностей, одновременно касающихся каждой из этих прямых?

а) Одна;
б) две;
в) три;
г) четыре;
д) бесконечно много;
е) определить невозможно.

II. Выберите три условия, каждое из которых равносильно тому, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность.

а) $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$;
б) $\angle BAD + \angle BCD = 180°$;
в) $ABCD$ — прямоугольник;
г) $ABCD$ — ромб;
д) $\angle BAC = \angle BDC$;
е) угол ABC равен внешнему углу при вершине D.

III. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Биссектрисы внешних углов при вершинах C и D пересекаются в точке P. Найдите угол CPD.

IV. Пусть ABC — равносторонний треугольник со стороной a. На расстоянии a от вершины A взята точка D. Какова может быть величина угла BDC?

V. Окружность радиуса R касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и продолжений его катетов. Найдите периметр треугольника ABC.

Решения

1. Так как углы ANB и ACB вписанные и опираются на одну и ту же дугу, то они равны (см. рис. 1). Из условия также следует, что равны треугольники BMP и BMC (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BPM = \angle BCA$. Таким образом, $\angle APM + \angle ANM = 180°$, т. е. четырехугольник $APMN$ — вписанный, что и требовалось доказать.

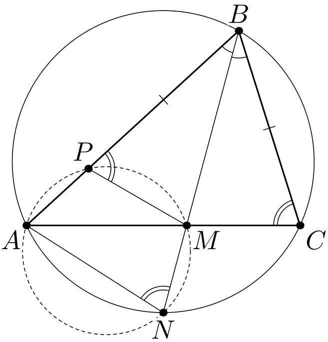


Рис. 1

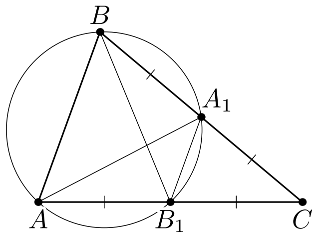


Рис. 2

2. Так как $[A_1B_1]$ — средняя линия треугольника ABC, то AB_1A_1B — трапеция. Рассмотрим окружность, описанную около $\triangle ABB_1$ (см. рис. 2).

1) Пусть $|AC| = |BC|$, тогда $|AB_1| = |BA_1|$, т. е. трапеция AB_1A_1B — равнобокая, значит, точка A_1 лежит на этой же окружности. Следовательно, $\angle A_1AA_1 = \angle B_1BB_1$, так как эти углы вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу B_1A_1.

2) Пусть $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, тогда опять-таки точка A_1 лежит на этой же окружности, значит, трапеция AB_1A_1B — равнобокая. Следовательно, $|AB_1| = |BA_1|$, т. е. $|AC| = |BC|$.

Замечание. Пункт 1) можно также доказать, используя, что $\triangle AA_1B_1 = \triangle AA_1B$ (по трем сторонам).

3. Так как O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, то $[AO)$ — биссектриса угла BAC; $[BO)$ — биссектриса угла B_1BC, где B_1 — точка на продолжении стороны AB (см. рис. 3). Соединив точку D с точками A и B, получим, что $\angle AOB = 0{,}5\angle ADB$. Так как $\angle B_1BO$ — внешний для $\triangle ABO$, то

$$\angle B_1BO = \angle AOB + \angle BAO = 0{,}5 \cdot (\angle ADB + \angle BAC),$$

тогда $\angle B_1BC = \angle ADB + \angle BAC$.

С другой стороны, так как угол B_1BC — внешний для $\triangle ABC$, то $\angle B_1BC = \angle BCA + \angle BAC$. Значит, $\angle ADB = \angle BCA$, т. е. точки A, B, C и D лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

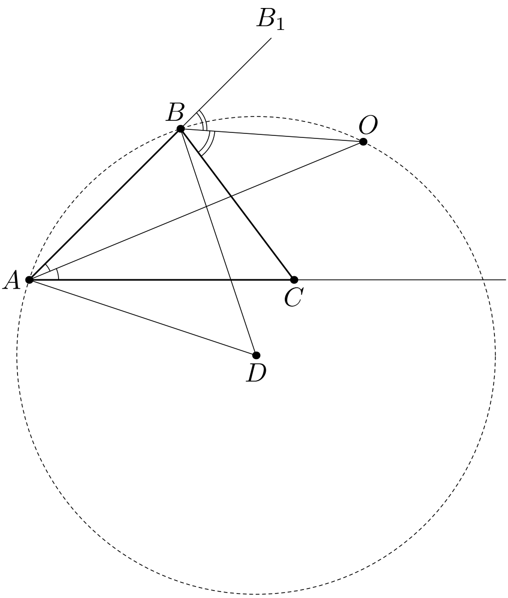


Рис. 3

4. Рассмотрим окружность с центром P, описанную около $\triangle AOC$ (см. рис. 4). Так как угол OPC — центральный, а OAC — вписанный,

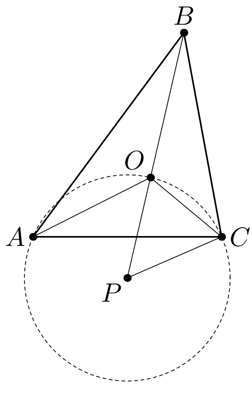


Рис. 4

при этом они опираются на одну и ту же дугу, то

$$\angle COP = 0{,}5 \cdot (180^\circ - \angle OPC) = 90^\circ - \angle OAC.$$

Тогда

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle COP = 90^\circ + \angle OAC.$$

Аналогично, рассмотрев окружность, описанную около треугольника AOB, получим, что $\angle BOC = 90^\circ + \angle OAB$. Следовательно, $\angle OAB = \angle OAC$, т. е. $[AO)$ — биссектриса угла BAC. Таким же образом доказывается, например, что $[CO)$ — биссектриса угла BCA. Следовательно, O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, что и требовалось доказать.

5. Пусть шар пущен по прямой AB, не проходящей через центр стола. Тогда траектория движения шара представляет собой некоторую ломаную $ABCD\ldots$ При отражении от «круглой стенки» угол ABO падения шара (т. е. угол между звеном ломаной и радиусом окружности бильярдного стола, проведенного в точку соударения шара со стенкой) равен углу отражения CBO (т. е. углу между следующим звеном ломаной и тем же радиусом, см. рис. 5). Величина этих углов не изменяется при следующих отражениях шара от стенки, что следует из равенства равнобедренных треугольников, основаниями которых являются звенья траектории шара (хорды окружности стола). Следовательно, расстояние от центра круга до всех звеньев ломаной есть величина постоянная. Значит, любая окружность, центр которой совпадает с центром стола, а радиус меньше, чем расстояние от центра стола до любого из звеньев ломаной, удовлетворяет условию задачи.

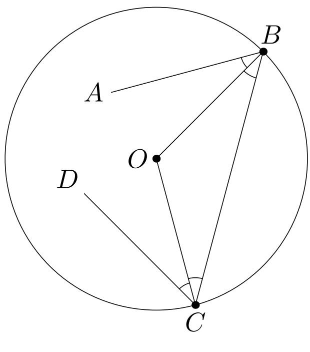


Рис. 5

В случае если шар пущен по прямой, проходящей через центр стола, траекторией его движения будет являться «вырожденная ломаная», принадлежащая одному из диаметров круга. Этот диаметр разобьет круг на два полукруга. Тогда любая окружность, лежащая внутри полукруга, удовлетворяет условию задачи.

6. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры данных окружностей (см. рис. 6). Так как все стороны четырехугольника BO_1HO_2 между собой равны, то он является ромбом, поэтому $BO_2 \parallel HO_1$. Аналогично AO_1HO_3 — ромб, поэтому $AO_3 \parallel HO_1$. Следовательно, $BO_2 \parallel AO_3$. кроме того, $|BO_2| = |AO_3|$, значит, четырехугольник ABO_2O_3 — параллелограмм, т. е. $AB \parallel O_2O_3$. Так как $CH \perp O_2O_3$, то $CH \perp AB$. Аналогично доказывается, например, что $AH \perp BC$, значит, H — ортоцентр треугольника ABC.

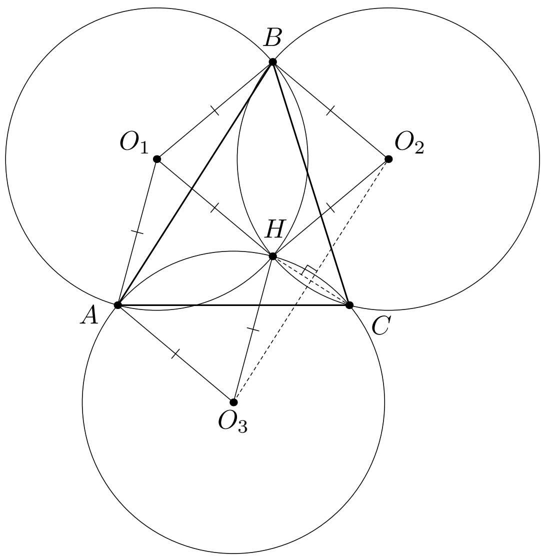


Рис. 6

7. Пусть биссектрисы углов AQB и BPC пересекаются в точке R; $[PR) \cap [BC] = N$; $[PR) \cap [AD] = F$; $[QR) \cap [AB] = M$; $[QR) \cap [CD] = E$ (см. рис. 7). Введем обозначения для углов: $\angle BQM = \alpha$; $\angle BPN = \beta$; $\angle PBC = \varphi$. Рассмотрим четырехугольник $MBNR$:

$$\angle MRN = 360^\circ - (\angle B + \angle M + \angle N) = \\ = 360^\circ - (180^\circ - \varphi) - (\varphi + \alpha) - (\varphi + \beta) = 180^\circ - (\varphi + \alpha + \beta).$$

Вычислим значение суммы $\varphi + \alpha + \beta$. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \varphi + 2\alpha$; $\angle C = \varphi + 2\beta$; $\angle A + \angle C = 2\varphi + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, так как этот четырехугольник вписанный. Следовательно, $\varphi + \alpha + \beta = 90^\circ$, значит, $\angle MRN = 90^\circ$. Таким образом, биссектрисы QR и PR в треугольниках

QNF и PME соответственно являются также и высотами, следовательно, эти треугольники — равнобедренные, значит, точка R — середина отрезков ME и NF. Поэтому диагонали четырехугольника $MNEF$ делятся точкой пересечения пополам, т. е. этот четырехугольник — параллелограмм. Кроме того, эти диагонали перпендикулярны, т. е. $MNEF$ — ромб.

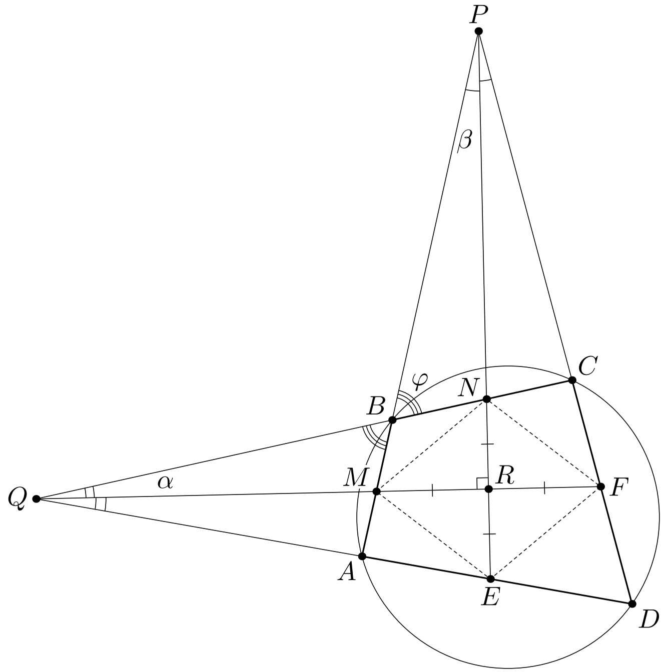


Рис. 7

8. *Ответ*: $P/2$.

Решение. Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный с прямым углом C; окружности с центрами A, B и C — три данные точки A_1, B_1 и C_1 — точки касания четвертой окружности с данными (см. рис. 8). Обозначим через O такую точку плоскости, что $ACBO$ — прямоугольник. Докажем, что точка O является центром четвертой окружности. Для этого обозначим радиусы данных окружностей x, y и z, тогда $|OC_1| = |OC| + |CC_1| = y + z + x$; $|OA_1| = |OA| + |AA_1| = x + z + y$; $|OB_1| = |OB| + |BB_1| = x + y + z$. Таким образом, точка O равноудалена от трех точек A_1, B_1 и C_1, т. е. является центром окружности, проходящей через эти точки. Радиус этой окружности: $R = x + y + z = P/2$.

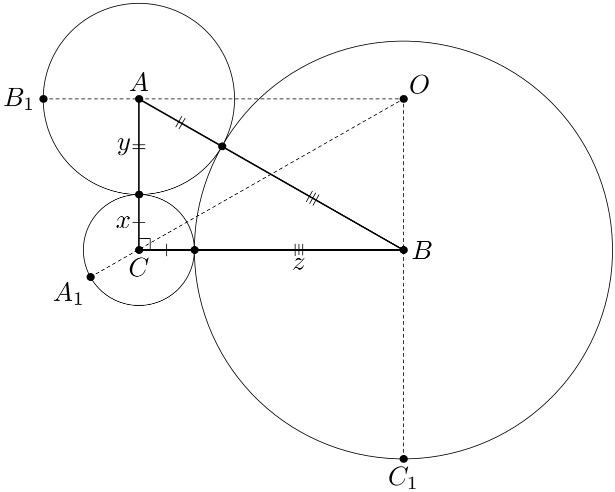


Рис. 8

Литература

[1] *Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М.* Московские математические регаты. Изд. 2-е. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Физматлит, 1987.

[3] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[4] *Готман Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1996.

[5] Задачи Международного математического турнира городов.

[6] Задачи Московской математической олимпиады (городской и окружной туры).

[7] Задачи Московской устной олимпиады по геометрии.

[8] *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008.

[9] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М: МЦНМО, 2007.

[10] *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2005.

[11] *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

[12] Шесть фестивалей (материалы Российских фестивалей юных математиков). Краснодар: ГИНМЦ, 1996.

Вписанный угол (8–9)

Д. А. Пермяков

1. Из произвольной точки M, лежащей внутри данного угла с вершиной A, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

2. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

3. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

4. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке A. Через эту точку проведены прямые B_1B_2 и C_1C_2, точки B_1 и C_1 лежат на ω_1, а точки B_2 и C_2 лежат на ω_2. Докажите, что $B_1C_1 \| B_2C_2$.

6. В треугольнике ABC проведена высота AH, а из вершин B и C опущены перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую, проходящую через точку A. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle HB_1C_1$.

7. Одна из диагоналей вписанного четырехугольника — диаметр. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

8. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру (т. е. точке пересечения высот) треугольника относительно его стороны лежит на описанной окружности этого треугольника.

9. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причем точки P и Q лежат на сторонах BC и CD соответственно; P' и Q' — середины сторон AP и AQ. Докажите, что треугольники $BQ'C$ и $CP'D$ правильные.

10*. Окружность разделена на равные дуги n диаметрами. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M внутри окружности на эти диаметры,

а) лежат на одной окружности;

б) являются вершинами правильного многоугольника.

11*. На сторонах AC и BC треугольника ABC внешним образом построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Докажите, что прямые A_1B, A_2B_2 и AB_1 пересекаются в одной точке.

12. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырехугольник.

13. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B, S_2 в точке C, причем точки B, A и C лежат в указанном порядке. В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол $\angle BDC$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку A.

14. На хорде AB окружности S с центром O взята точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает окружность S в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

15. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

16. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точки B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники $A_1B_2C_2$ и ABC подобны.

17. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются

а) биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$;

б) высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

18. В окружность вписаны треугольники T и T'. Вершины треугольника T' являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T и T', диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T и пересекаются в одной точке.

Зачетные задачи: 1–11, кроме любых 4.

Вписанные и описанные (9–10)

А. А. Гаврилюк

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 лежат на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Отрезки A_1C_2, A_2C_1, B_1D_2, B_2D_1 делят $ABCD$ на 9 четырехугольников. Оказалось, центральный и примыкающие к вершинам A, B, C, D четырехугольники — описанные. Докажите, что и $ABCD$ — описанный.

2. Пусть B_1 — точка касания вписанной окружности со стороной AC треугольника ABC. Точки A_2, B_2, C_2 — точки касания окружности, вневписанной в угол B с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что $CB_1 = AB_2 = AC_2 = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$.

3. Точки F_1 и F_2 — фокусы эллипса. Точки A и C — точки пересечения отрезков BF_1 и BF_2 с этим эллипсом соответственно. Пусть D — точка пересечения отрезков F_1C и F_2A. Докажите, что $ABCD$ — описанный четырехугольник.

4. Через точки пересечения продолжений сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены 2 прямые, делящие его на 4 четырехугольника. Докажите, что если четырехугольники, примыкающие в вершинам B и D, — описанные, то $ABCD$ также описан.

5. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, H_C, H_D — ортоцентры треугольников ABD и ABC. Докажите, что CDH_CH_D — описанный.

6. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA и DAB являются вершинами прямоугольника.

7. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре построена окружность. Она пересекает стороны AB и BC в точках K и L. Пусть M — точка пересечения касательных к окружности, взятых в этих точках. Докажите, что BM перпендикулярно AC.

8. Диагонали описанной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Радиусы вписанных окружностей треугольников AOD, AOB, BOC и COD равны r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Докажите, что $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$.

Радикальная ось (9–10)

И. Н. Шнурников, А. Засорин

1. На плоскости даны окружность S и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется *степенью точки* P относительно окружности S.

2. Докажите, что для точки P, лежащей вне окружности S, ее степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

3. Докажите, что степень точки P относительно окружности S равна $d^2 - R^2$, где R — радиус S, d — расстояние от точки P до центра окружности S.

4. (!) На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2, является прямая.

Эту прямую называют *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2.

5. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

6. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке.

Эту точку называют *радикальным центром* трех окружностей.

7. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

8. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является их радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена их общая хорда.

9. а) Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

10. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1. Прямая l проходит через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что:

а) прямая l проходит через ортоцентр (точку H пересечения высот треугольника ABC);

б) прямая l тогда и только тогда проходит через точку C, когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

11. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD — в точке E. Докажите, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF.

12*. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

Касание (9–10)

И. Н. Шнурников, А. Засорин

Задачи 1–5 интересны не только сами по себе, но и как леммы к другим задачам.

1. Окружность ω_2 касается окружности ω_1 внутренним образом в точке D, а хорды AB — в точке C. Точка E — середина дуги AB, не содержащей точки D. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой и $BE^2 = CE \cdot DE$.

2. Хорды AB и CD окружности ω_1 пересекаются в точке P. Окружность ω_2 касается внутренним образом ω_1 в точке S и касается отрезков PB и PD. Точки A_0 и C_0 — середины дуг CD и AB соответственно (дуги не содержат точку S). Прямые l и m — касательные к ω_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые l и m пересекаются в точке Q. Докажите, что точки S, P и Q лежат на одной прямой.

3. На плоскости заданы непересекающиеся окружности ω_1, ω_2 и ω_3. Точки O_1, O_2 и O_3 таковы: точка O_1 — центр подобия ω_2 и ω_3 с положительным коэффициентом подобия; точка O_2 — центр подобия ω_1 и ω_3 с положительным коэффициентом подобия; точка O_3 — центр подобия ω_1 и ω_2 с положительным коэффициентом подобия. Покажите, что точки O_1, O_2 и O_3 лежат на одной прямой.

4. Даны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2. К ним проведена общая внешняя касательная AB и общая внутренняя касательная CD, так что точки A и D лежат на ω_1, а B и C — на ω_2. Прямые AD и BC пересекаются в точке P. Докажите, что точка P принадлежит O_1O_2.

5. Треугольник ABC вписан в окружность ω_1. Окружность ω_2 касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно и касается ω_1 внутренним образом в точке M. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $AKIM$ — вписанный и что MI — биссектриса угла AMC.

6. Треугольник ABC вписан в окружность ω_1. Окружность ω_2 касается ω_1 внутренним образом и отрезков AB и BC в точках K и L. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что I — середина KL.

7*. Три хорды окружности ω попарно пересекаются в точках A, B и C. Окружность ω_A касается лучей AC и AB и касается ω внутренним образом в точке A'. Аналогично определим окружности ω_B и ω_C, касающиеся ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

8*. Внутри угла, образованного лучами OP и OQ, проведен луч OR. В угол POQ вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Точки A, B, C и D - точки пересечения луча OR с окружностями ω_1 и ω_2, лежащие на OR в указанном порядке. Из точки A проводятся касательные l_A и m_A к ω_2. В криволинейный треугольник, высекаемый ими в окружности ω_1 вписана окружность τ_1. Из точки D проводятся касательные l_D и m_D к ω_1. В криволинейный треугольник, высекаемый ими в окружности ω_2, вписана окружность τ_2. Докажите, что радиусы окружностей τ_1 и τ_2 равны.

9*. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается сторон AB и BC в точках K и L и касается ω в точке M внутренним образом. Точка N — середина дуги AC окружности ω, не содержащей точку B. Докажите, что прямые KL и MN пересекаются на прямой AC.

О теореме Понселе (10–11)

А. А. Заславский

В наиболее простой форме теорема Понселе утверждает следующее.

Теорема Понселе. *Пусть даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из точки A_0 большей окружности проведем касательную к меньшей и найдем вторую точку A_1 пересечения этой касательной с большей окружностью. По точке A_1 аналогично построим точку A_2 и т. д. Тогда, если $A_0 = A_n$ для какой-то точки A_0, это будет выполнено и для любой другой точки большой окружности.*

Говоря неформально, вписанно-описанный многоугольник можно «вращать» между двумя окружностями (при этом его форма, вообще говоря, меняется). Будем называть такой «вращающийся» многоугольник многоугольником Понселе.

Доказательство теоремы Понселе и ее обобщений для произвольного n можно прочитать в работах [3], [1]. Предлагаемая серия задач содержит доказательство теоремы Понселе и некоторых свойств многоугольников Понселе для $n=3,\ 4$. Она предназначена в первую очередь школьникам 10–11 классов, но может быть интересна и девятиклассникам.

Контрольные вопросы

I. Какая величина остается постоянной при вращении треугольника Понселе?

а) Периметр;
б) площадь;
в) радиус описанной окружности.

II. Дан неравнобедренный треугольник. Сколько существует попарно не равных равнобедренных треугольников, имеющих те же радиусы описанной и вписанной окружностей?

а) Ни одного;
б) один;
в) два;
г) бесконечно много.

III. В вписанно-описанном четырехугольнике две стороны равны. Какое из утверждений верно?

а) Две другие стороны равны;
б) две другие стороны параллельны;
в) две другие стороны равны или параллельны;
г) никакое.

Теорема Понселе для $n = 3$

1. Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r — их радиусы. Докажите *формулу Эйлера*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

2. Докажите теорему Понселе для $n=3$.

С каждым треугольником связан ряд так называемых замечательных точек или центров. Когда треугольник «вращается» между описанной и вписанной окружностями, эти точки движутся по каким-то кривым. В следующих задачах требуется найти соответствующие траектории.

3. Какую траекторию описывает

а) точка пересечения медиан M;
б) ортоцентр H;

в)* точка Жергонна G (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью) треугольника Понселе?

Точку M обычно называют центром тяжести треугольника. На самом деле эта точка является центром тяжести трех равных масс, помещенных в вершины треугольника, и центром тяжести сплошного треугольника, например вырезанного из картона. Если же масса треугольника сосредоточена на его периметре, как у треугольника, сделанного из проволоки, то центром тяжести будет другая точка M_1. Соответственно для произвольного многоугольника можно определить три центра: центр тяжести вершин M_0, центр тяжести периметра M_1 и центр тяжести сплошного многоугольника M_2.

4. Найдите центр M_1 треугольника и его траекторию при «вращении».

5. Пусть A', B', C' — точки касания сторон треугольника Понселе с вписанной окружностью. Найдите траекторию центра тяжести M_0 треугольника $A'B'C'$.

6*. Дан треугольник Понселе и неподвижная точка P. Найдите траекторию точки, изогонально сопряженной P.

Теорема Понселе для $n = 4$

7. Дана окружность и точка P внутри нее. Рассмотрим пары перпендикулярных лучей с началом P, пересекающих окружность в точках A и B.

а) Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

б) Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точках A и B.

8. Докажите теорему Понселе для $n = 4$.

9. Пусть две окружности с центрами O, I и радиусами R, r удовлетворяют теореме Понселе для $n = 4$. Вывести соотношение, связывающее величины R, r и $d = OI$.

10. а) Докажите, что диагонали всех вписанно-описанных четырехугольников с данными вписанной и описанной окружностями пересекаются в одной точке P, лежащей на прямой OI.

б) Вывести соотношение, связывающее OP, R и d.

11. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон вписанно-описанного четырехугольника с вписанной окружностью, являются биссектрисами углов между его диагоналями.

12. Найдите центры тяжести M_0, M_1, M_2 четырехугольника и их траектории.

13*. Докажите, что в четырехугольнике Понселе

а) произведение тангенсов углов, образованных диагоналями с прямой OI;

б) произведение длин диагоналей

постоянно.

Зачетные задачи: 2, 5, 8–12.

Решения

1. Проведем прямую через I и вершину C треугольника ABC и найдем вторую точку C' пересечения этой прямой с описанной около ABC окружностью (рис. 1).

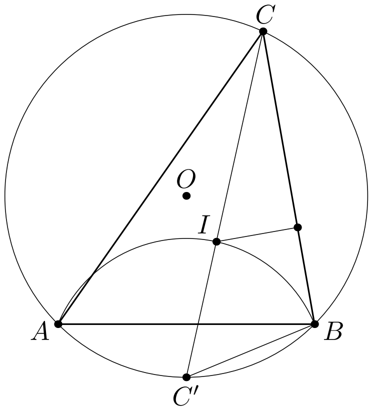


Рис. 1

Так как

$$C'A = C'B, \quad \angle AIB = \pi - \frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{\pi + \angle C}{2}, \quad \angle AC'B = \pi - \angle C,$$

получаем: C' — центр окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, $IC' = C'B = 2R\sin\dfrac{\angle C}{2}$. С другой стороны, $IC = r/\sin\dfrac{\angle C}{2}$, следовательно,

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr.$$

2. Пусть дан треугольник ABC. Из произвольной точки C' на его описанной окружности проведем касательные к вписанной окружности треугольника и найдем вторые точки A', B' их пересечения с описанной окружностью. Надо показать, что прямая $A'B'$ также касается вписанной окружности.

Предположим противное. Например, пусть $A'B'$ не пересекает вписанной окружности треугольника ABC. Будем увеличивать угол $A'C'B'$ так, чтобы прямая $C'I$ оставалась его биссектрисой. Тогда расстояние от I до прямых $C'A'$ и $C'B'$ будет увеличиваться, а до прямой $A'B'$ — уменьшаться, и в какой-то момент окружность с центром I и радиусом $r' > r$ окажется вписанной в треугольник $A'B'C'$. Но из формулы Эйлера следует, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ равны, получаем противоречие. Случай, когда $A'B'$ пересекает вписанную окружность, рассматривается аналогично.

3. Проще всего воспользоваться *теоремой Фейербаха*, утверждающей, что окружность Эйлера, проходящая через середины A_0, B_0, C_0 треугольника ABC, касается его вписанной окружности. Из нее следует, что центр этой окружности, совпадающий с серединой отрезка OH, лежит на окружности с центром I и радиусом $R/2 - r$. Значит, точки M и H лежат на образах этой окружности при гомотетиях с центром O и коэффициентами $2/3$ и 2 соответственно.

Точка Жергонна также движется по окружности, причем эта окружность соосна с описанной и вписанной окружностями треугольника. Однако простое геометрическое доказательство этого факта пока получить не удалось.

4. Сосредоточив массы сторон треугольника в их центрах тяжести — точках A_0, B_0, C_0, получим, что M_1 — центр окружности, вписанной в треугольник $A_0B_0C_0$. Следовательно, M_1 — образ M при гомотетии с центром I и коэффициентом $3/2$, так что его траектория — тоже окружность.

5. Пусть A'', B'', C'' — вторые точки пересечения высот треугольника $A'B'C'$ с вписанной окружностью ABC. Тогда $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ — биссектрисы углов $A''B''C''$, т. е. ортоцентр H' треугольника $A'B'C'$ совпадает с центром вписанной окружности $\triangle A''B''C''$. Кроме того, нетрудно проверить, что стороны $\triangle A''B''C''$ параллельны соответствующим сторонам $\triangle ABC$, и значит, эти треугольники гомотетичны. При этой гомотетии O переходит в I, а I — в H', следовательно, H' лежит на прямой OI и $IH'/OI = r/R$. Поэтому при вращении треугольника H', а значит, и делящий отрезок $H'I$ в отношении $2:1$ центр тяжести $\triangle A'B'C'$, остается неподвижным.

6. *Ответ.* Пусть P' — точка, инверсная P относительно описанной окружности треугольника. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром P', переводящую P в I, и найдем образ Q точки I при этой гомотетии. Искомая траектория — окружность с центром Q (рис. 2). Это можно доказать, используя комплексные числа. Геометрическое доказательство неизвестно.

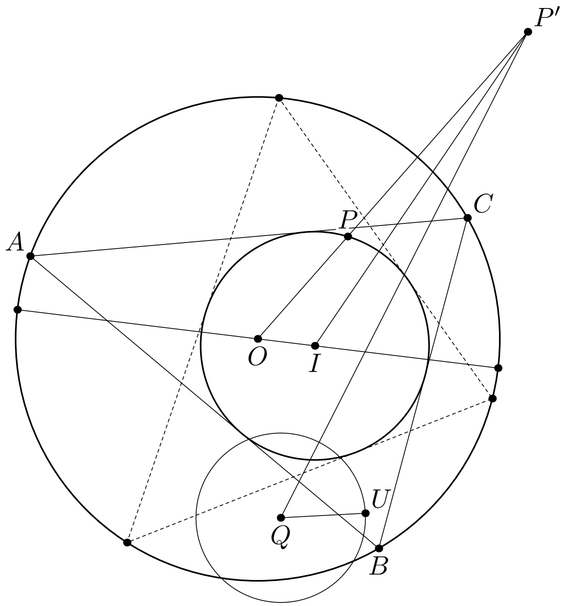


Рис. 2

7. Пусть C — четвертая вершина прямоугольника $PACB$. Так как $OP^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2$, C описывает окружность с центром O. Значит, середина отрезка AB описывает окружность, центром которой является середина OP, и инверсная к ней точка пересечения касательных также описывает окружность.

8. *Указание.* Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон четырехугольника с вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

9. *Ответ.*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.$$

10. б) *Ответ.*

$$\frac{R+OP}{R-OP} = \frac{(R+d)^2}{(R-d)^2}.$$

11. Из формулы предыдущей задачи нетрудно получить, что P — предельная точка пучка, порожденного описанной и вписанной окружностями четырехугольника. Поэтому для любой точки X описанной окружности отношение расстояния XP к касательной из X к вписанной окружности будет одним и тем же. Утверждение задачи следует из этого факта и того, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон описанного четырехугольника с вписанной окружностью, проходят через точку пересечения диагоналей.

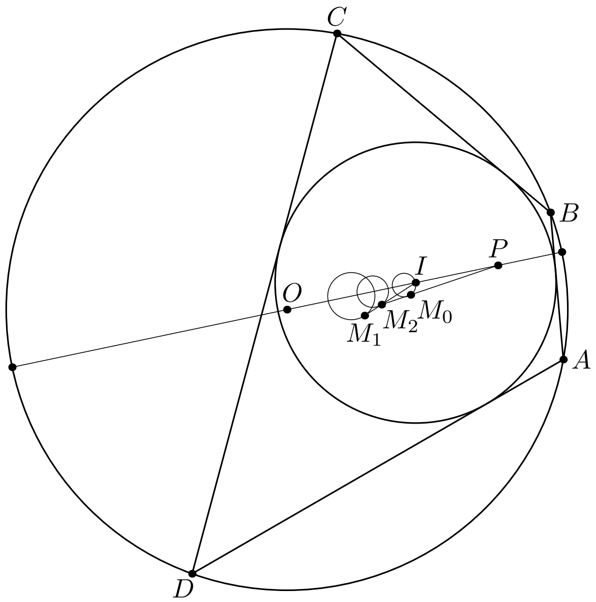


Рис. 3

12. Точка M_0 — середина отрезка между серединами диагоналей четырехугольника. Используя тот факт, что прямая, соединяющая середины диагоналей описанного четырехугольника, проходит через центр вписанной окружности, нетрудно вывести, что траектория M_0 — окружность. Точка M_2 лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести двух треугольников, на которые четырехугольник разрезается диагональю. Следовательно, M_2 можно построить как точку пересечения двух таких отрезков. Поскольку каждый из этих отрезков параллелен одной из диагоналей четырехугольника, а вторую пересекает в точке, делящей отрезок от P до середины диагонали в отношении $2:1$, то M_2 — образ M_0 при гомотетии с центром P и коэффициентом $4/3$, т. е. траектория M_2 — также окружность. С другой стороны, M_2 можно получить как центр тяжести четырех масс, помещенных в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA и пропорциональных площадям этих треугольников. Поскольку M_1 — это центр тяжести четырех масс, помещенных в серединах сторон AB, BC, CD, DA и пропорциональных длинам этих сторон, то M_1 — образ M_2 при гомотетии с центром I и коэффициентом $3/2$. Значит, траектория M_1 тоже окружность.

Литература

[1] *Акопян А. В.*, *Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Заславский А. А.*, *Косов Д.*, *Музафаров М.* Траектории замечательных точек треугольника Понселе // Квант. 2003. № 2.

[3] *Заславский А. А.*, *Челноков Г. Р.* Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии // Математическое образование. 2001. № 4(19).

ГЛАВА 6

МИНИКУРС ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

А. Б. Скопенков

Хотя данный миникурс покрывается имеющейся литературой по геометрическим преобразованиям [1)], может представлять интерес отбор материала. Во-первых, я старался расположить задачи так, чтобы сначала новые понятия (геометрических преобразований) использовались для решения интересных задач, формулируемых без этих понятий, и только потом эти новые (но уже мотивированные) понятия изучались бы сами по себе. Во-вторых, из обилия имеющегося материала я попытался выбрать важнейшую часть, которую реально было бы изучить (сильному школьнику) за относительно короткое время (ориентировочно 10 занятий).

Применения движений (8–9)

А. Д. Блинков

1. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке. (См. [9].)

2. На диаметре AB окружности взята точка M. Хорда CD проходит через M под углом 45° к прямой AB. Докажите, что $|CM|^2 + |DM|^2$ не зависит от выбора точки M. (См. [9].)

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a, взяты соответственно точки M и N так, что площадь тре-

[1)] См., например, *Заславский А. А.* Геометрические преобразования. М.: МЦНМО, 2003 (теорема Шаля — § 1.2, подобие и гомотетия — § 1.3, аффинные преобразования — гл. 2, проективные преобразования — гл. 3, инверсия — гл. 4, теорема Маскерони о построениях одним циркулем — § 5.1, комплексная интерпретация движений и подобий — § 6.1, комплексная интерпретация инверсии — § 6.2); *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М: МЦНМО, 2007; `http://www.mccme.ru/prasolov`, и *Яглом И. М.* Геометрические преобразования. В 2 т. М.: Гостехиздат, 1956.

угольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN. Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN, проведенной из вершины A. (См. [4].)

4. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы $|KP|+|PQ|+|QH|$. (См. [2].)

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке E. Докажите, что если трапеция описанная, то угол AED — тупой. (См. [5].)

6. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и BH; $|KH|=a$; $|BD|=b$. Найдите расстояние от вершины B до ортоцентра треугольника BKH. (См. [9].)

7. Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Расстояния от вершин A и B до произвольной точки M этой окружности равны соответственно a и b. Найдите длину CM. (См. [9].)

8. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. Прямые, проведенные на плоскости через произвольную точку P перпендикулярно CA, CM и CB, пересекают прямую CH в точках A', M' и B'. Докажите, что $|A'M'|=|B'M'|$. (См. [9].)

Зачетные задачи: 4, 5, 6 и 7.

Контрольные вопросы

I. Параллелограмм имеет ровно четыре оси симметрии. Определите его вид.

а) Прямоугольник, отличный от квадрата;
б) ромб, отличный от квадрата;
в) квадрат;
г) такого параллелограмма не существует.

II. Треугольник имеет центр симметрии. Определите вид треугольника.

а) Разносторонний;
б) равносторонний;
в) равнобедренный;
г) такого треугольника не существует.

III. В правильном многоугольнике есть две оси симметрии, пересекающиеся под углом 20°. Какое наименьшее количество сторон может иметь этот многоугольник?

а) 9; б) 6; в) 18; г) 12.

IV. Даны точки $A(1;0)$, $B(-1;2)$. Укажите координаты:

а) образа точки B при симметрии относительно оси абсцисс;

б) образа точки A при симметрии относительно точки B;

в) образа точки A при параллельном переносе, который точку B переводит в точку A;

г) образа точки B при повороте с центром A на $-90°$.

V. Дан равносторонний треугольник ABC площади S, O — его центр. Определите площадь пересечения (общей части) данного треугольника и его образа:

а) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OC}$;

б) при центральной симметрии относительно точки O;

в) при симметрии относительно прямой, содержащей его среднюю линию;

г) при повороте на угол $120°$.

VI. На равных сторонах AC и BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC так отмечены точки K и M соответственно, что $|AK| = |CM|$. Точка D — середина отрезка AB. Найдите $\angle KDM$.

Решения

1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность с центром O; E, F, G и H — середины его сторон (см. рис. 1), тогда $OH \perp AD$.

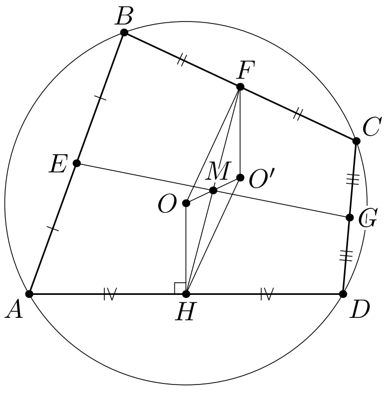


Рис. 1

Так как $EFGH$ — параллелограмм, то $M = EG \cap FH$ является серединой каждой из его диагоналей.

Пусть $O' = Z_M(O)$, т. е. O' — образ точки O при центральной симметрии с центром M, тогда $F = Z_M(H)$. Таким образом, $O'FOH$ — параллелограмм, значит $(O'F) \perp (AD)$. Рассмотрев аналогично перпендикуляры OG, OF и OE к остальным сторонам $ABCD$ и их образы при симметрии относительно точки M, получим, что они также проходят через точку O', что и требовалось доказать.

2. Пусть C' и D' — образы точек C и D при симметрии относительно AB (см. рис. 2). Тогда $\angle CMC' = 90^\circ$, поэтому из прямоугольного треугольника DMC' получаем:

$$|CM|^2 + |DM|^2 = |C'M|^2 + |DM|^2 = |DC'|^2.$$

Так как независимо от положения точки M дуга $C'D$ соответствует вписанному углу $C'CD$ величиной 45°, то $|DC'|^2$ не зависит от выбора точки M. Следовательно, сумма $|CM|^2 + |DM|^2$ также не зависит от выбора точки M, что и требовалось доказать.

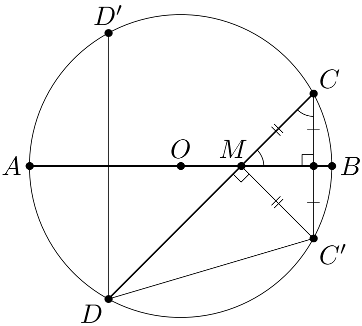


Рис. 2

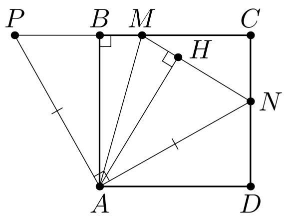


Рис. 3

3. *Ответ*: $\angle MAN = 45^\circ$; длина высоты равна a.

Решение. Рассмотрим поворот с центром A на 90°: образом точки N является точка P, лежащая на луче CB (см. рис. 3). Из условия задачи следует, что

$$S_{MAN} = S_{ABM} + S_{ADN} = S_{ABM} + S_{ABP} = S_{MAP}.$$

Так как у треугольников MAN и MAP есть общая сторона $[AM]$ и $|AN| = |AP|$, то $\sin\angle PAM = \sin\angle MAN$.

Учитывая, что эти треугольники остроугольные и что $\angle PAN = 90^\circ$, получим: $\angle MAN = \angle PAM = 45^\circ$. Тогда $\triangle PAM = \triangle NAM$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому их соответствующие высоты равны: $|AH| = |AB| = a$.

4. *Ответ*: $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC: $\angle C = 90°$; $|BC| = a$; $|AC| = b$; $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$ (см. рис. 4). Рассмотрим симметрию относительно BC: образами точек A и K являются точки K' и A' соответственно. Аналогично при симметрии относительно AC образами точек B и H соответственно являются точки B' и H'. Получаем, что $AB'A'B$ — ромб и $|KP| + |PQ| + |QH| = |K'P| + |PQ| + |QH'|$.

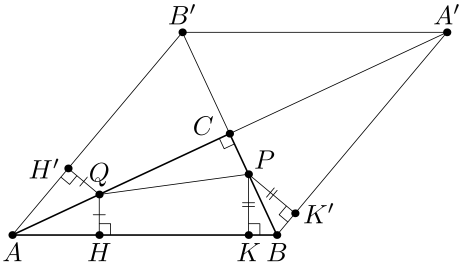


Рис. 4

Так как точки K' и H' лежат на параллельных прямых, причем $[PK'] \perp [A'B]$ и $[QH'] \perp [AB']$, то наименьшее значение полученной суммы достигается тогда и только тогда, когда точки K', P, Q и H' принадлежат общему перпендикуляру к прямым AB' и BA'. Искомое значение суммы в этом случае равно расстоянию между этими прямыми, т. е. длине высоты ромба. $H = 2h_c = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Рассмотрим данную трапецию $ABCD$. При параллельном переносе на $\overrightarrow{BC}$ образом диагонали BD является $[CK]$, причем $|BD| = |CK|$ и $\angle AED = \angle ACK$ (см. рис. 5). Образом стороны AB при этом переносе является $[CP]$, поэтому $|AB| = |CP|$.

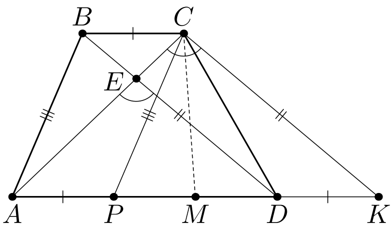


Рис. 5

Проведем $[CM]$ — медиану треугольника ACK. Так как $|AP| = |BC| = |DK|$, то $[CM]$ является и медианой треугольника PCD. Следовательно,

$$|CM| < \frac{|CP| + |CD|}{2} = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{|AD| + |BC|}{2} = \frac{|AK|}{2},$$

так как данная трапеция — описанная.

Рассмотрим окружность с диаметром AK, точка M — ее центр и $|CM| < \dfrac{|AK|}{2}$, поэтому точка C лежит внутри этой окружности, следовательно, угол ACK — тупой, т. е. и угол AED — тупой, что и требовалось доказать.

6. *Ответ*: $\sqrt{b^2 - a^2}$.

Решение. Пусть H' — ортоцентр $\triangle BKH$ (см. рис. 6). Так как $HH' \perp BK$ и $KH' \perp BH$, то $HH' \parallel AD$ и $KH' \parallel CD$, т. е. $HH'KD$ — параллелограмм.

Рассмотрим параллельный перенос на $\overrightarrow{H'H}$: образом точки K является точка D, а образом точки B — некоторая точка P, лежащая на $[BC]$. Так как $PD \parallel BK$, то $BPDK$ — прямоугольник, значит, $|PK| = |BD| = b$. Кроме того, так как $BH' \perp KH$, то $PH \perp KH$, причем $|PH| = |BH'|$ (по определению параллельного переноса). Таким образом, $\triangle PKH$ — прямоугольный, поэтому $|BH'| = |PH| = \sqrt{|KP|^2 - |KH|^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

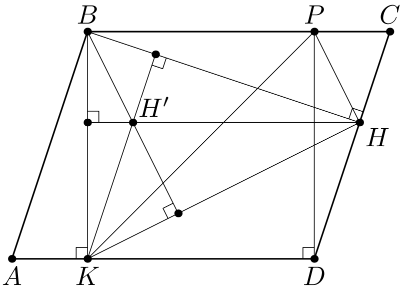


Рис. 6

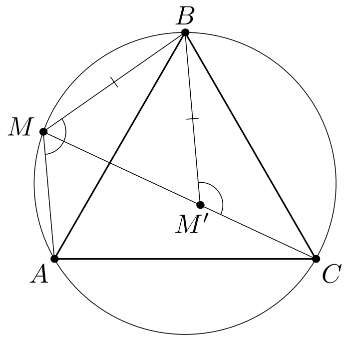


Рис. 7

7. *Ответ*: $a + b$ или $|a - b|$.

Решение. Пусть точка M лежит на дуге AB, не содержащей точку C (см. рис. 7). Рассмотрим поворот с центром B на угол $60°$, при котором точка A перейдет в точку C. Если M' — образ точки M при таком повороте, то $\triangle ABM$ перейдет в $\triangle CBM'$ и, следовательно, $\angle BM'C = \angle BMA = 120°$.

Так как $\angle MBM' = 60^\circ$ и $|BM'| = |BM| = b$, то $\triangle MBM'$ — равносторонний, поэтому $\angle BM'M = 60^\circ$. Точка M' лежит на $[CM]$, значит,

$$|CM| = |CM'| + |M'M| = |AM| + |BM| = a + b.$$

Аналогично, если M лежит на дуге AC, то $b = a + |CM|$, а если M лежит на дуге BC, то $a = b + |CM|$. Первый из этих случаев возможен, если $b > a$, а второй — если $b < a$.

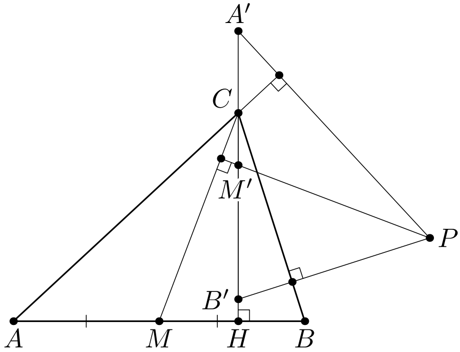


Рис. 8

8. Рассмотрим поворот на 90° с центром в точке P (см. рис. 8). При таком повороте образами прямых PA', PB' и $A'B'$ являются прямые, параллельные CA, CB и AB соответственно. Следовательно, образ при повороте на 90° с центром в точке P равен $R_P^{90^\circ}(\triangle PA'B') = \triangle PA''B''$, стороны которого соответственно параллельны сторонам данного треугольника. Значит, $\triangle PA''B'' \sim \triangle CAB$, причем если $[PM'']$ — медиана треугольника $PA''B''$, то $PM'' \parallel CM$, поскольку преобразование подобия сохраняет пропорциональность отрезков и величины углов. Так как $PM'' = R_P^{90^\circ} PM'$, то M' — середина $[A'B']$.

Литература

[1] *Блинков А. Д.*, *Горская Е. С.*, *Гуровиц В. М.* Московские математические регаты. Изд. 2-е. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Васильев Н. Б.*, *Гутенмахер В. Л.*, *Раббот Ж. М.*, *Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1987.

[3] *Гальперин Г. А.*, *Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[4] *Готман Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1996.

[5] Задачи Международного математического турнира городов.

[6] Задачи Московской математической олимпиады (городской и окружной туры).

[7] Задачи Московской устной олимпиады по геометрии.

[8] *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008.

[9] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М: МЦНМО, 2007.

[10] *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО, 2005.

[11] *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

[12] Шесть фестивалей (материалы Российских фестивалей юных математиков). Краснодар: ГИНМЦ, 1996.

Самосовмещения (8–10)

Werde der du bist[2].
J. W. Goethe

0. Дайте определение *равенства* отображений.

1. Найдите все повороты и осевые симметрии, переводящие в себя множество вершин

а) прямоугольника 1×2;
б) квадрата;
в) правильного треугольника;
г) правильного n-угольника.

2. Найдите число раскрасок карусели из 3 вагончиков в a цветов (т. е. количество раскрасок вершин правильного треугольника в a цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы).

б) Найдите число a-цветных ожерелий из 3 бусин (т. е. количество раскрасок вершин правильного треугольника в a цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом или осевой симметрией, неотличимы).

Движением плоскости называется отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояния. Напомним, что движения сохраняют прямые, окружности, параллельность, величины углов и площади многоугольников.

[2] Стань самим собой. — *Пер. с нем.*

3. Пусть точки A, B, C плоскости не лежат на одной прямой, а f и g — движения.

а) Если $f(A, B, C) = (A, B, C)$, то $f = id$.

б) Если $f(A, B, C) = g(A, B, C)$, то $f = g$.

Самосовмещением фигуры (т. е. множества точек) M называется движение f, для которого $f(M) = M$.

4. а) Самосовмещений (множества вершин) правильного треугольника не больше 6.

б) Постройте взаимно однозначное соответствие (т. е. биекцию) между множеством самосовмещений правильного треугольника и множеством перестановок 3-элементного множества. Докажите, что это биекция и что она «сохраняет композицию».

5. а) Найдите все параллельные переносы пространства, переводящие данный куб в себя.

в) То же для центральных симметрий.

г) То же для зеркальных симметрий.

д) То же для осевых симметрий.

Вращением пространства вокруг ориентированной прямой l на угол α называется отображение R_l^α пространства, которое каждую точку прямой l оставляет на месте и каждой точке X пространства, не лежащей на прямой l, ставит в соответствие точку X', определяемую так: берем проекцию O точки X на l, проводим плоскость XOX' ортогонально прямой l, так что $OX = OX'$ и угол XOX' в этой плоскости равен α (положительное направление отсчета углов в плоскости XOX' согласовано с ориентацией пространства и прямой l по правилу буравчика).

6. а) Ось любого вращения пространства, переводящего данный куб в себя, проходит либо через вершину, либо через середину ребра, либо через центр грани.

б) Найдите все вращения пространства, переводящие данный куб в себя.

в) То же для правильного тетраэдра.

г) То же для правильного октаэдра [3].

Поворотной симметрией пространства называется композиция вращения и зеркальной симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения (или, эквивалентно, композиция вращения и центральной симметрии относительно точки, лежащей на оси вращения).

---

[3] *Правильный октаэдр* — выпуклый многогранник, вершины которого расположены в центре граней куба.

7. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в красный и серый цвета, если считаются одинаковыми раскраски, совмещающиеся

а) вращением; б) вращением или поворотной симметрией?

8. а) Найдите все поворотные симметрии, переводящие куб в себя.

б) То же для правильного тетраэдра.

в) То же для правильного октаэдра.

Движением пространства называется отображение пространства в себя, сохраняющее расстояния. Напомним, что движения сохраняют полупространства, плоскости, прямые, сферы, окружности, параллельность, величины углов, площади многоугольников и объемы многогранников.

9. Пусть точки A, B, C, D пространства не лежат в одной плоскости, а f и g — движения.

а) Если $f(A, B, C, D) = (A, B, C, D)$, то $f = id$.

б) Если $f(A, B, C, D) = g(A, B, C, D)$, то $f = g$.

10. а) Постройте взаимно однозначное соответствие (т. е. биекцию) между множеством самосовмещений правильного тетраэдра и множеством перестановок 4-элементного множества. Докажите, что это биекция и что она «сохраняет композицию».

б)* То же для объединения ребер и для объединения граней правильного тетраэдра.

11. *Двойственные* правильные многогранники имеют одинаковое число самосовмещений.

12. Найдите все самосовмещения множества вершин

а) куба;

б) прямоугольного параллелепипеда;

в) правильной n-угольной пирамиды;

г) октаэдра;

д)* додекаэдра;

е)* икосаэдра.

Для каждого многогранника и типа самосовмещений нарисуйте многогранник и самосовмещение (приветствуются красивые цветные рисунки), укажите перестановку вершин многогранника, реализуемую этим самосовмещением, и число самосовмещений такого типа.

13. Постройте биекцию, сохраняющую композицию, между каждой из найденных групп самосовмещений (см. задачу 12) и подмножеством группы перестановок n-элементного множества.

Указания и решения

2. *Ответ.* а) $(a^3 - a)/3$. б) $(a^3 - a)/6$.

Классификация движений (8–10)

Чужбина так же сродственна отчизне,
Как тупику соседствует пространство.
И. Бродский

О применении движений к решению задач по элементарной геометрии см., например, вышеприведенный материал А. Д. Блинкова [4)].

Обозначим через S_l осевую симметрию относительно прямой l, через $T_{\vec{a}}$ — параллельный перенос на $\vec{a}$, через R_A^α — поворот вокруг точки A на угол α против часовой стрелки.

1. Любое движение прямой есть либо перенос, либо симметрия. Переносы на разные векторы и симметрии с разными центрами попарно различны.

2. Найдите композиции:
а) $S_l \circ S_m$ для $l \parallel m$; б) $S_l \circ S_m$ для $l \cap m \neq \varnothing$;
в) $S_l \circ T_{\vec{a}}$; г) $S_l \circ R_A^\alpha$.

3. а) Любое движение плоскости разлагается в композицию симметрии и движения, имеющего неподвижную точку.

б) Любое движение плоскости, имеющее неподвижную точку, разлагается в композицию симметрии и движения, имеющего хотя бы две неподвижные точки.

в) **Теорема Шаля.** Любое движение плоскости является либо поворотом, либо переносом, либо скользящей симметрией.

Движение плоскости (пространства) называется *собственным*, если существует его разложение в композицию четного числа осевых (зеркальных) симметрий. Неформально говоря, движение является собственным, если оно сохраняет ориентацию.

4. а) Если движение является собственным, то *любое* его разложение в композицию осевых симметрий содержит четное число симметрий.

б) Любое собственное движение плоскости является либо поворотом, либо переносом.

[4)] См. также: главы 15 – 18 книги: *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007; *Соловьев Ю. П.* Добавление к книге *Александрова П. С.* Введение в теорию групп (выпуск 7 серии «Библиотечка Кванта») М.: Наука, 1980; `http://www.mccme.ru/free-books/djvu/bib-kvant/groups.htm`.

5. Найдите композиции:

а) $S_l \circ S_\alpha$ для $l \perp \alpha$; б) $S_\alpha \circ S_\beta$ для $\alpha \parallel \beta$;

в) $S_\alpha \circ S_\beta$ для $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$; г) $R_l^\alpha \circ R_m^\beta$ для $l \cap m \neq \varnothing$;

д) $R_l^\alpha \circ T_{\vec{a}}$; е) $S_l \circ S_m$ для скрещивающихся l и m.

6. Являются ли собственными движениями

а) зеркальная симметрия;

б) центральная симметрия (сравните со случаем прямой и плоскости)?

в) Решите аналог задачи 4 а) для пространства.

7. а) Любое собственное движение пространства с неподвижной точкой является вращением.

б) Любое собственное движение сферы есть вращение.

в) Любое собственное движение пространства является *винтовым*, т. е. композицией вращения и переноса с сонаправленными осью и вектором.

8. а) Любое движение пространства с неподвижной точкой является вращением или поворотной симметрией.

б) Любое движение пространства является винтовым движением, поворотной симметрией или скользящей зеркальной симметрией.

Указания и решения

2 в), **5** д). *Указание.* $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$, $T_{\vec{a}_\perp} = S_l \circ S_{l'}$.

2. г) *Указание.* $R_A^\alpha = S_{l'} \circ S_m$, $l' \parallel l$.

7. а) *Указание.* Это движение разлагается в композицию двух вращений с пересекающимися осями. Или: если $f(O) = O$ и $f(A) = A'$ не лежит на прямой AO, то $f = R_l^{\angle A'OA}$, где $O \in l \perp AOA'$.

в) *Указание.* Сначала докажите, что это движение разлагается в композицию переноса и собственного движения с неподвижной точкой.

Применение подобия и гомотетии[5] (8–9)

А. Д. Блинков

1. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M соответственно. Докажите, что $|AK|^2 = |LK| \cdot |KM|$. (См. [9].)

[5] Список использованной литературы тот же, что и в теме «Применение движений».

2. На стороне BC треугольника ABC постройте точку M так, чтобы прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из M на AB и AC, была параллельна BC. (См. [9].)

3. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что MP — биссектриса угла AMB. (См. [9].)

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, точка F — основание перпендикуляра, опущенного из E на сторону AB. Найдите $\angle CFE$, если $\angle DFE = \alpha$. (См. [1].)

5. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены подобные треугольники: $\triangle A'BC \sim \triangle B'CA \sim \triangle C'AB$. Докажите, что в треугольниках ABC и $A'B'C'$ точки пересечения медиан совпадают. (См. [9].)

6. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E. Пусть ET — высота треугольника ABE, K — точка пересечения прямых DT и AE, M — точка пересечения прямых CT и BE. Докажите, что отрезок KM является стороной квадрата, вписанного в треугольник ABE. (См. [6].)

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите геометрическое место центров прямоугольников $PQRS$ таких, что точки P и Q лежат на стороне AC, а точки R и S — на сторонах AB и BC соответственно. (См. [9].)

8. По двум пересекающимся прямым движутся точки A и B с постоянными, но не равными скоростями V_A и V_B соответственно. Докажите, что существует такая точка O, что в любой момент времени $|AO| : |BO| = V_A : V_B$ и объясните ее построение. (См. [9].)

Зачетные задачи: 3, 4, 5, 6 и 7.

Контрольные вопросы

I. Дано: $A(1;0)$, $B(-1;2)$. Укажите координаты:

а) образа точки B при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = -0{,}5$;

б) образа точки A при поворотной гомотетии [6] с центром в начале координат, коэффициентом $k = 2\sqrt{2}$ и углом $45°$.

II. Длины оснований трапеции 6 см и 12 см. Отрезок с концами на боковых сторонах и параллельный основаниям трапеции проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найдите длину этого отрезка.

[6] Определение поворотной гомотетии можно посмотреть на с. 187.

III. На стороне CD квадрата $ABCD$ взята такая точка K, что $|CK|:|DK| = 1:2$. На отрезке KD как на стороне во внешнюю сторону построен квадрат. Укажите центр, коэффициент и угол поворотной гомотетии, переводящей больший квадрат в меньший.

IV. Отрезок, параллельный стороне прямоугольника, разбивает его на два подобных, но не равных прямоугольника. Найдите их размеры, если стороны данного прямоугольника 2 и 5.

V. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ADC и BDC, равны r_1 и r_2. Найдите радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решения

1. Так как $\triangle ABK \sim \triangle MDK$ (по двум углам), то $\dfrac{|AK|}{|KM|} = \dfrac{|BK|}{|KD|}$ (см. рис. 1). Аналогично $\triangle ADK \sim \triangle LBK$ (по двум углам), поэтому $\dfrac{|AK|}{|KL|} = \dfrac{|KD|}{|BK|}$. Перемножив полученные равенства почленно, получим, что

$$\frac{|AK|^2}{|KM|\cdot|KL|} = 1 \Longleftrightarrow |AK|^2 = |LK|\cdot|KM|,$$

что и требовалось доказать.

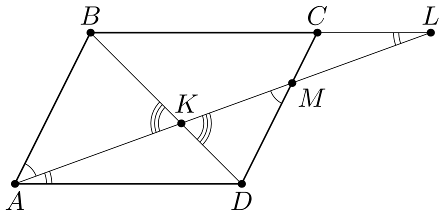


Рис. 1

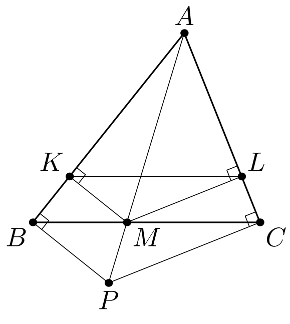


Рис. 2

2. Пусть M — искомая точка; $MK \perp AB$, $K \in [AB]$ и $ML \perp AC$, $L \in$ $\in [AC]$ (см. рис. 2).

Первый способ. Рассмотрим такую гомотетию H с центром A, что образом точки K будет являться точка B. Так как $KL \parallel BC$, то образом точки L при этой гомотетии будет являться точка C. Пусть $P = H_A(M)$, тогда $PB \perp AB$, $PC \perp AC$.

Таким образом, достаточно восставить перпендикуляры к сторонам AB и AC в точках B и C соответственно и соединить точку P их пересечения с вершиной A. Искомая точка $M = AP \cap BC$.

Второй способ. Проведем перпендикуляры к сторонам AB и AC данного треугольника, которые пересекутся в точке P. Так как $\angle ABP + \angle ACP = 180°$, то четырехугольник $BACP$ — вписанный, значит, $\angle APC = \angle ABC = \beta$; $\angle APB = \angle ACB = \gamma$. Следовательно, $\angle BAP = 90° - \gamma$; $\angle CAP = 90° - \beta$.

Таким образом, построение сведется к откладыванию одного из найденных углов со стороной AP в нужную полуплоскость. Искомая точка $M = AP \cap BC$.

Задача имеет решение, если точка P лежит между сторонами угла BAC, т. е. если углы B и C данного треугольника являются острыми.

3. Пусть радиусы данных окружностей равны R и r. Тогда образом большей окружности при гомотетии с центром M и коэффициентом $k = r/R$ является меньшая окружность. Пусть $H_M^k(A) = A'$ и $H_M^k(B) = B'$, тогда $H_M^k([AB]) = [A'B']$, где $[A'B]$ — хорда меньшей окружности, параллельная $[AB]$ (см. рис. 3). Используя параллельность, свойства вписанных углов и углов между касательной и хордой, получим, что $\angle AMP = \angle A'B'P = \angle B'PB = \angle BMP$. Следовательно, MP — биссектриса угла AMB, что и требовалось доказать.

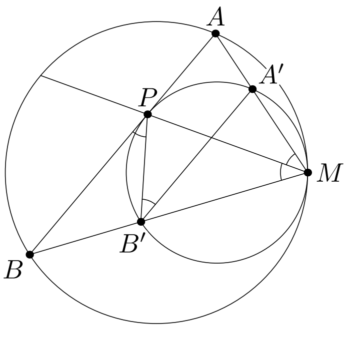


Рис. 3

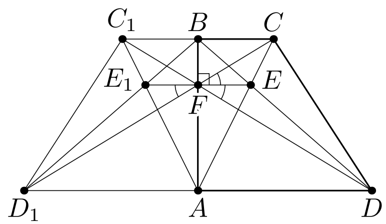


Рис. 4

4. *Ответ*: α.

Решение. Первый способ. Построим трапецию ABC_1D_1, симметричную данной относительно прямой AB (см. рис. 4). Точка $E_1 = AC_1 \cap BD_1$ симметрична точке E. В любой трапеции отношение расстояний от точки пересечения диагоналей до оснований равно отношению длин этих оснований. Расстояния от точек E и F до оснований BC и AD соответственно равны, кроме того, $|BC|:|AD|=|C_1C|:|D_1D|$, т. е. F является точкой пересечения диагоналей трапеции D_1DCC_1. Следовательно, $\angle CFE=\angle D_1FE_1=\angle DFE=\alpha$.

Второй способ. Так как треугольники EBC и EDA подобны и расстояния от точек E и F до оснований BC и AD соответственно равны, то $|BC|:|AD|=|BF|:|AF|$. Следовательно, подобны также треугольники CBF и DAF, значит, $\angle CFE=\angle BCF=\angle ADF=\angle DFE=\alpha$.

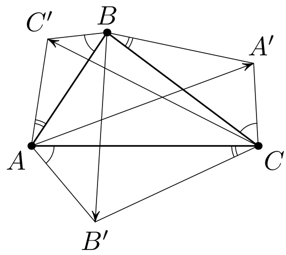


Рис. 5

5. Пусть P — поворотная гомотетия, переводящая $\overrightarrow{CB}$ в $\overrightarrow{CA'}$ (см. рис. 5). Тогда из равенства соответствующих углов и пропорциональности соответствующих сторон подобных треугольников следует, что $P(\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC'}$ и $P(\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB'}$. Значит,

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC'}=$$
$$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})+(P(\overrightarrow{CB})+P(\overrightarrow{AC})+P(\overrightarrow{BA}))=\vec{0}.$$

Пусть M — центр тяжести $\triangle ABC$, тогда $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0},$$

т. е. M — центр тяжести $\triangle A'B'C'$.

6. Пусть $ET=h$, а сторона квадрата равна a. Из подобия треугольников ADK и ETK (см. рис. 6 *а*) следует, что $\dfrac{AK}{EK}=\dfrac{DK}{TK}=\dfrac{a}{h}$. Аналогично из подобия треугольников BCM и ETM следует, что $\dfrac{BM}{EM}=\dfrac{a}{h}$. Из равенства $\dfrac{AK}{EK}=\dfrac{DK}{TK}=\dfrac{BM}{EM}=\dfrac{a}{h}$ следует, что $\dfrac{AE}{EK}=\dfrac{DT}{KT}=\dfrac{BE}{ME}=$ $=\dfrac{a+h}{h}$. Так как угол E — общий для треугольников AEB и KEM

и $\dfrac{AE}{KE} = \dfrac{BE}{ME} = \dfrac{a+h}{h}$, то $\triangle AEB$ подобен $\triangle KEM$. Из подобия этих треугольников следует пропорция $\dfrac{AB}{KM} = \dfrac{a+h}{h}$ и равенство углов BAE и MKE. Следовательно, отрезки KM и AB параллельны (см. рис. 6 *б*), причем $KM = \dfrac{ah}{a+h}$. Проведя KK_1 и MM_1 — перпендикуляры к AB (см. рис. 6 *в*), получим прямоугольник KK_1M_1M, вписанный в треугольник ABE. Из подобия треугольников DAT и KK_1T следует, что $\dfrac{DA}{KK_1} = \dfrac{DT}{KT}$, т. е. $KK_1 = \dfrac{ah}{a+h} = KM$. Следовательно, KK_1M_1M — квадрат, что и требовалось доказать.

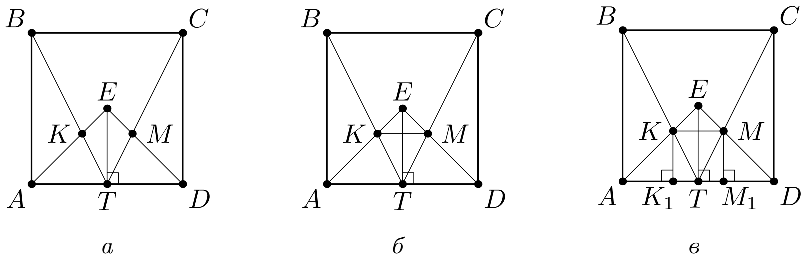


Рис. 6

7. *Ответ*: $[OM]$ (исключая точки O и M), где O — середина высоты, проведенной из вершины B, а M — середина $[AC]$.

Решение. Пусть D и E — середины сторон RQ и PS соответственно (см. рис. 7). Так как $RQ \parallel BH$ и $A = BR \cap HQ$, то существует гомотетия с центром в точке A, при которой образом $[RQ]$ является $[BH]$. Поэтому образом точки D при этой гомотетии является точка O, т. е. $D \in [OA]$. Аналогично доказывается, что $E \in [OC]$.

Рассмотрим точку N — центр прямоугольника $PQRS$, которая также является серединой $[DE]$. Так как существует гомотетия с центром O, переводящая $[DE]$ в $[AC]$, то $N \in [OM]$. Обратное: для любой внутренней точки отрезка OM существует прямоугольник, удовлетворяющий условию, для которого она является центром.

8. Пусть A и B — положение точек в какой-то момент, а A' и B' — в другой момент, по прошествии промежутка времени t (см. рис. 8). Тогда искомая точка O должна удовлетворять условию

$$|AO| : |BO| = |A'O| : |B'O| = tV_A : tV_B = |AA'| : |BB'|.$$

Следовательно, треугольники AOA' и BOB' должны быть подобны, значит, $\angle AOA' = \angle BOB'$.

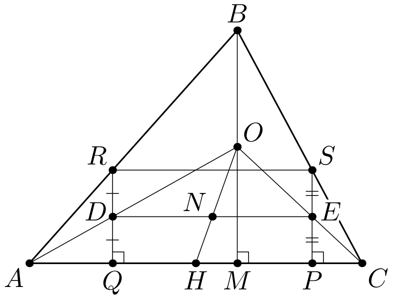


Рис. 7

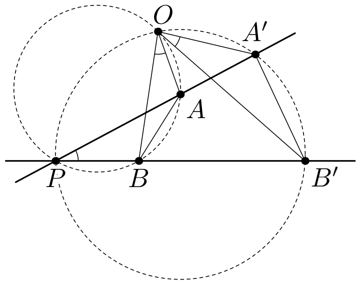


Рис. 8

Это означает, что существует поворотная гомотетия, переводящая $[AA']$ в $[BB']$, причем O — ее центр.

Пусть P — точка пересечения данных прямых, α — угол между ними. Так как при поворотной гомотетии с центром O образом точки A является точка B, то $[AB]$ должен быть «виден» из точки O под углом α. Следовательно, O лежит на дуге окружности, описанной около треугольника APB. Аналогично $[A'B']$ должен быть «виден» из точки O под углом α, значит, точка O лежит на дуге окружности, описанной около треугольника $A'PB'$. Таким образом, O — вторая точка пересечения этих окружностей.

Гомотетия и подобие (8–9)

Магнитная стрелка, непреодолимо влекомая
к северу, подобна мужу, который блюдет законы.
К. Прутков

Гомотетией H_O^k с центром O и коэффициентом k называют преобразование (прямой, плоскости или пространства), переводящее каждую точку X в такую точку X', что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

1. а) Радиус описанной сферы тетраэдра не меньше утроенного радиуса вписанной.

б) Даны две концентрические сферы и точка X на внешней. Постройте прямую, проходящую через X, на которой сферы высекают равные отрезки.

Подсказка: начните с плоского аналога.

2. Найдите $H_A^k \circ H_B^l$ для а) прямой; б) плоскости.

3. Трапеции $ABCD$ и $ADPQ$ имеют общее основание AD. Докажите, что точки пересечения прямых AB и CD, AP и DQ, BP и CQ лежат на одной прямой.

Поворотной гомотетией называют $H_O^{k,\varphi} := H_O^k \circ R_O^\varphi$.

4. а) Окружности α и β пересекаются в точках A и B. Пусть H — поворотная гомотетия с центром в A, переводящая α в β. Докажите, что для любой точки $X \in \alpha$ точка $H(X)$ получена пересечением прямой BX с окружностью β.

б) Окружности $S_1, \ldots, S_n$ проходят через точку O. Кузнечик из точки $X_i \in S_i$ прыгает в точку $X_{i+1} \in S_{i+1}$ так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через вторую точку пересечения S_i и S_{i+1}. Докажите, что после n прыжков (с S_1 на S_2, …, с S_n на S_1) кузнечик вернется в исходную точку.

в) Пусть концы отрезков AB и CD попарно различны, а P — точка пересечения прямых AB и CD. Центром поворотной гомотетии, переводящей AB в CD, является (отличная от P) точка пересечения описанных окружностей треугольников ACP и BDP.

5. Для комплексных чисел a, z найдите $H_a^{k,\varphi}(z)$.

Подобие — преобразование f плоскости, изменяющее расстояния в одинаковое ненулевое количество раз: для $A \neq B$ и $A' \neq B'$ выполнено

$$\frac{|f(A)f(B)|}{|AB|} = \frac{|f(A')f(B')|}{|A'B'|} \neq 0.$$

6. Для разных геометрических фигур укажите их свойства, сохраняющиеся и не сохраняющиеся при подобиях.

7. а) На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

б) То же для бесконечной карты.

Подобие называется *собственным*, если оно разлагается в композицию гомотетии и собственного движения (т. е. разлагающегося в композицию четного числа осевых симметрий).

8. а) Любое подобие является композицией гомотетии и движения.

б) Любое собственное подобие плоскости есть либо перенос, либо поворотная гомотетия.

в)* Определение собственного подобия корректно, т. е. не зависит от указанного разложения.

г) Любое собственное (или несобственное) подобие комплексной плоскости является отображением вида $f(z) = az + b$ (или $f(z) = a\bar{z} + b$). И обратно.

Указания и решения

2. *Указание.* а) Напишите формулы, задающие преобразования H_A^k и H_B^l в координатах.

б) Сведите к а). Ср. с задачей 19.24.

5. *Ответ.* $H_a^{k,\varphi}(z) = a + k(\cos\varphi + i\sin\varphi)(z - a)$.

Параллельная проекция и аффинные преобразования (9–11)

Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, l — прямая, не параллельная ни одной из них. *Параллельным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_2, параллельной l и проходящей через A, с плоскостью α_2.

1. а) Дайте определение растяжения относительно прямой.

б) Каждое растяжение равно некоторому параллельному проектированию.

в) Каждое параллельное проектирование равно композиции растяжения и подобия.

2. Любое параллельное проектирование

а) переводит прямые в прямые,

б) является биекцией,

в) переводит параллельные прямые в параллельные,

г) сохраняет отношение длин параллельных отрезков.

3. а) Параллельной проекцией можно перевести любой треугольник в правильный.

б) Каждая сторона треугольника поделена на три равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами. Докажите, что диагонали «внутреннего» 6-угольника пересекаются в одной точке.

4. а) Для любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

б) Если в пятиугольнике четыре из диагоналей параллельны противоположным сторонам, то и пятая диагональ параллельна противоположной стороне.

в)* Противоположные стороны 6-угольника параллельны. Тогда три отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

5. Можно ли параллельными проектированиями перевести
а) любую трапецию в равнобочную трапецию;
б) любой параллелограмм в квадрат;
в) любой четырехугольник в любой другой;
г) любую трапецию в любую другую?

6. Любое ли параллельное проектирование
а) переводит окружность в окружность;
б) сохраняет углы;
в) переводит ортогональные прямые в ортогональные;
г) сохраняет расстояния?

7. а) Отношение площадей многоугольников сохраняется при параллельном проектировании.

б) Найдите отношение площади «внутреннего» шестиугольника из задачи 3 б) к площади всего треугольника.

8. а) Дайте определение растяжения (параллельного проектирования) пространства.

б) Любой тетраэдр можно перевести растяжениями в любой другой.

в) То же для параллелепипеда и куба.

г) **Теорема о сечении аффинно правильной четырехугольной пирамиды.** Точки A_1, B_1, C_1, D_1, лежащие на боковых ребрах пирамиды $OABCD$, основание $ABCD$ которой — параллелограмм, расположены в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{SA_1}+\dfrac{1}{SC_1}=$ $=\dfrac{1}{SB_1}+\dfrac{1}{SD_1}$.

д) Если $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы в пространстве, то BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

9. а) Отношение объемов сохраняется при растяжении.

б) Любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

10. Пусть преобразование F плоскости является композицией нескольких параллельных проектирований (такие преобразования называются *аффинными*).

а) Преобразование F разлагается в композицию двух параллельных проектирований и движения.

б) Найдутся две ортогональные прямые с ортогональными F-образами.

в) Преобразование F разлагается в композицию параллельного проектирования и подобия.

Указания и решения

5. *Ответ.* а) Да; б) да; в) нет; г) нет.

6. *Ответ.* а)–г) Нет.

Центральная проекция и проективные преобразования [7] (9–11)

Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, O — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. *Центральным проектированием* с центром O плоскости α_1 на плоскость α_2 называют отображение, которое точке A_1 плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с плоскостью α_2.

1. а) Центральная проекция плоскости α_1 на параллельную ей плоскость α_2 с центром O равна некоторой гомотетии.

б) Если плоскости α_1 и α_2 пересекаются, то центральное проектирование α_1 на α_2 с центром O задает взаимно однозначное отображение плоскости α_1 без прямой l_1 на плоскость α_2 без прямой l_2, где l_1 и l_2 — прямые пересечения плоскостей α_1 и α_2 соответственно с плоскостями, проходящими через O параллельно α_1 и α_2. При этом на l_1 отображение не определено.

Прямую, на которой не определено центральное проектирование, а также прямую точек, не имеющих прообраза, называют *исключительной прямой* данной проекции.

в) При центральном проектировании прямая (не являющаяся исключительной) без точки (пересечения с исключительной прямой) проецируется в прямую без точки.

2. а) Через точку на боковом ребре четырехугольной пирамиды проведите плоскость так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

б) Центральным проектированием можно перевести любой выпуклый четырехугольник в параллелограмм.

3. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q

[7] См. также *Заславский А.* Некоторые факты проективной геометрии // Квант. 1996. №1.

соответственно. Тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.

б) **Теорема Паппа.** Точки C и C' лежат на прямых AB и $A'B'$, соответственно. Тогда три точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

в) **Теорема Дезарга.** Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C — точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

г) **Обратная теорема Дезарга.** В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C — точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Докажите, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке O.

4. а) Если точки A, B, C, D лежат на прямой, параллельной исключительной прямой, то для их образов A', B', C', D' выполнено $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$.

б) Если прямые параллельны исключительной прямой некоторого центрального проектирования, то их образы при этом проектировании также параллельны.

5. а) Диагонали и боковые стороны трапеции пересекаются в точках P и Q соответственно. Тогда прямая PQ пересекает основания трапеции в их серединах.

б) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.

в) **Построение Брианшона.** Пусть $O = A_1B \cap AC$, $BC \parallel A_1A$, $B_i = AB \cap A_iC$, $A_{i+1} = OB_i \cap A_1A$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $A_nA = \dfrac{1}{n}A_1A$.

г) При помощи одной линейки невозможно построить середину данного отрезка.

6*. Нарисуйте ваш дом, используя центральную проекцию.

7. а) *Двойное отношение* $(ABCD) := \dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})}{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})}$ (упорядоченной четверки точек на прямой) сохраняется при центральном проектировании.

б) Пусть Q, R — точки пересечения прямых AD и BC, AC и BD на плоскости, K и L — точки пересечения прямых QR и AB, QR и CD. Тогда $(QRKL) = -1$.

8. а) $(ABCX) = (ABCY) \iff X = Y$.

б) Любые три точки прямой можно перевести в любые три другие проективным преобразованием, причем единственным.

в) Преобразование P прямой является центральным или параллельным проектированием тогда и только тогда, когда P является дробно-линейным, т. е. когда существуют такие a, b, c, d, что $P(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

г) Преобразование плоскости, заданное формулой $P(x, y) = (1/x, y/x)$ является центральным проектированием.

9. а) Существует центральная проекция плоскости α_1 в непараллельную ей плоскость α_2, переводящая окружность в окружность. (Указание: используйте стереографическую проекцию.)

б) Существуют проектирование, переводящее окружность в окружность, а данную точку внутри окружности в центр образа.

в) Существует проектирование, переводящее окружность в окружность, а данную прямую, не пересекающую окружности, в бесконечно удаленную.

10. Двойственность точек и их поляр. а) Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.

б) *Диаметром окружности ω относительно прямой l*, не пересекающей ω, назовем отрезок, соединяющий две точки касания касательных к ω, опущенных из какой-либо точки на l. Докажите, что все диаметры относительно прямой l пересекаются в одной точке C_l.

Эта точка называется *двойственной к l*. Прямая l называется *полярой* точки C_l.

в) Поляра точки A перпендикулярна OA и содержит образ точки A при инверсии относительно ω.

г) Если точка A лежит на поляре точки B, то точка B лежит на поляре точки A.

д) Полярой точки пересечения поляр точек A и B является прямая AB.

е) Точки, двойственные к прямым, проходящим через A, лежат на поляре точки A.

11. а) **Теорема Брианшона**. Если шестиугольник $ABCDEF$ описанный, то AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

б) **Теорема Паскаля**. Если шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, то точки

$$X = AE \cap FB, \quad Y = BD \cap CE \quad \text{и} \quad Z = AD \cap CF$$

лежат на одной прямой.

12. а) Любой выпуклый четырехугольник можно перевести в квадрат композицией центральных и параллельных проектирований.

б) А всегда ли можно *одним* проектированием?

Зачетные задачи: 1 б); 2 а); 3 а)–в); 4 а); 5 а); 7 а), б); 8 б); 9 б); 11 а). Из них письменно: 3 а); 9 б).

Инверсия [8] (9–10)

Do you believe, wrong is right,
When you turn the world upside down.
Accept and Deaffy

Пусть на плоскости Π дана окружность S с центром O и радиусом R. *Инверсией относительно окружности* S называют преобразование $f\colon \Pi \setminus \{O\} \to \Pi \setminus \{O\}$, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O. Инверсию относительно S будем также называть *инверсией с центром O и степенью R^2*, а окружность S — *окружностью инверсии*.

1. Докажите, что треугольник BOA подобен треугольнику A^*OB^*. (28.1)

2. Во что переходят

а) точки, лежащие внутри S;

б) точки, лежащие вне S;

в) прямые и окружности, проходящие через O;

г) другие прямые и окружности?

Обобщенная окружность — это окружность или прямая.

3. а) Касание обобщенных окружностей сохраняется при инверсии.

б) В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

в) Пусть даны прямая a, окружность S и такая точка X на окружности S такая, что радиус XO перпендикулярен a. Две прямые, проходящие через X, пересекают a и S в точках A, B, C и D. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

г) Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку K первой окружности провели прямые KA и KB, пересекающие вторую

[8] См. также *Розенфельд Б. А.*, *Сергеева Н. Д.* Стереографическая проекция. М.: Наука, 1973; `http://plm.mccme.ru/ann/a53.htm`.

окружность в точках P и Q. Докажите, что хорда PQ второй окружности перпендикулярна диаметру KM первой окружности.

д) Дана окружность ω и хорда AB. Две окружности касаются хорды и ω и пересекаются в точках C и D. Докажите, что CD делит дугу AB (противоположную той, которой касаются окружности) пополам.

е) Даны две непересекающиеся окружности a и b. Две окружности c и d касаются их внешним образом и, кроме того, касаются в точке A. Найдите ГМТ A.

ж)* На окружности S выбраны точки A и B. Точка C — середина одной из дуг AB, а D — некоторая точка отрезка AB. Окружность S_1 касается отрезков BD (в точке B_1), CD и окружности S. Окружность S_2 касается продолжения отрезка AB за точку B (в точке B_2), окружности S (в точке K) и продолжения отрезка CD за точку D. Докажите, что угол B_1KB_2 прямой.

Пусть две окружности пересекаются в точке A. *Углом между окружностями* называют угол между касательными к окружностям в точке A. (Ясно, что если окружности пересекаются в точках A и B, то угол между касательными в точке A равен углу между касательными в точке B.) Аналогично определяется угол между прямой и окружностью.

4. Перпендикулярность и вообще углы между обобщенными окружностями сохраняются при инверсии.

б) Угол между обобщенными описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен тому же углу для треугольников ACD и BCD.

в) Обобщенные окружности α и β, β и γ, γ и δ, δ и α пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2, соответственно. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на обобщенной окружности, то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на обобщенной окружности.

5. а) $A^*B^* = \dfrac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

б) **Теорема Птолемея.** Для вписанного 4-угольника $ABCD$ имеем $BD \cdot AC = DC \cdot AB + BC \cdot AD$.

6. Задача Аполлония. Постройте окружность,

а) проходящую через 2 заданные точки и касающуюся данной окружности;

б) проходящую через данную точку и касающуюся 2 данных окружностей;

в)* касающуюся трех данных окружностей.

7.* Построения с помощью одного циркуля. а) Разделите отрезок AB пополам.

б) Постройте образ A^* данной точки A при инверсии относительно данной окружности.

в) Постройте окружность, проходящую через три данные точки.

г) Докажите, что все, что можно построить с помощью циркуля и линейки, можно построить и с помощью одного циркуля. задачи из § 3.)

8. а) Две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

б) **Поризм Штейнера.** Если существует цепочка окружностей S_1, S_2, $\ldots$, S_n, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним в противоположном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей T_1, T_2, $\ldots$ $\ldots$, T_n.

9. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O — центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

10. Пусть ω — сфера единичного радиуса с центром в точке $E = (0, 0, 1)$. Рассмотрим отображение сферы ω на плоскость $\alpha = \{z = 0\}$: точка A переходит в точку A^* пересечения луча NA и α, где $N(0, 0, 2)$ — точка, диаметрально противоположная точке касания ω и α. Докажите, что окружности (на сфере) данное преобразование переводит в обобщенные окружности.

11*. а) Можно ли замостить пространство окружностями, т. е. построить такое семейство окружностей $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in R}$, чтобы любая точка пространства лежала бы ровно на одной окружности семейства?

б) Построить семейство непересекающихся окружностей равного радиуса, покрывающих куб со стороной 1.

Указание: для задач 9–11 полезна пространственная инверсия.

12*. Найдите все плоские кривые, которые при пространственной инверсии с любым центром переходят в плоские кривые.

Г Л А В А 7

АФФИННАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Материал этой главы рекомендуется изучать после заключительных разделов предыдущей. Также может оказаться полезной рекомендованная в предыдущей главе литература.

Буря на Массовом поле (9–10)

А. А. Гаврилюк

Центром масс системы нагруженных точек (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n) (A_i — точки плоскости, m_i — «массы», т. е. числовые коэффициенты, приписанные этим точкам), называется такая точка O плоскости, что $m_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. (При этом считается, что $m_1 + \ldots + m_n \neq \neq 0$.)

1. На плоскости дана система нагруженных точек из предыдущего определения.

а) Докажите, что для этой системы существует единственный центр масс O.

б) Докажите, что для любой точки X верно

$$\overrightarrow{XO} = \frac{m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n}}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

2. Даны 2 системы нагруженных точек (X_1, a_1), ..., (X_n, a_n) и (Y_1, b_1), ..., (Y_m, b_m). Точки X и Y — их центры масс соответственно. Докажите, что центр масс этих $m + n$ точек совпадает с центром масс системы двух точек: $(X, a_1 + \ldots + a_n)$ и $(Y, b_1 + \ldots + b_m)$.

3. Теорема Чевы. Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB, тогда отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке $\Longleftrightarrow \dfrac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1} = 1$.

4. Пусть в условии предыдущей задачи точка T — точка пересечения чевиан (указанных в теореме Чевы отрезков). Докажите, что $\dfrac{BT}{TB_1} = = \dfrac{BA_1}{A_1C} + \dfrac{BC_1}{C_1A}$.

5. Точки K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что точка пересечения отрезков LN и KM делит пополам их, а также отрезок, соединяющий середины диагоналей $ABCD$.

6. Пусть A_1, ..., F_1 — середины сторон AB, BC, ..., FA шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

7. Три одинаковые мухи ползают по периметру треугольника ABC так, что их центр масс неподвижен. Известно, что одна из мух проползла всю границу. Докажите, что центр масс мух совпадает с центром масс ABC.

8. На окружности дано n точек. Через центр масс $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей оставшиеся 2 точки. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

9. В углы треугольника ABC вписаны попарно касающиеся окружности. Точки касания A_1, B_1, C_1 этих окружностей лежат соответственно против вершин ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Зачетные задачи: 3–8.

Контрольные вопросы

I. В вершины треугольника поместили равные массы. Что будет центром масс получившейся системы?

а) Центр описанной окружности;
б) центр вписанной окружности;
в) точка пересечения высот;
г) точка пересечения медиан.

II. Длины сторон треугольника ABC равны a, b, c. Какие массы надо поместить в точках A, B, C, чтобы их центром масс был центр вписанной окружности треугольника?

а) a, b, c; б) a^2, b^2, c^2; в) $b+c$, $c+a$, $a+b$.

Указания и решения

1. а) Существование центра тяжести является очевидным следствием б). Докажем единственность. Предположим, что O_1, O_2 — центры тяжести. Тогда

$$m_1\overrightarrow{O_1A_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{O_1A_n} = \vec{0},$$
$$m_1\overrightarrow{O_2A_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{O_2A_n} = \vec{0}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$(m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}.$$

Так как $m_1 + \ldots + m_n \neq 0$, из этого равенства следует, что $O_1 = O_2$.

б) Имеем

$$m_1\overrightarrow{XX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{XX_n} = \\ = m_1(\overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{XO}) + \ldots + m_n(\overrightarrow{XX_n} + \overrightarrow{XO}) = (m_1 + \ldots + m_n)\overrightarrow{XO},$$

ч.т.д.

2. Пусть O — центр масс системы $(X, a_1 + \ldots + a_n)$ и $(Y, b_1 + \ldots + b_m)$. Тогда

$$(a_1 + \ldots + a_n)\overrightarrow{OX} + (b_1 + \ldots + b_m)\overrightarrow{OY} = \vec{0}.$$

Кроме того,

$$a_1\overrightarrow{XA_1} + \ldots + a_n\overrightarrow{XA_n} = b_1\overrightarrow{YB_1} + \ldots + b_m\overrightarrow{YB_m} = \vec{0}.$$

Вычитая из первого равенства два других, получим утверждение задачи.

3. *Указание.* Точка пересечения чевиан является центром масс системы (A, x), (B, y), (C, z), где $x : y = BC_1 : AC_1$, $y : z = CA_1 : BA_1$, $z : x = AB_1 : CB_1$.

4. *Указание.* Воспользуйтесь утверждениями задач 2 и 3.

5. *Указание.* Поместите в вершины четырехугольника равные массы и найдите центр масс полученной системы.

6. *Указание.* Поместите в вершины шестиугольника равные массы и найдите центр масс полученной системы.

7. *Указание.* Выясните, где может находиться центр масс, когда одна из мух находится в вершине треугольника.

8. *Указание.* Докажите, что все такие прямые пересекают прямую OM, где O — центр окружности, а M — центр масс всех точек, в одной и той же точке.

Немного о двойных отношениях (9–10)

А. А. Гаврилюк

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на прямой l называется выражение $(A, B, C, D) = \dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})}{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})}$.

Комментарий. Считается, что на этой прямой выбрано фиксированное направление. Тогда для точек P, Q этой прямой $\overrightarrow{PQ}$ — *направленное расстояние.* Оно равно $|PQ|$, если вектор сонаправлен с выделенным направлением прямой, и равно $-|PQ|$ в противном случае.

Двойным отношением четырех прямых a, b, c и d на плоскости называется выражение $(ab;cd) = \dfrac{\sin\angle(a,c)\cdot\sin\angle(b,d)}{\sin\angle(a,d)\cdot\sin\angle(b,c)}$.

Комментарий. Считается, что в плоскости выбрано «положительное» направление поворота, а на каждой из прямых выбрано «положительное» направление движения. Тогда для прямых p, q на плоскости $\angle(p,q)$ — *направленный угол.* Он равняется минимальному углу поворота в «положительном» направлении прямой p, совмещающего «положительное» направление p с «положительным» направлением q. Неочевиден факт, что такая величина не меняется при другом выборе «положительных» направлений. Это несложное упражнение.

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на окружности называется выражение $(A,B,C,D) = (XA,XB,XC,XD)$ для произвольной точки окружности X, не совпадающей ни с одной из точек A, B, C, D.

Комментарий. (XA,XB,XC,XD) — это ранее определенное двойное отношение четырех прямых. Кроме того, неочевиден факт, что эта величина не зависит от выбора точки X на окружности. Это несложное упражнение.

Говорят, что несколько прямых *конкурентны*, если все они имеют общую точку.

Говорят, что несколько точек *коллинеарны*, если все они лежат на некоторой прямой.

1. Прямые a, b, c, d проходят через точку O и пересекают прямую l в точках A, B, C, D. Докажите, что $(A,B,C,D) = (ab;cd)$.

2. На двух пересекающихся в точке A прямых m и n выбраны точки. На m — B_1, C_1, D_1, на n — B_2, C_2, D_2. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 конкурентны $\Longleftrightarrow (A,B_1,C_1,D_1) = (A,B_2,C_2,D_2)$.

3. Пусть $(A,B,C,D) = k$. Найдите двойные отношения точек A, B, C, D, записанных в другом порядке.

4. В четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке G, AD и BC — в точке E. Прямые DB и EG пересекаются в точке H, AC и EG — в F. Докажите, что $(E,G,F,H) = -1$.

Четверка точек или прямых p, q, r, s с условием $(p,q,r,s)=-1$ называется *гармонической.*

5. а) Если какие-то два числа из (A,B,C,D), (C,D,A,B), (B,A,C,D), (A,B,D,C) равны, то $(A,B,C,D)^2=1$.

б) Если $(A,B,C,D)^2=1$, то $(A,B,C,D)=(C,D,A,B)=(B,A,C,D)=$ $=(A,B,D,C)$.

6. а) Пусть M_B — середина стороны AC треугольника ABC. Докажите, что $(AB,BC,BM_B,AC)=-1$.

б) Пусть BL_B — внутренняя биссектриса треугольника ABC, BK_B — внешняя. Докажите $(AB,BC,BL_B,BK_B)=-1$.

7. Прямые l_1, l_2, l_3, l_4 на плоскости таковы, что $(l_1l_2,l_3l_4)=-1$. Докажите, что

а) если точка $O\in l_1,l_2,l_3$, то эти прямые высекают равные отрезки на l_4;

б) если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то они параллельны биссектрисам углов между l_3 и l_4.

8. Точки A,B,C,D лежат на одной окружности. Для любой точки X этой окружности обозначим как k_X касательную к этой окружности, проведенную в X.

а) Докажите, что CD, k_A, k_B конкурентны $\Longleftrightarrow$ $(A,B,C,D)=-1$.

б) Докажите, что CD, k_A, k_B конкурентны $\Longleftrightarrow$ AB, k_C, k_D конкурентны.

9. Точки A, B — основания касательных, проведенных к окружности из точки X. Прямые c, d содержат X и пересекают эту окружность в точках C_1, C_2 и D_1, D_2 соответственно. D_1C_2 и D_2C_1 пересекаются в Y.

а) Докажите, что A, B, Y коллинеарны.

б) Пусть M — середина C_1C_2. Докажите, что $\angle AMX=\angle BMX$.

10. Пусть AB, CD — параллельные хорды окружности ω. M — середина AB. Прямая CM повторно пересекает ω в точке K, P — середина DK. Докажите, что $\angle BPK=\angle KPA$.

11. В треугольнике ABC

H_B — основание высоты, проведенной к стороне AC;

K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC;

L_B — основание биссектрисы, проведенной к стороне AC;

T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC.

Аналогично определены точки H_A, K_A, L_A, T_A. Докажите, что

а) $(T_B,K_B,L_B,H_B)=-1$;

б) $CT_B=AK_B=\dfrac{AC+AB-BC}{2}$;

в) $CH_B = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC}$;

г) $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$;

д) T_AT_B, L_AL_B, K_AK_B, H_AH_B конкурентны.

Зачетные задачи: 4–8.

Контрольные вопросы

Во всех вопросах A, B, C, D — точки на прямой.

I. Какое утверждение является следствием равенства $(A, B, C, D) = 1$?

а) $A = B$; б) $C = D$; в) $A = B$ или $C = D$; г) никакое.

II. Какое из следующих равенств всегда верно?

а) $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$;

б) $(A, B, C, D) = (B, A, D, C)$;

в) $(A, B, C, D) = (A, C, B, D)$.

III. Пусть $(A, B, C, D) = k$. Чему равно (B, A, C, D)?

а) $1 - k$; б) $\dfrac{1}{k}$; в) $1 - \dfrac{1}{k}$; г) $\dfrac{1}{1-k}$.

Решения

1. Имеем равенство (отрезки и площади ориентированы):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{S_{OAC}}{S_{OBC}} = \frac{OA}{OB}\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}.$$

Используя его и аналогичное равенство для отношения BD/AD, получаем утверждение задачи.

2. Если прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 пересекаются в точке O, то равенство двойных отношений следует из утверждения предыдущей задачи, примененного к прямым OA, OB_1, OC_1, OD_1. Обратно, пусть двойные отношения равны. Тогда обозначим точку (возможно, бесконечно удаленную) пересечения прямых B_1B_2 и C_1C_2 через O. По предыдущей задаче прямая OD_1 пересекает B_2C_2 в точке D_2.

3. Очевидно равенство $(A, B, C, D) = (B, A, D, C) = (C, D, A, B) = (D, C, B, A)$, т. е. 24 двойных отношения разбиваются на 6 групп из 4 равных отношений. Кроме того, $(B, A, C, D) = 1/k$. Чтобы найти остальные отношения, введем на прямой координаты и будем считать, что точки A, B, C, D имеют координаты a, b, c, d. Тогда

$$k = (A, B, C, D) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}, \quad (A, C, B, D) = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)}.$$

Преобразуем числитель этой дроби

$$(a-b)(c-d) = ((a-c)+(c-b))((b-d)+(c-b)) = \\ = (a-c)(b-d)+(c-b)(a-d).$$

Следовательно, $(A, C, B, D) = 1 - k$. Повторяя приведенные рассуждения, получаем, что остальные отношения равны $1 - 1/k$, $1/(1-k)$ и $k/(k-1)$. Из задачи 1 следует, что этот результат верен также для двойных отношений прямых и точек окружности.

4. *Указание.* Из задачи 1 следует, что двойные отношения сохраняются при центральной проекции. Поэтому для решения задачи достаточно спроектировать четырехугольник $ABCD$ в параллелограмм.

5. *Указание.* Используйте результат задачи 2.

6. *Указание.* Оба утверждения можно доказать как непосредственным вычислением двойного отношения, так и с помощью утверждения задачи 4.

7. *Указание.* Воспользуйтесь утверждением предыдущей задачи.

8. *Указание.* Воспользуйтесь центральной проекцией, переводящей данную окружность в окружность, а точку пересечения хорд AB и CD в ее центр.

Полярное соответствие (9–10)

А. А. Гаврилюк, П. А. Кожевников [1)]

Чтобы по-настоящему понять природу полярного соответствия, нужно быть знакомым с проективной геометрией. Мы же делаем попытку познакомиться с полярным соответствием и воспользоваться его свойствами без привлечения проективной геометрии.

Введем нужные нам определения и обозначения.

Пусть на плоскости фиксирована точка O и окружность ω радиуса R с центром в O.

Для каждой точки $X \neq O$ на луче OX строим такую точку X', что $OX \cdot OX' = R^2$. (Говорят, что X' и X *инверсны* относительно окружности ω.) Через точку X' проведем прямую x, перпендикулярную OX'. Прямая x называется *полярой* точки X, а точка X называется *полюсом* прямой x. Соответствие $X \leftrightarrow x$ является взаимно однозначным соответствием между точками, не совпадающими с O, и прямыми, не

[1)] Контрольные вопросы написаны А. А. Заславским.

проходящими через O. Это соответствие и называется *полярным соответствием.*

Из определения легко вытекает, что полярой точки A, лежащей на окружности ω, является касательная к ω, проведенная через A. Если же точка A расположена вне окружности ω, то поляра проходит через точки касания с ω касательных, проведенных через A (это «предельный» вариант свойства П2, сформулированного ниже).

Вводные задачи

Мы обозначаем точки, не совпадающие с O (полюсы), большими латинскими буквами, а их поляры — соответствующими маленькими буквами. Таким образом, $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$, $C \leftrightarrow c$, $\ldots$

Установите следующие *свойства полярного соответствия.*

П1. Двойственность. а) $A \in b \Longleftrightarrow B \in a$.

б) Если O, A, B не лежат на одной прямой, то $a \cap b \leftrightarrow AB$.

в) Точки A, B, C лежат на одной прямой $\Longleftrightarrow$ a, b, c проходят через одну точку или параллельны.

П2*. Пусть две секущие m и l, проходящие через точку A ($A \notin \omega$), пересекают ω в точках M_1, M_2 и L_1, L_2. Тогда $M_1L_1 \cap M_2L_2 \in a$ или $M_1L_1 \parallel M_2L_2 \parallel a$.

Основные задачи

1. Даны окружность ω и прямая l, не имеющие общих точек. Из точки X, которая движется по прямой l, проводятся касательные XA, XB к ω. Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

2. а) **Симметричная бабочка.** Дана точка A на диаметре BC полуокружности ω. Точки X, Y на ω таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что прямые XY проходят через одну точку или параллельны.

б) **Задача о симедиане.** Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные через точки B и C, пересекаются в точке P. Докажите, что AP — симедиана (т. е. прямая, симметричная медиане AM относительно биссектрисы угла A).

в) Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, причем A' — внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центры вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника AXY фиксированны.

3. В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через нее прямую l, перпендикулярную AB.

Докажите, что все прямые l проходят через одну точку. (Турнир городов, 1991 г.)

4. Гармонический четырехугольник [2]**.** Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Известно, что касательные к ω, проведенные в точках A и C, пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках B и D, пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

5. Вписанный четырехугольник. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P, продолжения сторон AB и CD — в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q. Докажите, что четверка точек O, P, Q, R — ортоцентрическая (т. е. каждая точка — ортоцентр треугольника с вершинами в оставшихся трех).

6. Описанный четырехугольник. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности; K, L, M, N — точки касания с окружностью сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q, продолжения сторон KL и MN — в точке S, продолжения сторон LM и NK — в точке T.

а) Докажите, что Q, R, S, T лежат на одной прямой.

б) Докажите, что AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

7. Вписанно-описанный четырехугольник. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке P, продолжения сторон AB и CD — в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q.

а) Докажите, что O, I, P лежат на одной прямой.

б) Зафиксируем ω и Ω и рассмотрим всевозможные четырехугольники $ABCD$, описанные около окружности ω и вписанные в окружность Ω (согласно теореме Понселе, если хотя бы один такой четырехугольник существует, то таких четырехугольников бесконечно много). Докажите, что для всех таких четырехугольников точки P совпадают, а также, что прямые QR совпадают.

Дополнительные задачи

8. Окружности ω_1, ω_2 пересекаются в точках A, B, причем центр O окружности ω_1 лежит на ω_2. Через точку O проводится прямая, пересекающая отрезок AB в точке P, а ω_2 — в C. Докажите, что P лежит на поляре C относительно ω_1.

[2] Определение гармонического треугольника можно посмотреть на с. 206.

9. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности и секущая, пересекающая окружность в точках D, E. Точка M — середина отрезка BC. Докажите, что

а) $BM^2 = DM \cdot ME$;

б) $\angle DME = 2\angle DBE$ или $\angle DME = 2\angle DCE$;

в) $\angle BEM = \angle DEC$.

10. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности с соответственными сторонами треугольника ABC. Из M — середины AC — к вписанной окружности проведена вторая касательная MK. Пусть l — прямая, параллельная AC и проходящая через B. Докажите, что прямые MK, l, A_1C_1 пересекаются в одной точке.

Зачетные задачи: 2–7.

Контрольные вопросы

I. Дана окружность и ее хорда AB. Где лежит точка пересечения поляр A и B?

а) Внутри окружности; б) вне окружности; в) на окружности.

II. Пусть C — середина хорды AB. Тогда поляра C

а) параллельна AB;

б) перпендикулярна AB;

в) касается окружности.

III. При полярном соответствии относительно вписанной окружности треугольник переходит

а) в серединный треугольник;

б) в ортотреугольник;

в) в треугольник, образованный точками касания сторон с вписанной окружностью.

Указания и комментарии

П1. а) Воспользуйтесь подобием треугольников OAB' и OBA', где A' и B' — точки, инверсные соответственно точкам A и B.

Пункты б) и в) следуют из а).

П2. *Набросок доказательства.* Пусть касательные к ω, проведенные через точки M_1, M_2, пересекаются в точке M, т. е. $M \leftrightarrow m$. Пусть также $L \leftrightarrow l$, $P \leftrightarrow L_1M_1$, $Q \leftrightarrow L_2M_2$. Из П1 получаем, что $ML = a$.

Теперь доказательство можно получить, применив теорему Менелая к треугольникам MLP и MLQ (рассмотрите различные случаи расположения точек).

Имеется более естественное доказательство свойства П2. Оно использует проективное преобразование, сохраняющее ω и переводящее A либо в O (если A внутри ω), либо в бесконечно удаленную точку (если A вне ω).

1. Из П2 следует, что прямая AB — поляра точки X, а из П1 — что она проходит через полюс прямой l.

Задачи предлагаемой серии имеют красивые и несложные решения, использующие свойства П1, П2.

2. Если в свойстве П2 секущие m и l симметричны относительно AO (и точки пересечения с ω обозначены так, что $M_1M_2L_1L_2$ — равнобокая трапеция), то, с одной стороны, точка $A' = M_1L_1 \cap M_2L_2$ лежит на AO (из симметрии), а с другой стороны — на поляре a точки A. Таким образом, A' — точка, инверсная точке A. К рассмотрению данной конструкции, которую мы назвали «симметричной бабочкой», можно свести пункты задачи 1.

а) Примените симметрию относительно BC.

б) Заметим, что M и P инверсны. Тогда AM и AP пересекают второй раз ω в точках, симметричных относительно PM (достройте до «симметричной бабочки»).

в) Вместе с хордой XY будем рассматривать симметричную ей относительно AA' хорду X_1Y_1. Искомые центры вписанной и вневписанной окружностей — середины дуг XX_1 и YY_1.

3. Докажите (с помощью П2), что $MN \cap AB \leftrightarrow l$. Тогда из П1 следует, что все прямые l проходят через полюс прямой MN.

4. Полюс прямой BD лежит на AC, так как a, c и BD пересекаются в одной точке или параллельны (свойство П1).

Можно решить задачу без использования поляр, доказав, что условие задачи эквивалентно равенству $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ (если такое равенство выполнено для вписанного четырехугольника $ABCD$, то он называется *гармоническим*).

5. Из П2 вытекает, что $R \leftrightarrow PQ$, $P \leftrightarrow QR$, $Q \leftrightarrow RP$.

6. а) Пусть $P = KM \cap LN$. Согласно задаче 4, имеем $P \leftrightarrow ST$. С другой стороны, $Q \leftrightarrow LN \ni P$ и $R \leftrightarrow KM \ni P$. Из П1 следует, что $P \leftrightarrow QR$. Значит, прямые ST и QR совпадают.

б) Вытекает из а).

7. Из задач 4 и 5 вытекает, что PQ — поляра точки P как относительно окружности ω, так и относительно Ω. Отсюда $OP \perp RQ$ и $IP \perp RQ$.

Далее, пусть P' — точка, инверсная точке P (относительно ω и относительно Ω). Если зафиксировать точки O, $I \neq O$ и радиусы r

и R окружностей ω и Ω соответственно, то равенства $OP \cdot OP' = R^2$ и $IP \cdot IP' = r^2$ однозначно определяют пару точек P и P', лежащих на прямой OI.

8. Хорды OC и AB окружности ω_2 пересекаются в P, значит $OP \cdot PC = AP \cdot PB$. Аналогично $AP \cdot PB$ равно степени точки P относительно первой окружности, т. е. $R^2 - OP^2$. Таким образом, $OP \cdot PC = R^2 - OP^2$, откуда $R^2 = OP \cdot PC + OP \cdot OP = OP \cdot (OP + PC) = OP \cdot OC$. Значит, точка C лежит на поляре точки P (более того, эти точки инверсны относительно первой окружности).

9. Проведем прямую, симметричную прямой DE относительно прямой AM. Пусть она пересекает окружность в точках D_1 и E_1, причем точки E, E_1 лежат в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой BC. Тогда по свойству П2 прямая DE_1 пересекается с D_1E на поляре точки A, т. е. на прямой BC.

Далее, точка M лежит на прямой AO, где O — центр ω (потому, например, что M — середина диагонали BC дельтоида $OBAC$). Значит, прямая AO совпадает с прямой AM, т. е. AM — ось симметрии для ω. Но тогда при симметрии относительно AO точка D перейдет в D_1, точка E — в E_1. Поэтому точка пересечения D_1E с DE_1 перейдет в себя при такой симметрии, и значит, она лежит на оси симметрии, т. е. на AO.

Таким образом, эта точка, с одной стороны, лежит на BC, с другой — на AM, следовательно, это и есть точка M. Теперь пункты задачи решаются следующим образом.

а) $BM^2 = BM \cdot MC = DM \cdot ME_1 = DM \cdot ME$.

б) $\angle DME = \frac{1}{2}\Big(\overset{\smile}{D_1E_1}$ (без точки D) $+ \overset{\smile}{DE}$ (без точки $D_1)\Big) = \frac{1}{2} \cdot 2\overset{\smile}{DE}$ (без точки D_1). В зависимости от расположения точек B и C это равно или $2\angle DBE$, или $2\angle DCE$.

в) $\angle BEM = \angle BED_1 =$ (из симметрии) $= \angle CE_1D = \angle CED$.

10. Пусть X — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная точке B_1, Y — точка пересечения прямых l и B_1X. Тогда касательная l_1 к вписанной окружности в точке X будет параллельна AC (например, из симметрии относительно центра окружности). Введем следующие обозначения: I — центр вписанной окружности, I_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABC, вписанной в угол B, B_2 — точка касания этой окружности со стороной AC, A_2 — точка касания с прямой BC, C_2 — точка касания с прямой BA, K — основание биссектрисы треугольника ABC, выходящей из вершины B.

Лемма 1. *Точки B, X, B_2 лежат на одной прямой.*

Доказательство. Точки B, I, L, I_1 лежат на биссектрисе угла B. Отсюда следует, что

$$\angle XIB = \angle LIB_1 = 90^\circ - \angle ILB_1 = 90^\circ - \angle B_2LI_1 = \angle B_2I_1B.$$

Треугольники BIA_1 и BI_1A_2 подобны (так как $\angle IA_1B = 90^\circ = \angle I_1AB$; $\angle IBA_1 = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle I_1BA_2$). Значит, $\dfrac{BI}{IA_1} = \dfrac{BI_1}{I_1A_2}$, и из равенства радиусов одной окружности имеем $\dfrac{BI}{IX} = \dfrac{BI_1}{I_1B_2}$. Из равенства $\angle XIB = \angle B_2I_2B$ следует, что треугольники IXB и I_2B_2B подобны. Таким образом, $\angle XBI = \angle B_2BI$, и точки B_2, X лежат в одной полуплоскости с точкой A относительно биссектрисы. Значит, B, X, B_2 лежат на одной прямой. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Точки B_2, B_1 симметричны относительно точки M.*

Доказательство.

$$BC + CB_2 = BA_2 = BC_2 = BA + AB_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC_2 = \frac{BC + CB_2 + BA + AB_2}{2} = \frac{BC + BA + AC}{2} = p.$$

Имеем $AB_2 = p - AB$, $2CB_1 = AC - AB_1 + BC - BA_1 = AC + BC - AC_1 - BC_1 = AC + BC - AB \Rightarrow CB_1 = (BC + BA + AC - 2AB)/2 = p - AB \Rightarrow$ не умаляя общности, считая $AB \geqslant AC$, получаем

$$B_2M = AM - AB_2 = CM - CB_1 = MB_1.$$

Лемма 2 доказана. □

Пусть прямая BB_2 пересекает вписанную окружность в точках S, X (об одной из них мы только что говорили). Тогда, т. к. XB_1 — диаметр, $\angle XSB_1 = \angle B_2SB_1 = 90^\circ$, поэтому $MS = MB_1 = MB_2$ как медиана в прямоугольном треугольнике. Но тогда $MS = MB_1 = MK$, и точки K, S, B_1 лежат на вписанной окружности и на окружности с центром M. Следовательно, $K = S$ (т. к. каждая из этих двух точек не совпадает с B_1). Значит, BB_2 пересекает вписанную окружность в точках K, X.

Чтобы доказать, что прямые KB_1, C_1A_1, l пересекаются в одной точке, достаточно доказать, что их полюсы лежат на одной прямой. Так как MK, MB_1, BA_1, BC_1 — касательные, то полюсом прямой KB_1 будет точка M, а C_1A_1 — B. Про L — полюс прямой l — можно сказать, что он, во-первых, лежит на поляре точки B, т. е. на A_1C_1; во-вторых, он лежит на прямой IX (т. к. она проходит через центр окружности и перпендикулярна l). Значит, L — точка пересечения этих двух прямых.

Докажем, что точки M, L, B лежат на одной прямой. Пусть BM пересекает A_1C_1 в точке L_1. Из теоремы синусов для треугольника ABC следует, что

$$1 = \frac{AM}{MC} = \frac{AB \cdot \sin(\angle ABM)}{BC \cdot \sin(\angle MBC)} \Rightarrow \frac{\sin(\angle ABM)}{\sin(\angle MBC)} = \frac{BC}{AB}.$$

Пользуясь данным равенством и теоремой синусов для треугольника C_1BA_1, получаем:

$$\frac{C_1L_1}{L_1A_1} = \frac{BC_1 \cdot \sin(\angle ABM)}{BA_1 \cdot \sin(\angle MBC)} = \frac{BC}{AB},$$
$$\angle C_1IL = 180^\circ - \angle C_1IB_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAC),$$
$$\angle A_1IL = 180^\circ - \angle A_1IB_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle BCA)$$

$\Rightarrow$ в треугольнике A_1IC_1:

$$\frac{C_1L}{LA_1} = \frac{C_1I \cdot \sin(\angle C_1IL)}{IA_1 \cdot \sin(\angle A_1IL)} = \frac{\sin(\angle BAC)}{\sin(\angle BCA)} = \frac{BC}{AB}.$$

Таким образом, $\dfrac{C_1L_1}{L_1A_1} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{C_1L}{LA_1}$, значит, точки L, L_1 совпадают и точка L лежит на прямой BM.

ГЛАВА 8

ПОСТРОЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Задачи на построение и ГМТ (8–9)

А. Д. Блинков

Цифра в скобках после номера задачи означает ее источник в списке литературы, приведенном в разделе «Простейшие свойства окружности» главы «Окружность».

1. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Укажите ГМТ M, для которых одновременно выполняются неравенства: $|AM| \geqslant |OM|$, $|BM| \geqslant |OM|$, $|CM| \geqslant |OM|$ и $|DM| \geqslant |OM|$. (См. [9].)

2. Пусть O — центр тяжести равностороннего треугольника ABC. Найдите ГМТ M, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку M, пересекает либо $[AB]$, либо $[CO]$. (См. [9].)

3. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая, проходящая через точку B, пересекает эти окружности еще в точках X и Y. Найдите геометрическое место середин отрезков XY. (См. [12].)

4. Найдите множество середин всех отрезков, концы которых лежат на фигуре, являющейся объединением диагоналей квадрата. (См. [8].)

5. Дана хорда AB окружности. Рассматриваются всевозможные треугольники ABC, вписанные в эту окружность. Найдите геометрическое место точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольника ABC. (См. [9].)

6. Точка P перемещается по описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые AP и BD пересекаются в точке Q, а прямая, проходящая через точку Q параллельно AC, пересекает прямую BP в точке M. Найдите ГМТ M. (См. [9].)

7. Даны три вершины вписанного и описанного четырехугольника. Постройте его четвертую вершину. (См. [9].)

Зачетные задачи: 2–5.

Контрольные вопросы

I. Дано: $A(1;0)$, $B(-1;2)$. Укажите уравнения ГМТ:
а) равноудаленных от точек A и B;
б) удаленных от точки A на расстояние, равное $|AB|$.

II. Задайте уравнениями или неравенствами ГМТ:
а) удаленных от начала координат на расстояние, большее 0,1;
б) равноудаленных от осей координат;
в) удаленных от оси x на расстояние, не большее 1,5.

III. Определите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB длины $\sqrt{2}$ виден под углом $45°$:
а) объединение двух больших дуг окружностей радиуса 1, проходящих через точки A и B;
б) окружность с диаметром AB;
в) объединение двух меньших дуг окружностей радиуса 1, проходящих через точки A и B;
г) определить невозможно.

IV. Дана окружность с центром O и радиусом R. Определите геометрическое место середин всех хорд, имеющих длину $R\sqrt{3}$:
а) окружность с центром O и радиусом $R\sqrt{3}/2$;
б) хорда данной окружности, удаленная от центра на расстояние $R/2$;
в) окружность с центром O и радиусом $R/2$;
г) определить невозможно.

V. Дана окружность с центром O и радиусом R и точка M на этой окружности. Определите геометрическое место середин всех хорд, проходящих через точку M:
а) окружность с центром O и радиусом $R/2$;
б) окружность с диаметром OM;
в) полуокружность с диаметром OM;
г) определить невозможно.

Решения

1. *Ответ*: границы и внутренние точки ромба $NKPL$, стороны которого лежат на серединных перпендикулярах к $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ и $[OD]$ (см. рис. 1).

Решение. Точка M обладает свойством, сформулированным в условии, тогда и только тогда, когда находится в одной полуплоскости вместе с точкой O относительно каждого из указанных серединных перпендикуляров.

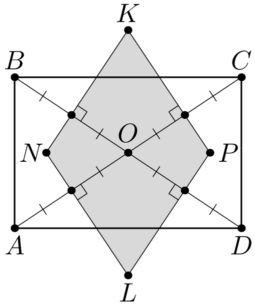


Рис. 1

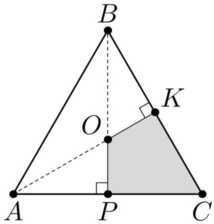


Рис. 2

2. *Ответ*: четырехугольник $OKCP$ (см. рис. 2).

Решение. Пусть точка M принадлежит указанной фигуре, тогда она лежит либо на $[CO]$, либо в одном из треугольников OCP или OCK. Выполнение условия в первом случае — очевидно. Если же M лежит, например, в треугольнике OCP и прямая, проходящая через нее, не пересекает $[CO]$, то эта прямая пересекает $[CP]$ и $[PO]$. Значит, эта прямая не пересекает $[AP]$, но она пересекает сторону $[BP]$ треугольника ABP, следовательно, должна пересечь сторону AB.

Для любой точки, не принадлежащей указанной фигуре, несложно привести пример прямой, проходящей через нее и не пересекающей ни $[AB]$, ни $[CO]$.

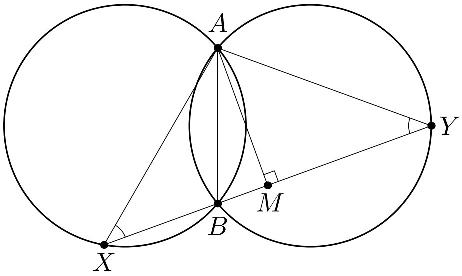
3. *Ответ*: окружность с диаметром AB.

Решение. Возможны два случая взаимного расположения точек B, X и Y: $B \in [XY]$ (см. рис. 3 *а*) или $X \in [BY]$ (см. рис. 3 *б*). В обоих случаях $\triangle XAY$ — равнобедренный, так как $\angle AXY = \angle AYX$. В первом случае эти углы вписанные и опираются на одинаковые дуги в равных окружностях. Во втором случае $\angle AXY = 180^\circ - \angle AXB = \angle AYX$, так как вписанные углы AXB и AYX опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности.

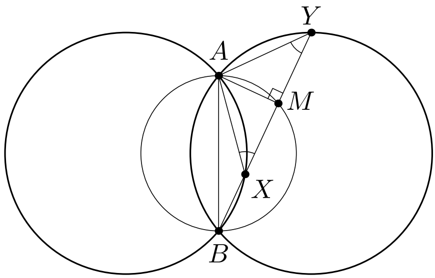
Таким образом, M — середина $[XY]$ тогда и только тогда, когда $\angle AMB = 90^\circ$. Полученное условие равносильно тому, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

4. *Ответ*: граничные и внутренние точки квадрата $MPKL$, вершины которого являются серединами сторон данного квадрата, за исключением точек, лежащих на диагоналях данного квадрата (см. рис. 4 *а*).

Решение. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, диагонали которого пересекаются в точке O. Рассмотрим декартову систему координат, заданную базисными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$ (см. рис. 4 *б*). Пусть $E \in [AC]$, тогда $E(x;0)$, где $x \in [-1;1]$. Аналогично если $F \in [BD]$, то $F(0;y)$,



а



б

Рис. 3

где $y \in [-1; 1]$. Точка N — середина $[EF]$, значит, $N(0{,}5x; 0{,}5y)$, причем $-0{,}5 \leqslant 0{,}5x \leqslant 0{,}5$; $-0{,}5 \leqslant 0{,}5y \leqslant 0{,}5$. Эти неравенства задают единичный квадрат с центром O, стороны которого параллельны осям.

Пусть H — произвольная точка такого квадрата, не лежащая на осях координат (см. рис. 4 *в*). Проведем луч $[OH)$ и отложим на нем такую точку G, что $|GH| = |OH|$. Если $G(x; y)$, то $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-1; 1]$. Из точки G опустим перпендикуляры GE и GF на координатные оси, тогда H — середина $[EF]$, где $|OE| \leqslant 1$ и $|OF| \leqslant 1$. Таким образом, точка H является серединой отрезка, концы которого лежат на диагоналях данного квадрата.

5. Пусть меньшая из дуг AB окружности имеет величину α. Тогда при любом положении точки C (кроме ее совпадения с точкой A или точкой B) угол ACB вписан в окружность и опирается на одну из дуг AB, поэтому $\angle ACB = \alpha$ (см. рис. 5 *а*, *в*) или $\angle ACB = 180^\circ - \alpha$ (см. рис. 5 *б*, *г*).

а) Пусть $[AA_1]$ и $[BB_1]$ — высоты треугольника ABC; $H = AA_1 \cap \cap BB_1$. Тогда точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CH, поэтому $\angle AHB = \angle A_1HB_1 = 180^\circ - \alpha$ (см. рис. 5 *б*) или $\angle AHB = = 180^\circ - \angle A_1HB_1 = \alpha$ (см. рис. 5 *а*).

Следовательно, искомое геометрическое место точек — множество точек, из которых $[AB]$ виден под этими углами, т. е. окружность, симметричная данной относительно AB за исключением точек, лежащих на прямых, проходящих через A и B и перпендикулярных AB.

б) Вычислим величину угла AOB между биссектрисами углов BAC и ABC данного треугольника:

$$\angle AOB = 180^\circ - 0{,}5 \cdot (\angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ + 0{,}5\,\angle ACB,$$

т. е. $\angle AOB = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$ или $\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

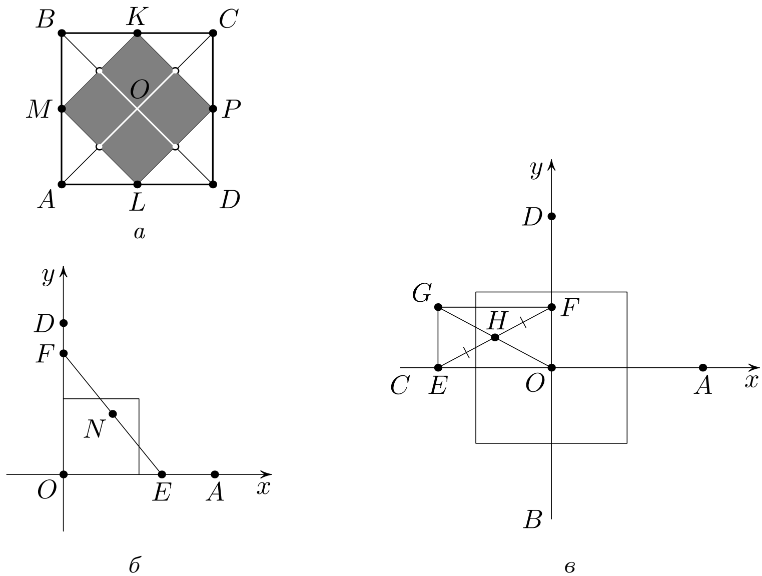


Рис. 4

Следовательно, искомое геометрическое место точек — множество точек, из которых отрезок AB виден под этими углами, т. е. все точки соответствующих окружностей, исключая точки A и B.

6. *Ответ*: DC.

Решение. Пусть $O = AC \cap BD$ и точка M обладает указанным в условии свойством (см. рис. 6 *а*). Так как $\angle BOC = 90^\circ$ и $QM \parallel AC$, то $\angle MQD = 90^\circ$. Так как $\angle DPB$ — вписанный в окружность и опирается на ее диаметр BD, то $\angle DPM = \angle DPB = 90^\circ$. Следовательно, точки P и Q лежат на окружности с диаметром DM. Значит, $\angle QDM = 180^\circ - \angle QPM = \angle BPA = \angle BCA = 45^\circ$. Таким образом, $M \in [DC)$.

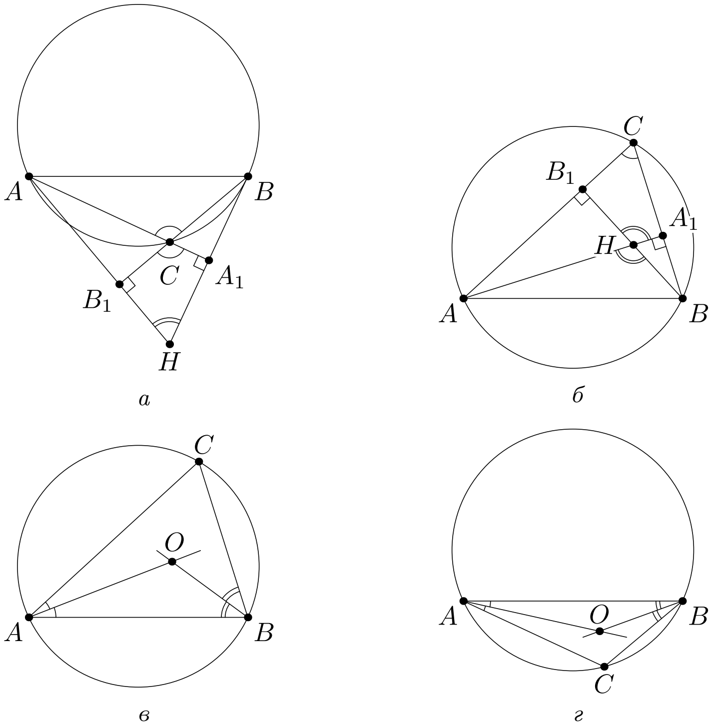


Рис. 5

При другом расположении точки P на окружности получится, что M лежит на луче, дополнительном к $[DC)$ (см. рис. 6 *б*).

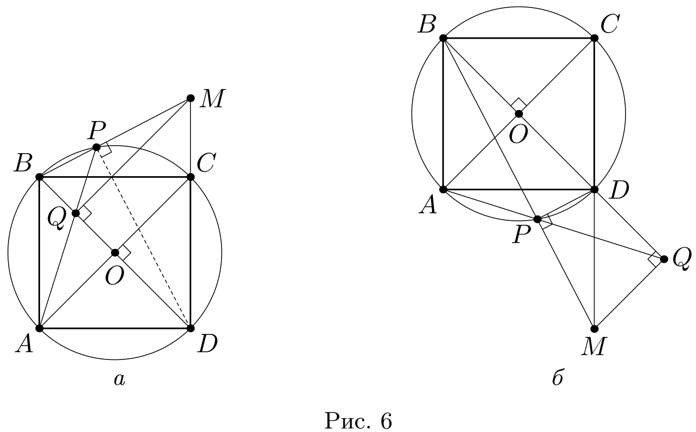


Рис. 6

Пусть $M \in DC$, BM пересекает данную окружность в точке P, $AP \cap \cap BD = Q$ (см. рис. 6 *а*, *б*). Докажем, что $MQ \parallel AC$. Так как $\angle BPA = = \angle BCA = 45°$, то $\angle QPM = 135°$ (см. рис. 6 *а*) или $\angle QPM = 45°$ (см. рис. 6 *б*). В обоих случаях точки P, M, D и Q лежат на одной окружности, так как $\angle QPM + \angle QDM = 180°$ или $\angle QPM = \angle QNM$, причем $\angle DPM = \angle DPB = 90°$, поэтому $[DM]$ — ее диаметр. Значит, $\angle MQD = = 90°$, т. е. $MQ \parallel AC$.

7. Пусть A, B и C — три данные вершины вписанного и описанного четырехугольника $ABCD$ (см. рис. 7), т. е. стороны и углы треугольника ABC можно считать известными. Тогда искомая точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

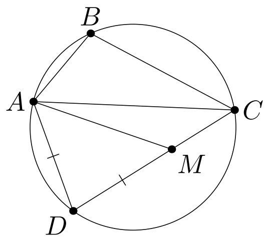


Рис. 7

Кроме того, $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$. Без ограничения общности можно считать, что $|AB| \leqslant |BC|$, тогда $|AD| \leqslant |CD|$, значит, $\exists M \in \in [CD]$, для которой $|MD| = |AD|$. В треугольнике CAM: $|AC| = c$; $|MC| = |CD| - |AD| = |BC| - |AB| = m$; $\angle AMC = 90° + 0{,}5\,\angle ADC = = 90° + 0{,}5 \cdot (180° - \angle ABC) = 180° - 0{,}5\,\angle ABC = \gamma$. Значит, по этим данным (по двум сторонам c и m и углу γ, противолежащему стороне c) этот треугольник можно построить, а искомая точка D лежит на луче $[CM)$.

Таким образом, точка D является пересечением продолжения стороны CM вспомогательного треугольника CAM и окружности, описанной около треугольника ABC.

Задачи на построение и ГМТ, связанные с площадями (8–9)

А. Д. Блинков

При решении задач этого раздела желательно избегать «алгебраических» методов.

1. Через точку, лежащую на стороне треугольника, проведите прямую, разбивающую данный треугольник на две равновеликие части. (См. [4].)

2. Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих внутри треугольника ABC, что $S_{ACM} + S_{BCM} = S_{ABM}$. (См. [4].)

3. а) Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих в плоскости треугольника ABC, что $S_{ACM} = S_{BCM}$. (См. [4].)

б) Укажите геометрическое место таких точек M, лежащих в плоскости треугольника ABC, что $S_{ACM} = S_{BCM} = S_{ABM}$.

4. Докажите, что любая прямая, делящая пополам площадь и периметр а) треугольника; б) описанного многоугольника, проходит через центр вписанной окружности. Укажите способ построения такой прямой. (См. [9].)

5. а) Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ укажите какую-нибудь точку M так, чтобы ломаная AMC разбивала его на две равновеликие части. (См. [4].)

б) Через вершину выпуклого четырехугольника проведите прямую, разбивающую его на две равновеликие части. (См. [4].)

в) Выпуклая фигура ограничена углом ABC и дугой BC. Постройте прямую, разбивающую ее на две равновеликие части. (См. [6].)

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ дана точка P. На границе параллелограмма постройте точку Q так, чтобы ломаная APQ разбивала его на две равновеликие части. (См. [4].)

7. а) Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC найдите множество таких точек M, что $S_{ADM} + S_{BCM} = 0{,}5\, S_{ABCD}$. (См. [4].)

б) Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите множество таких точек M, что $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

Зачетные задачи: 3, 5, 6 и 7.

Контрольные вопросы

I. Какой из отрезков разбивает произвольный треугольник на две равновеликие части?

а) Средняя линия;
б) биссектриса;
в) высота;
г) медиана;
д) любой отрезок, проходящий через вершину;
е) определить невозможно.

II. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре равновеликих треугольника. Определите вид этого четырехугольника.

а) Параллелограмм;
б) прямоугольник, отличный от квадрата;
в) ромб, отличный от квадрата;
г) квадрат;
д) трапеция;
е) определить невозможно.

III. Дан отрезок AB. Укажите ГМТ M таких, что треугольник AMB имеет заданную площадь S.

а) Прямая, параллельная AB;
б) отрезок, параллельный AB;
в) круг с диаметром AB;
г) объединение двух отрезков, параллельных AB;
д) объединение двух прямых, параллельных AB;
е) определить невозможно.

IV. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ выбрана такая точка K, что площадь треугольника AKB равна половине площади трапеции. Найдите $|AK| : |KB|$.

а) $1:2$; б) $2:1$; в) $1:1$; г) $1:3$; д) $3:1$;
е) определить невозможно.

V. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции и разбивающего ее на две равновеликие части, если длины оснований трапеции равны a и b.

а) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$; б) $\sqrt{ab}$; в) $\dfrac{2ab}{a+b}$; г) $\dfrac{a+b}{2}$; д) $\dfrac{|a-b|}{2}$;
е) определить невозможно.

Решения

1. Пусть дана точка K на стороне AB треугольника ABC (см. рис. 1). Проведем медиану CM. Если точка K совпадает с M, то прямая CM — искомая.

Если точки K и M не совпадают, то либо $|AK| < |BK|$, либо $|AK| > |BK|$. Пусть, например, $|AK| < |BK|$, тогда $S_{AKC} < S_{BKC}$. Для того чтобы выполнялось условие задачи, надо провести прямую через точку K так, чтобы к площади треугольника AKC «добавилась» площадь треугольника CKM.

Пусть прямая KN, где $N \in [BC]$ — искомая. Тогда $S_{KCN} = S_{CKM} \iff MN \parallel CK$. Таким образом, построение сводится к проведению прямой, проходящей через точку M параллельно (CK). В случае когда $|AK| > |BK|$, построение осуществляется аналогично, но $N \in [AC]$.

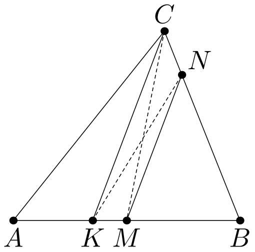


Рис. 1

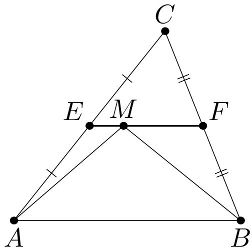


Рис. 2

2. *Ответ*: внутренние точки средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB.

Так как точка M лежит внутри данного треугольника ABC, то данное условие равносильно тому, что $S_{ABM} = 0{,}5\,S_{ABC}$. Полученное равенство выполняется тогда и только тогда, когда расстояние от M до AB в два раза меньше расстояния от C до AB (см. рис. 2).

3. а) *Ответ*: объединение двух прямых, проходящих через точку C: параллельной AB и содержащей медиану CD (исключая точку C).

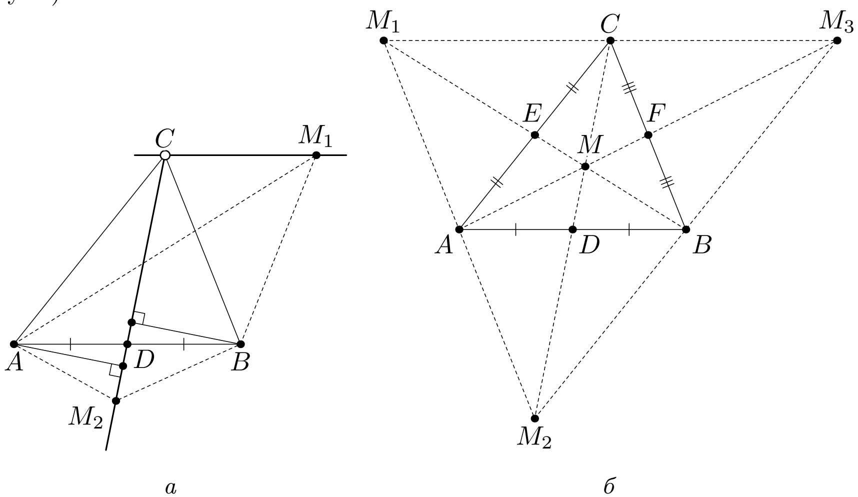


Рис. 3

Решение. Точка M удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда точки A и B равноудалены от CM. Это возможно только в двух случаях, указанных в ответе (см. рис. 3 *а*). То, что данное условие не выполняется для остальных точек плоскости, легко доказывается методом «от противного».

б) *Ответ*: центр тяжести треугольника и три точки попарного пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противолежащим сторонам.

Решение. Разобьем двойное равенство площадей на три обычных и используем геометрические места точек, найденные в пункте а) (см. рис. 3 *б*). Для того чтобы точка, лежащая в плоскости треугольника, удовлетворяла условию, необходимо и достаточно выполнения двух равенств площадей. Следовательно, все такие точки являются попарными пересечениями найденных геометрических мест.

4. *Решение.* Рассмотрим треугольник ABC и вписанную в него окружность с центром O и радиусом r (см. рис. 4). Пусть прямая PQ, делящая пополам площадь и периметр треугольника, не содержит точки O ($P \in [AC]$, $Q \in [BC]$). Соединим центр O с вершинами треугольника и точками P и Q. Ломаная POQ разбивает ABC на пятиугольник $ABQOP$ и четырехугольник $PCQO$. Вычислим их площади:

$$S_{ABQOP} = S_{AOB} + S_{BOQ} + S_{AOP} = 0{,}5 \cdot (|AB| + |AP| + |BQ|)r;$$
$$S_{PCOQ} = S_{COQ} + S_{COP} = 0{,}5 \cdot (|CP| + |CQ|)r.$$

Так как PQ делит пополам периметр ABC, то $|AB| + |AP| + |BQ| = |CP| + |CQ|$, следовательно, $S_{ABQOP} = S_{PCOQ}$. По условию, $S_{ABQP} = S_{PCQ}$, поэтому $S_{POQ} = 0$, значит, $O \in PQ$, что и требовалось доказать.

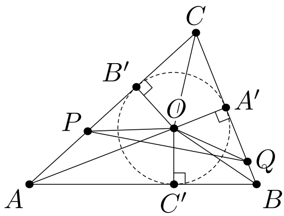


Рис. 4

Для описанного многоугольника доказательство проводится аналогично.

5. а) *Ответ*: например, M — середина диагонали BD.

Пусть M — середина $[BD]$, тогда медиана AM делит площадь треугольника ABD пополам, а медиана CM делит площадь треугольника BCD пополам, поэтому такая точка M — искомая.

Отметим, что любая точка прямой, параллельной AC и проходящей через точку M, лежащая внутри данного четырехугольника, также удовлетворяет условию.

б) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; A — данная вершина. Проведем его диагонали AC и BD, пусть O — точка их пересечения. Рассмотрим точку M — середину $[BD]$. Если точка M совпадет с точкой O, то AC — искомая.

Если точки O и M не совпадают, то либо $|BO| < |BM|$, либо $|BO| > |BM|$. Пусть, например, $|BO| < |BM|$, тогда $S_{ABC} < S_{ADC}$. Для того чтобы выполнялось условие задачи, надо провести прямую через точку A так, чтобы к площади треугольника ABC «добавилась» площадь треугольника AMC.

Пусть AN, где $N \in [DC]$, — искомая. Тогда $S_{CNA} = S_{AMC} \iff MN \parallel AC$. Таким образом, построение сводится к проведению прямой, проходящей через точку M параллельно AC. В случае когда $|BO| > |BM|$, построение осуществляется аналогично, но $N \in [BC]$.

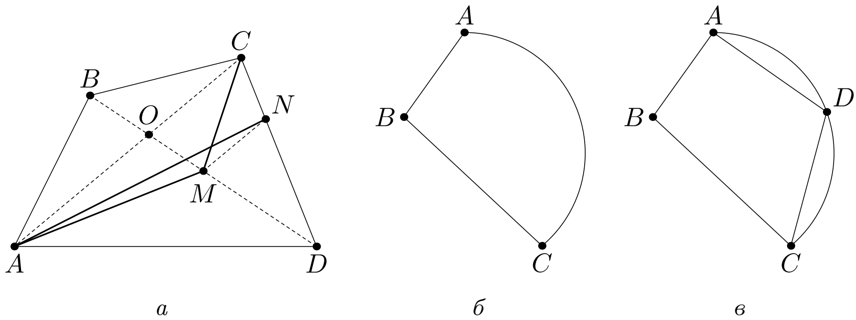


Рис. 5

в) Построим точку D — середину дуги AC и соединим ее с точками A и C (см. рис. 5 *в*). Полученные сегменты, ограниченные хордами AD и CD, равны, следовательно, они равновелики. Тогда задача сведется к построению прямой, проходящей через точку D и разбивающей четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

6. Проведем CP, которая пересечет сторону AD в точке K (см. рис. 6). Через вершину A проведем прямую, параллельную CK, которая пересечет сторону BC в точке Q.

Четырехугольник $AKCQ$ — параллелограмм, поэтому $S_{AQP} = \frac{1}{2}S_{AKCQ}$. Так как $\triangle ABQ = \triangle CDK$, эти треугольники равновелики. Следовательно, Q — искомая точка.

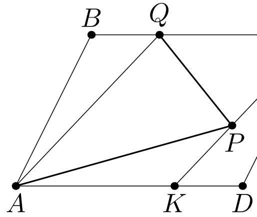


Рис. 6

Если CP пересечет сторону AB, то $Q \in [CD]$; если точка P лежит на диагонали AC, то $Q = C$.

7. а) *Ответ*: внутренние точки средней линии трапеции.

Пусть $|AD| = a$; $|BC| = b$. Точка M, лежащая внутри данной трапеции на расстояниях m и n от AD и BC соответственно, удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $0{,}5am + 0{,}5bn = 0{,}25(a + b)(m + n) \iff am + bn = an + bm \iff \Rightarrow (a - b)(m - n) = 0$. Так как $a \neq b$, то $m = n$, т. е. M принадлежит средней линии трапеции.

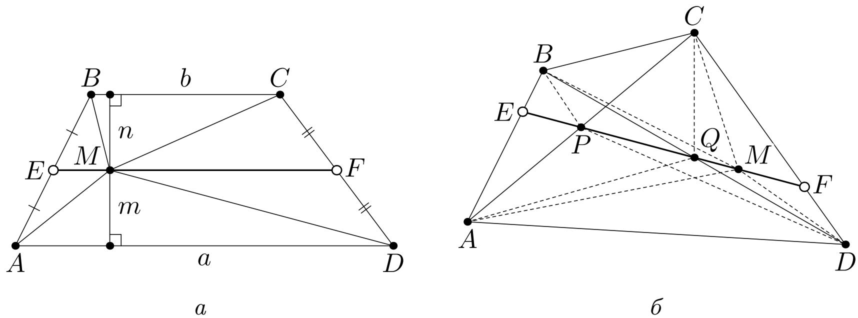


Рис. 7

б) *Ответ*: если $ABCD$ — параллелограмм, то любая внутренняя точка; если $ABCD$ — не параллелограмм, то внутренние точки отрезка с концами на сторонах четырехугольника, проходящего через середины его диагоналей.

Для параллелограмма ответ очевиден.

Пусть P и Q — середины диагоналей AC и BD данного четырехугольника, отличного от параллелограмма (см. рис. 7 *б*). Тогда $S_{ABP} + S_{CDP} = S_{ABQ} + S_{CDQ} = 0{,}5\, S_{ABCD}$.

Если точка M лежит внутри $ABCD$ на PQ, то $S_{APM} = S_{CPM}$ (так как точки A и C равноудалены от PM) и $S_{BPM} = S_{DPM}$ (так как точки B и D равноудалены от PM). Таким образом, $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ABP} + S_{CDP} + S_{APM} + S_{BPM} - S_{CPM} - S_{DPM} = S_{ABP} + S_{CDP} = 0{,}5\, S_{ABCD} = S_{ADM} + S_{BCM}$.

Если точка M не лежит на указанном отрезке, то, действуя аналогично, проверяем, что указанное в условии равенство не выполняется.

Построения. Ящик инструментов (9–10)

А. А. Гаврилюк

При изучении материала этого раздела желательно знакомство с главой 5 и рекомендованной в ней литературой.

Теорема. *С помощью циркуля и линейки можно осуществлять те и только те построения, которые сводятся к арифметическим операциям и операции извлечения квадратного корня. То есть если дан отрезок длины* 1, *то для любых отрезков с длинами a, b можно построить отрезки с длинами $a+b$, $a-b$, ab, a/b, $\sqrt{a}$, и длина любого отрезка, который можно построить, выражается через a и b с помощью указанных операций.*

Теорема Мора—Маскерони. *Любое построение, осуществимое циркулем и линейкой, можно осуществить одним циркулем.*

Теорема Штейнера. *Любое построение, осуществимое циркулем и линейкой, можно осуществить одной линейкой, если начерчена одна окружность и отмечен ее центр.*

1. Даны два отрезка с длинами x, y. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{3xy + y\sqrt[4]{xy^3}}$.

2. Даны две параллельные прямые, на одной из которых дан отрезок. С помощью лишь линейки разделите его пополам.

3. Даны две параллельные прямые, на одной из которых дан отрезок. С помощью лишь линейки удвойте его.

4. Даны две параллельные прямые, на одной из которых дан отрезок. С помощью лишь линейки разделите его на n равных частей.

5. Дана окружность ω с диаметром AB и точка X. С помощью одной линейки постройте перпендикуляр из X на AB, если точка X лежит

а) не на окружности, б) на окружности.

6. Дана окружность ω и точка X. С помощью одной линейки постройте (все возможные) касательные из X к окружности, если точка X лежит а) вне окружности, б) на окружности.

7. При помощи только циркуля построить образ данной точки X при инверсии относительно данной окружности ω.

8. Дана окружность на плоскости. С помощью двусторонней линейки постройте ее центр.

9. Даны прямая l и отрезок OA, ей параллельный. С помощью двусторонней линейки постройте точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA и с центром в точке O.

10. При помощи только циркуля построить окружность, проходящую через 3 данные точки.

11. Задача Аполлония. Построить окружность, касающуюся трех данных, при помощи циркуля и линейки.

Зачетные задачи: 3–7.

Контрольные вопросы

I. Даны отрезки с длинами a, b. Отрезок какой длины нельзя построить циркулем и линейкой?
а) $\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\sqrt[3]{a^3+b^3}$; в) $\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

II. Какие инструменты необходимы для построения центра данной окружности?
а) Циркуль и линейка; б) только линейка; в) только циркуль.

Указания и решения

1. Высота прямоугольного треугольника является средним геометрическим отрезков, на которые она делит гипотенузу. Поэтому, если даны отрезки с длинами a, b, то построив полуокружность с диаметром $a+b$ и найдя ее пересечение с прямой, перпендикулярной диаметру и делящей его на отрезки длины a и b, получим отрезок длины $\sqrt{ab}$. Для решения данной задачи достаточно последовательно построить отрезки с длинами $z_1 = \sqrt{xy}$, $z_2 = \sqrt{yz_1}$, $z_3 = 3x + z_2$, $z = \sqrt{yz_3}$.

2. Пусть AB — данный отрезок. Возьмем точку X вне полосы, ограниченной данными прямыми, и найдем точки C и D пересечения прямых XB и XC с прямой, отличной от AB. Пусть Y — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Тогда прямая XY делит основания трапеции пополам.

3. *Указание.* Возьмите на другой прямой произвольный отрезок и разделите его пополам.

4. *Указание.* Возьмите на другой прямой произвольный отрезок и, повторив несколько раз предыдущее построение, увеличьте его в n раз.

5. *Указание.* Если прямые XA, XB вторично пересекают окружность в точках B', A', то точка пересечения прямых AA' и BB' — ортоцентр треугольника XAB.

6. *Указание.* Если две прямые, проходящие через X, пересекают окружность в точках A и B, C и D, то прямая, соединяющая точки пересечения AC с BD и AD с BC, — поляра точки X.

7. *Указание.* Пусть O — центр данной окружности. Если окружность с центром X и радиусом XO пересекает данную в точках A, B, то вторая точка окружностей с центрами A, B и радиусами AO, BO — искомая.

Дополнительные построения (9–10)

И. Н. Шнурников

1. Докажите, что в выпуклый четырехугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P.

2. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

3. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Докажите, что угол $\angle BAC > 45°$.

4. Даны положительные числа a, b, p, q со свойством $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geqslant ab$.

5. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

6. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб.

7. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC перпендикулярно BC, а AD перпендикулярно BD. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем $\dfrac{CD}{AB}$.

8. На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D. Докажите, что для любой точки E, не лежащей на прямой AD, справедливо неравенство:

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE.$$

9. Канал получается из первой координатной четверти путем вырезания множества $\{x \geqslant 1\} \cap \{y \geqslant 1\}$. Плот какого максимального диаметра может проплыть поворот? (Плот может быть изогнутым, диаметр — это максимальное расстояние между двумя точками плота.)

10. На окружности две точки A и B зафиксированы, а точка M пробегает всю окружность. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр KP на прямую MA. Докажите, что все прямые KP проходят через одну точку.

11. Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P — середина отрезка MH. Докажите, что AH перпендикулярно BP.

12. Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке K. Докажите, что прямая, соединяющая середину стороны AC с центром вписанной окружности, делит отрезок BK пополам.

13. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD.

14. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена такая точка M, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

15. а) В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM. Докажите, что угол ABC не больше 60 градусов.

б) В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна медиане BM и равна биссектрисе CD. Докажите, что треугольник ABC правильный.

Указания и решения

1. Построим на каждой стороне четырехугольника внутрь него прямоугольник с оставшейся стороной длины S/P. Суммарная площадь этих прямоугольников равна S, они пересекаются, поэтому найдется не принадлежащая им точка внутри четырехугольника.

2. Выберем среди всех треугольников с вершинами в вершинах исходного многоугольника треугольник наибольшей площади. Проведем через его вершины прямые, параллельные его противоположным сторонам. Эти прямые высекут на плоскости искомый треугольник.

4. Нарисуем на координатной плоскости график функции $y(x) = x^{p-1}$ и заштрихуем область между графиком и осью x на отрезке $x \in [0, a]$. Эта же кривая является графиком функции $x(y) = y^{q-1}$. Заштрихуем область между ним и осью y на отрезке $y \in [0, b]$. Площадь всей заштрихованной области равна $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$, и она содержит прямоугольник со сторонами a и b, откуда получаем оценку.

Решение Р. Девятова. Применим неравенство Йенсена для функции $f(x) = \ln x$, выпуклой вверх при $x > 0$, коэффициентов $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{q}$ и чисел a^p, b^q:

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q.$$

5. *Решение Р. Девятова.*

Лемма. *Пусть на плоскости зафиксировано* 2 *отрезка:* XY *и* ZT*. Тогда на плоскости существуют такие* 2 *прямые* l_1 *и* l_2*, что сумма длин проекций* XY *и* ZT *на* l_1 *отличается от такой суммы для* l_2 *не менее, чем в* $\sqrt{2}$ *раз.*

Проведем плоскость α параллельно прямым AB и CD через точку A. Проведем плоскость β перпендикулярно α. Пусть она пересекает α по прямой l. Площадь проекции тетраэдра $ABCD$ на плоскость β есть произведение расстояния от точки C до плоскости α и полусуммы длин проекций отрезков AB и CD на прямую l. По лемме эта полусумма меняется хотя бы в $\sqrt{2}$ раз.

6. Отразим треугольник ABC относительно точки O пересечения диагоналей $ABCD$ в треугольнике $A_1B_1C_1$. При этой симметрии вписанные окружности перейдут друг в друга. Пусть $OA > OC_1$, тогда $OD < OB_1$ и $OC > OA_1$, что противоречит $OA > OC_1$.

8. Пусть $AB > CD$. Отразим точки E и C относительно середины отрезка AD в точки E_1 и C_1. Проведем BE до пересечения с E_1C_1 в точке F. Имеем $FC_1 < FB + BC_1$, подставим $BC_1 = |AB - CD|$ и получим:

$$\begin{gathered} BE + CE = BE + FC_1 + E_1F < BE + FB + |AB - CD| + E_1F = \\ = |AB - CD| + E_1F + FE < |AB - CD| + E_1A + AE. \end{gathered}$$

9. Диаметр плота $2 + 2\sqrt{2}$, пример — дуга в 90° окружности радиуса $2 + \sqrt{2}$.

ГЛАВА 9

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Геометрические задачи на экстремальные значения (9–10)

А. Д. Блинков

1. Среди всех треугольников с фиксированными углом и

а) противолежащей стороной;

б) периметром

укажите треугольник наибольшей площади. (См. [9].)

2. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, найдите треугольник с наибольшей суммой квадратов длин сторон. (См. [9].)

3. Из точки P, лежащей внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры PA', PB' и PC' на стороны BC, CA и AB соответственно. Найдите положение точки P, при котором произведение $PA' \cdot PB' \cdot PC'$ является наибольшим. Обобщите задачу для четырехугольника. (См. [10].)

4. Из точки P, лежащей внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры PA', PB' и PC' на прямые BC, CA и AB соответственно. Найдите положение точки P, при котором сумма $\dfrac{BC}{PA'} + \dfrac{CA}{PB'} + \dfrac{AB}{PC'}$ принимает наименьшее значение. (См. [9].)

5. Какой из четырехугольников с данными сторонами имеет наибольшую площадь? (См. [10].)

6. Замкнутая ломаная проходит по всем граням единичного куба. Найдите наименьшее возможное значение ее длины. (См. [11].)

7. Точка P лежит внутри угла AOB. Постройте так отрезок MN с концами на сторонах угла, содержащий точку P, чтобы сумма $OM + ON$ была наименьшей. (См. [9].)

8. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Точки M и N — середины сторон AC и BC

соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a. Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол ACB является переменной величиной. (См. [3].)

Зачетные задачи: 1 а), 3, 4, 5 и 7.

Контрольные вопросы

В заданиях I – V требуется выбрать номер верного ответа.

I. Из деревни A в деревню B ведет прямая дорога длиной 3 км. В деревне A живет 50 школьников, а в деревне B живет 100 школьников. В какой точке дороги надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было наименьшим?

а) В деревне А;
б) в одном километре от А;
в) посередине дороги;
г) в одном километре от В;
д) в деревне В;
е) определить невозможно.

II. Длины двух сторон треугольника равны 6 и 12. В каких границах может быть длина x третьей стороны?

а) $6 < x < 12$; б) $6 \leqslant x \leqslant 12$; в) $6 < x < 18$;
г) $6 \leqslant x \leqslant 18$; д) $0 < x < 18$; е) определить невозможно.

III. Какой из треугольников с данными сторонами b и c имеет наибольшую площадь?

а) Остроугольный;

б) прямоугольный, у которого прямой угол лежит между данными сторонами;

в) прямоугольный, у которого прямой угол лежит напротив одной из данных сторон;

г) тупоугольный, у которого тупой угол лежит между данными сторонами;

д) тупоугольный, у которого тупой угол лежит напротив одной из данных сторон;

е) определить невозможно.

IV. Какой из параллелограммов с данной площадью имеет наименьший периметр?

а) Ромб, отличный от квадрата;
б) прямоугольник, отличный от квадрата;
в) квадрат;
г) определить невозможно.

V. Укажите точку, лежащую внутри правильного треугольника, для которой сумма расстояний до сторон больше, чем от любой другой внутренней точки этого треугольника.

а) Ортоцентр (точка пересечения высот);
б) точка пересечения медиан;
в) центр вписанной окружности;
г) любая внутренняя точка;
д) центр описанной окружности;
е) такой точки не существует.

Решения

1. *Ответ*: равнобедренный треугольник с основанием, противолежащим данному углу.

Пусть дан треугольник ABC, в котором $\angle BAC = \alpha$; $|BC| = a$; $P_{ABC} = 2p$.

а) Рассмотрим все треугольники с фиксированной стороной BC и фиксированным углом A. Они вписаны в окружность фиксированного радиуса $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ так, что вершины, противолежащие стороне BC, лежат в одной полуплоскости относительно BC (см. рис. 1 *а*). Так как $S_{ABC} = 0{,}5ah_a$, то наибольшее значение площади достигается при наибольшем значении высоты, т. е. когда треугольник — равнобедренный.

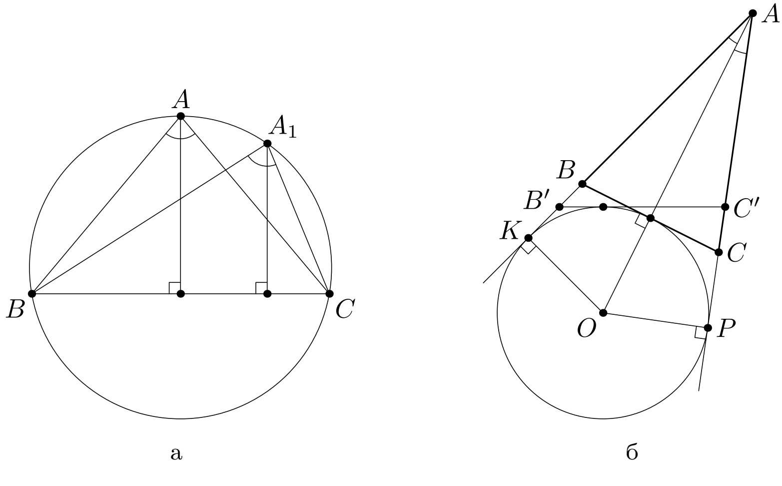


Рис. 1

б) Рассмотрим все треугольники с фиксированным периметром и фиксированным углом A. Для них фиксирована вневписанная окружность с центром O', касающаяся стороны a, так как $r_a = |AK| \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, где K — точка касания вневписанной окружности с продолжением стороны AB (см. рис. 1 *б*). Так как $S_{ABC} = (p-a)r_a$, то наибольшее значение площади достигается при наименьшем значении a, т. е. когда касательная BC к вневписанной окружности перпендикулярна биссектрисе AO' (аккуратно это доказывается методом от противного). Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

2. *Ответ*: равносторонний.

Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в окружность радиуса R с центром (см. рис. 2). Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, тогда $AB^2 + BC^2 + CA^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 + (\vec{c} - \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{c})^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$. Так как $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$, то $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, т. е. когда точка O совпадает с центром тяжести треугольника. Это означает, что треугольник ABC — равносторонний.

Существует и другой способ решения: зафиксируем одну сторону треугольника и докажем, используя теорему косинусов, что из всех вписанных в данную окружность треугольников с такой стороной наибольшая сумма квадратов — у равнобедренного треугольника.

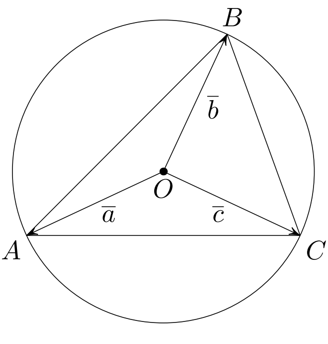


Рис. 2

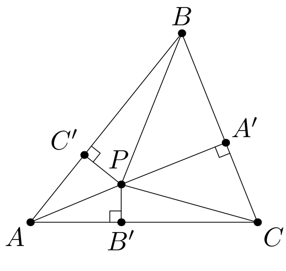


Рис. 3

3. *Ответ*: центр тяжести треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри него. Проведем перпендикуляры PA', PB' и PC' к сторонам треугольника и соединим P с вершинами (см. рис. 3). Тогда

$$PA' \cdot PB' \cdot PC' = \frac{2S_{BPC}}{a} \cdot \frac{2S_{CPA}}{b} \cdot \frac{2S_{APB}}{c}.$$

Так как стороны треугольника фиксированы, то произведение расстояний будет наибольшим тогда и только тогда, когда наибольшим будет произведение записанных площадей. Сумма таких площадей не зависит от расположения точки P и равна S_{ABC}, поэтому их произведение будет наибольшим, если $S_{BPC} = S_{CPA} = S_{APB}$, т. е. P — точка пересечения медиан треугольника ABC.

4. *Ответ*: центр окружности, вписанной в треугольник.

Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри него. Проведем перпендикуляры PA', PB' и PC' к прямым, содержащим стороны треугольника, и соединим P с вершинами (см. рис. 3 к задаче 3). Введя обозначения $PA' = x$, $PB' = y$ и $PC' = z$, получим: $ax + by + cz = 2S_{ABC}$.

Тогда

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z'}\right) \cdot 2S_{ABC} = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z'}\right) \cdot \Big(ax + by + cz\Big) =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + +ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + bc\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + ca\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqslant$$
$$\geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y = z$. Это означает, что P — центр вписанной окружности.

5. *Ответ*: вписанный в окружность.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с данными сторонами, вписанный в окружность (см. рис. 4). Пусть его площадь не наибольшая. Тогда

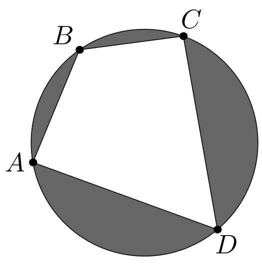


Рис. 4

«приклеим» к сторонам $ABCD$ сегменты круга и «вставим шарниры» в его вершины. Рассмотрим полученную фигуру с большей площадью четырехугольника. Она имеет такую же длину границы, но бо́льшую площадь, чем круг, что противоречит изопериметрическому свойству круга[1)].

[1)] В качестве иллюстрации метода можно также обсудить доказательство Я. Штейнера для изопериметрической задачи или сослаться на книгу В. Ю. Протасова «Максимумы и минимумы в геометрии».

6. *Ответ*: $3\sqrt{2}$.

Рассмотрим развертку куба (см. рис. 5). Искомая ломаная должна пересекать все грани куба, поэтому она лежит внутри обозначенной

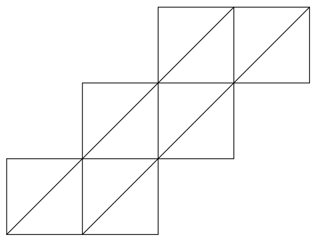
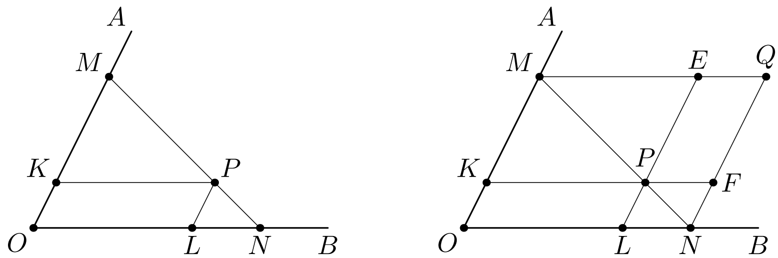


Рис. 5

полосы. Длина ломаной будет наименьшей, если на развертке она будет изображаться отрезком, параллельным краям полосы. В частности, таким отрезком будет изображаться граница правильного шестиугольника, вершинами которого являются середины ребер куба. Каждая сторона такого сечения куба равна половине диагонали грани, т. е. равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



а *б*

Рис. 6

7. Пусть MN — искомый отрезок. Проведем через точку P прямые, параллельные сторонам данного угла. Пусть они пересекают лучи OA и OB в точках K и L соответственно (см. рис. 6 *а*). Так как $OM + ON = (OK + OL) + (KM + LN)$, то требуемая сумма будет наименьшей тогда и только тогда, когда будет наименьшей сумма $KM + LN$.

Поскольку треугольники KMP и LPN подобны, то $\dfrac{KM}{PL} = \dfrac{KP}{LN} \iff KM \cdot LN = KP \cdot PL$. Следовательно, $KM + LN \geqslant 2\sqrt{KM \cdot LN} = 2\sqrt{KP \cdot PL} = 2\sqrt{OK \cdot OL}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $KM = LN = \sqrt{OK \cdot OL}$.

Таким образом, построение сводится к тому, чтобы на продолжениях сторон OK и OL параллелограмма $OKPL$ отложить отрезки, равные среднему геометрическому сторон параллелограмма.

Отметим, что искомый отрезок — единственный, а наименьшее значение суммы $OM + ON = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, где a и b — стороны параллелограмма $OKPL$.

Замечание. Равенство $KM \cdot LN = KP \cdot PL$ можно доказать иначе. Проведем через точки M и N прямые, параллельные сторонам угла AOB (см. рис. 6 *б*). Пусть Q — точка их пересечения, E и F — точки пересечения прямых LP и KP с MQ и NQ соответственно, тогда параллелограммы $OKPL$ и $PEQF$ равновелики и имеют соответственно равные углы.

8. *Ответ*: $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Пусть $ABDE$ — квадрат, построенный на стороне AB, тогда $[OM]$ — средняя линия $\triangle ADC$, $[ON]$ — средняя линия $\triangle BEC$ (см. рис. 7). На

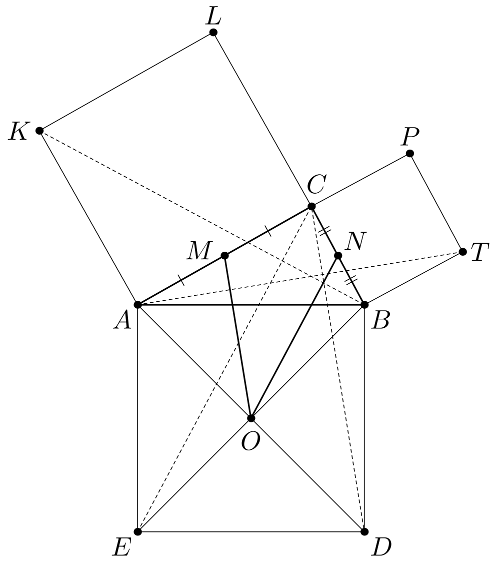


Рис. 7

отрезках AC и BC во внешнюю сторону построим квадраты $AKLC$ и $BTPC$. Проведем $[BK]$ и $[AT]$, тогда $\triangle ABT = \triangle DBC$ и $\triangle BAK = \triangle EAC$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $|DC|$ — наибольшая тогда и только тогда, когда $|AT|$ — наибольшая, т. е.

$T \in (AC)$. Аналогично $|EC|$ — наибольшая тогда и только тогда, когда $|BK|$ — наибольшая, т. е. $K \in (BC)$. Для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы $\angle ACB = 135°$.

В этом случае

$$|OM| + |ON| = \frac{1}{2}(|DC| + |EC|) = \frac{1}{2}(b + a\sqrt{2} + a + b\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Замечание. Равенство треугольников можно также доказать, используя поворот плоскости вокруг точек и A соответственно.

Площади (9–10)

А. Д. Блинков

1. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению длин наибольшей и наименьшей его диагоналей. (См. [9].)

2. Точка O, лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади S, симметрично отражается относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках. (См. [9].)

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина CD, F — середина AD, K — точка пересечения AC и BE. Докажите, что площадь треугольника BKF в два раза меньше площади треугольника ABC. (См. [7].)

4. Диаметр PQ и перпендикулярная ему хорда MN пересекаются в точке A. Точка C лежит на окружности, а точка B — внутри окружности, причем $BC \parallel PQ$ и $|BC| = |MA|$. Из точек A и B опущены перпендикуляры AK и BL на прямую CQ. Докажите, что треугольники ACK и BCL равновелики. (См. [9].)

5. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника. (См. [9].)

6. Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла ABC. Найдите площадь $ABCD$, если $|BD| = 6$ см, $\angle ABC = 60°$. (См. [1].)

7. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; M и N — середины сторон AB и CD; P и Q — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что

а) $S_{PMQN} = \frac{1}{2}|S_{ABD} - S_{ACD}|$; б) $S_{PEQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. (См. [9].)

8. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник площади S. Угол между прямыми AB и CD равен α, угол между прямыми AD и BC равен β. Докажите неравенство:

$$\frac{|AB|\cdot|CD|\cdot\sin\alpha+|AD|\cdot|BC|\cdot\sin\beta}{2}\leqslant S\leqslant\frac{|AB|\cdot|CD|+|AD|\cdot|BC|}{2}. \quad \text{(См. [9].)}$$

Зачетные задачи: 3, 4, 5 и 6.

Контрольные вопросы

I. Найдите величину угла между стороной и меньшей диагональю ромба, если длина стороны равна $2\sqrt{6}$ м, а площадь ромба равна 12 м^2.

II. В равнобокой трапеции большее основание — 15 м, боковая сторона — 4 м, диагональ — 13 м. Найдите ее площадь.

III. Найдите площадь равнобокой трапеции с тупым углом α, если радиус вписанной в нее окружности равен r.

IV. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь в отношении $p:q$, считая от вершины. В каком отношении она делит боковую сторону?

V. Стороны треугольника 35 см; 29 см и 8 см. Найдите: а) наибольшую высоту треугольника; б) радиусы описанной и вписанной окружностей.

VI. Длина стороны треугольника 10 м, длина медианы, проведенной к ней, 9 м, а длина еще одной медианы 6 м. Найдите площадь треугольника.

Решения

1. Пусть$ABCDEFGH$ — правильный восьмиугольник, S — его площадь.

Первый способ. $S=S_{KLNM}=|KL|\cdot|KM|=|CE|\cdot|BF|$, что и требовалось доказать (см. рис. 1).

Второй способ. Угол правильного восьмиугольника равен 135°. Пусть $|CD|=|CE|=a$, тогда из треугольника CDE:

$$|CE|^2=2a^2--2a^2\cos 135^\circ \Longleftrightarrow |CE|=a\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$|AE|=|CE|\sqrt{2}=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$S=8S_{\triangle AOB}=4R^2\cdot\sin 45^\circ=2R^2\sqrt{2}=\frac{1}{2}|AE|^2\sqrt{2}=|AE|\cdot|CE|.$$

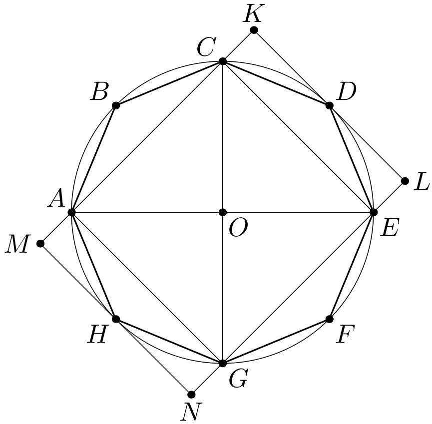


Рис. 1

2. *Ответ*: $2S$.

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник; E, F, G и H — середины его сторон; E', F', G' и H' — образы точки O при симметрии относительно этих середин (см. рис. 2).

Так как $[EF]$ — средняя линия треугольника $E'OF'$, то $S_{E'OF'} = 4S_{EOF}$. Аналогично $S_{F'OG'} = 4S_{FOG}$; $S_{G'OH'} = 4S_{GOH}$ и $S_{H'OE'} = 4S_{HOE}$. Таким образом, $S_{E'F'G'H'} = 4S_{EFGH}$. По теореме Вариньона $S_{EFGH} = 0{,}5S_{ABCD}$, следовательно, $S_{E'F'G'H'} = 2S$.

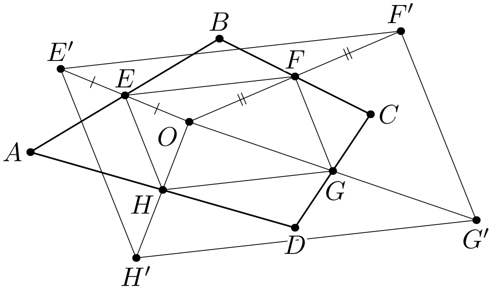


Рис. 2

3. *Первый способ.* Проведем EF — среднюю линию треугольника ADC (см. рис. 3 a). Тогда $\dfrac{S_{\triangle BKF}}{S_{\triangle BEF}} = \dfrac{|BK|}{|BE|}$, так как высоты этих треугольников, проведенные из вершины F, совпадают. Кроме того, так как $EF \parallel AC$, то длины перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые EF и AC, относятся как $|BE|:|BK|$, поэтому

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|EF|\cdot|BE|}{|AC|\cdot|BK|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|BE|}{|BK|}.$$

Перемножив почленно полученные равенства, имеем: $\dfrac{S_{\triangle BKF}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{1}{2}$.

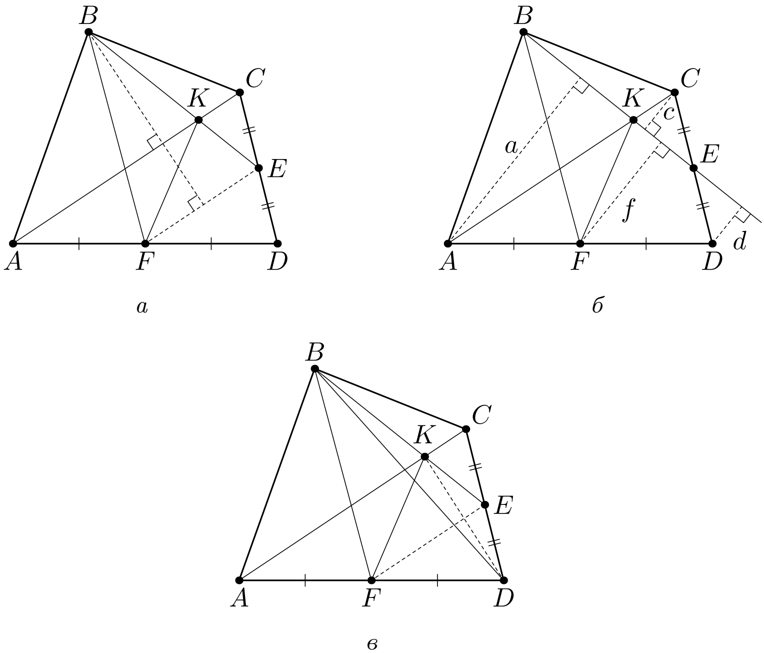


Рис. 3

Второй способ. Пусть a, c, f и d — длины перпендикуляров, опущенных на прямую BE из точек A, C, F и D соответственно (см. рис. 3 *б*). Тогда $c = d$; $f = \dfrac{a+d}{2}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABK} + S_{\triangle KBC} =$$
$$= \frac{1}{2}|BK|\cdot(a+c) = \frac{1}{2}|BK|\cdot(a+d) = |BK|\cdot f = 2S_{\triangle BKF},$$

что и требовалось доказать.

Третий способ. Проведем отрезки BD и DK (см. рис. 3 *в*). Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то:

$$\begin{aligned}2S_{\triangle BKF} &= 2(S_{ABCD} - S_{\triangle BCE} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle FKD} - S_{\triangle DKE}) = \\ &= 2S_{ABCD} - S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AKD} - S_{\triangle DKC} = \\ &= S_{ABCD} - S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

Четвертый способ. Проведем отрезки BD и EF (см. рис. 3 *в*). Так как медиана треугольника делит его площадь пополам, то $S_{\triangle BAF} = \frac{1}{2}S_{\triangle BAD}$ и $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$. Кроме того, так как EF — средняя линия треугольника ADC, то $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle EFK} = \frac{1}{4}S_{\triangle ACD}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}S_{\triangle BKF} &= S_{ABCD} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle BCE} - S_{DFKE} = \\ &= \frac{1}{2}(S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD}) = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

4. Пусть $\angle BCQ = \angle PQC = \alpha$. Тогда, так как $\angle PCQ = 90^\circ$, $\angle CPQ = 90^\circ - \alpha$ (см. рис. 4). Проведем $AD \parallel CQ$ так, что $D \in [CP]$. Из того, что $DCKA$ — прямоугольник, следует, что $|AD| = |CK|$.

$$\begin{aligned}S_{ACK} &= \frac{1}{2}|CK|\cdot|AK| = \frac{1}{2}|AD|\cdot|AK| = \\ &= \frac{1}{2}|AP|\cdot\sin(90^\circ-\alpha)\cdot|AQ|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}|AP|\cdot|AQ|\cdot\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \frac{1}{2}|AM|^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}|BC|^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}|CL|\cdot|BL| = S_{BCL}.\end{aligned}$$

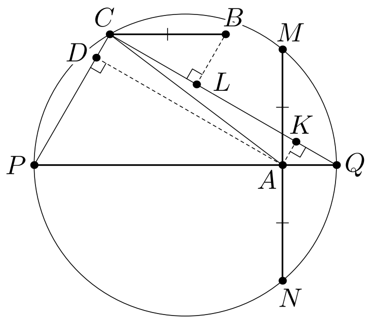


Рис. 4

5. *Ответ*: $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Пусть $ABCDE$ — данный пятиугольник, $AC \cap BD = P$ (см. рис. 5). Так как $S_{AED} = S_{CED} = 1$, то точки A и C равноудалены от прямой DE, т. е. $AC \parallel DE$. Аналогично $BD \parallel AE$, т. е. $APDE$ — параллелограмм, значит, $S_{APDE} = 2$.

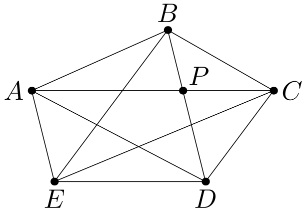


Рис. 5

Пусть $S_{ABP} = x$, тогда $S_{ABCDE} = S_{APDE} + S_{ABP} + S_{BCD} = 3 + x$. Так как $\dfrac{S_{ABP}}{S_{CBP}} = \dfrac{|AP|}{|CP|} = \dfrac{S_{ADP}}{S_{CDP}}$, то $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-(1-x)} \Longleftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Учитывая, что $x > 0$, получим: $S_{ABCDE} = 3 + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

6. *Ответ*: $9\sqrt{3}$ см^2.

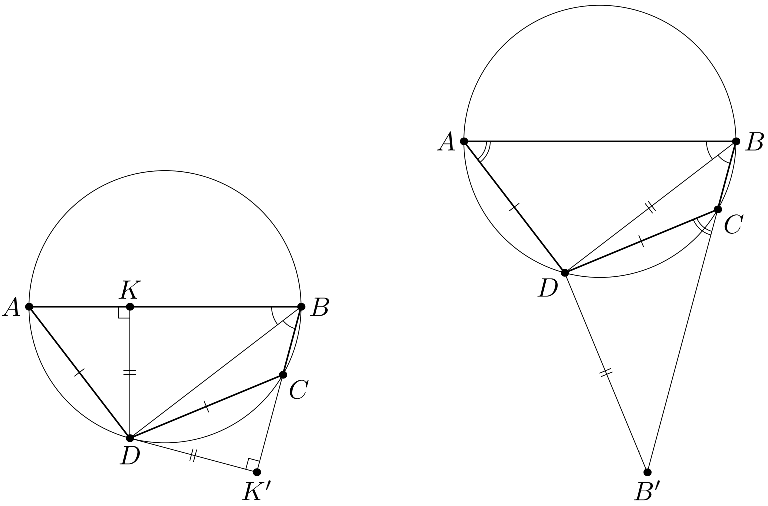
Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то в данном четырехугольнике $ABCD$ $|AD = |DC|$.

Первый способ. Рассмотрим симметрию относительно BD (см. рис. 6 *а*). Так как точка D равноудалена от сторон угла ABC, то образом высоты DK треугольника ABD будет являться высота DK' треугольника BCD. Тогда прямоугольные треугольники AKD и $CK'D$ равны (по катету и гипотенузе), следовательно, $S_{ABCD} = S_{BKDK'} = 2S_{\triangle BKD} = |BK| \cdot |KD| = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$.

Второй способ. Рассмотрим поворот с центром D на угол ADC по часовой стрелке (см. рис. 6 *б*). При таком повороте образами точек A и B являются точки C и B' соответственно, т. е. образом треугольника ABD является равный ему треугольник $CB'D$. Так как четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, значит, точки B, C и B' лежат на одной прямой. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ и треугольник BDB' равновелики.

Так как треугольник BDB' равнобедренный, получаем $|DB'| = |DB| = 6$ см; $\angle B' = \angle B = 30°$. Поэтому

$$S_{ABCD} = S_{\triangle BDB'} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |B'D| \cdot \sin 120° = 9\sqrt{3}.$$



а *б*

Рис. 6

7. Пусть $E = [CB) \cap [DA)$ (см. рис. 7). Тогда $S_{ABD} < S_{ACD}$.

а) Четырехугольник $PMQN$ — параллелограмм; $\angle PMQ = \angle CED = \alpha$, поэтому $S_{PMQN} = |MP| \cdot |MQ| \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{4}|BC| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$.

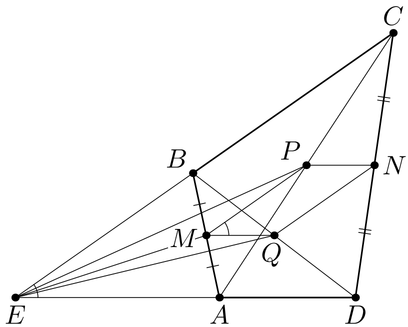


Рис. 7

Высоты треугольников ABD и ACD, проведенные из вершин B и C, равны соответственно $|BE| \cdot \sin\alpha$ и $|CE| \cdot \sin\alpha$, поэтому $S_{ACD} - S_{ABD} = \dfrac{1}{2}(|CE| - |BE|) \cdot |AD| \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2}|BC| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$.

Если $E = [BC) \cap [AD)$, то $S_{ABD} > S_{ACD}$. Рассуждая аналогично, получим, что $S_{ABD} - S_{ACD} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$.

Таким образом, $S_{PMQN} = \frac{1}{2}|S_{ABD} - S_{ACD}|$, что и требовалось доказать.

б) Так как $PM \parallel CE$ и $QM \parallel DE$, точка M лежит внутри треугольника PEQ (см. рис. 7), поэтому $S_{PEQ} = S_{PMQ} + S_{PME} + S_{QME}$. Из пункта а): $S_{PMQ} = \frac{1}{2}S_{PMQN} = \frac{1}{4}(S_{ACD} - S_{ABD})$, $S_{PME} = S_{AMP} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично $S_{QME} = S_{BMQ} = \frac{1}{4}S_{ABD}$.

Следовательно,

$$S_{PEQ} = \frac{1}{4}S_{ACD} - \frac{1}{4}S_{ABD} + \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ABD} = \frac{1}{4}(S_{ACD} + S_{ABC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

8. Без ограничения общности можно считать, что $[BA) \cap [CD) = P$, $[BC) \cap [AD) = Q$. Тогда $\angle BPC = \alpha$; $\angle BQA = \beta$ (см. рис. 8).

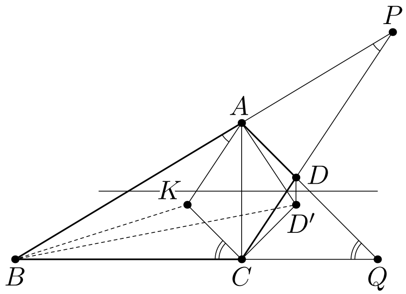


Рис. 8

1) Достроим треугольник ADC до параллелограмма $ADCK$, тогда точка K лежит внутри $ABCD$. Следовательно,

$$S \geqslant S_{ABCK} = S_{ABK} + S_{BCK} = 0{,}5 \cdot |AB| \cdot |AK| \cdot \sin\alpha + \\ + 0{,}5 \cdot |CB| \cdot |CK| \cdot \sin\beta = 0{,}5 \cdot (|AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha + |CB| \cdot |AD| \cdot \sin\beta).$$

2) Проведем прямую m — серединный перпендикуляр к $[AC]$ и рассмотрим $D' = S_m(D)$. Тогда

$$S = S_{ABCD'} = S_{ABD'} + S_{BCD'} \leqslant \\ \leqslant 0{,}5 \cdot |AB| \cdot |AD'| + 0{,}5 \cdot |CB| \cdot |CD'| = 0{,}5 \cdot (|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|),$$

что и требовалось доказать.

Конические сечения (10–11)

А. В. Акопян

Эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется множество точек, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянна.

Гиперболой с фокусами F_1 и F_2 называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянен.

Параболой с фокусом F_1 и директрисой l называется множество точек, равноудаленных от F и l.

Эллипсы, гиперболы и параболы называются *кониками*.

1. а) Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса — больше длины большой оси.

б) Сформулируйте и докажите для гиперболы и параболы утверждения, аналогичные утверждению из пункта а).

2. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

3. а) **Оптическое свойство.** Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Докажите, что прямая l — это внешняя биссектриса угла F_1PF_2.

б) Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

в) Пусть дано семейство коник с фокусами в F_1 и F_2. Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами.

4. Пусть дана некоторая коника и ее хорда AB. Пусть касательные в точках A и B пересекаются в точке P.

а) Докажите, что если AB содержит F_1, то PF_1 и AB перпендикулярны.

б) Докажите, что $\angle F_1PA = \angle F_2PB$.

в) Докажите, что $\angle AF_1P = \angle PF_1B$.

5. Найдите геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом.

6. Пусть парабола касается трех прямых, содержащих стороны треугольника.

а) Покажите, что ее фокус лежит на описанной окружности этого треугольника.

б) Выведите отсюда, что описанные окружности треугольников, образованных четырьмя прямыми, пересекаются в одной точке (*точка Микеля*).

7. Пусть парабола касается трех прямых, содержащих стороны треугольника.

а) Покажите, что ее директриса проходит через ортоцентр треугольника.

б) Выведите отсюда, что ортоцентры треугольников, образованных четырьмя прямыми, лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

8. Докажите, что если вершины треугольника лежат на некоторой равносторонней гиперболе (т. е. ее асимптоты перпендикулярны), то на этой гиперболе лежит также ортоцентр этого треугольника.

9*. На эллипс α накинули нить, которую натянули с помощью карандаша (см. рис. 6). Докажите, что карандаш при вращении вокруг α опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом α.

Зачетные задачи: все, кроме любых 6 пунктов.

Контрольный вопрос

Дана окружность и непересекающая ее прямая. Что является геометрическим местом центров окружностей, касающихся как окружности, так и прямой?

а) Эллипс; б) гипербола; в) парабола; г) две параболы.

Решения

1. а) Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, а точку — через X. Точку пересечения луча F_1X с эллипсом обозначим через Y. Пусть сначала X лежит внутри эллипса. По неравенству треугольника $F_2X < XY + YF_2$, а значит, $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$ (рис. 1).

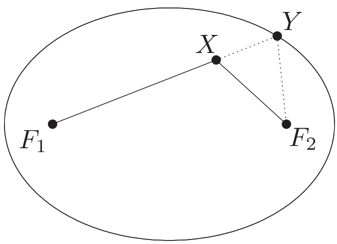


Рис. 1

Но $F_1Y + F_2Y$ равно большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка X лежит вне эллипса, получаем: $F_2Y < XY + XF_2$. Следовательно, $F_1X + XF_2 = F_1Y + YX + XF_2 > F_1Y + F_2Y$.

б) Для точек внутри параболы расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы — больше.

В случае гиперболы утверждение формулируется следующим образом: пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 равен d. Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит F_1, через Γ. Тогда для точек X вне Γ величина $XF_2 - XF_1$ меньше d, а внутри — больше.

2. Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 лежат одна вне другой. Если окружность с центром O и радиусом r касается обеих окружностей внешним образом, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$ и, значит, $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$, т. е. O лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами O_1, O_2. Если окружность касается обеих данных окружностей внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний OO_1 и OO_2 равен $r_1 + r_2$, т. е. O описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Если одна окружность лежит внутри другой, то искомое ГМТ состоит из двух эллипсов с фокусами O_1, O_2 и большими осями, равными $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$. Случай пересекающихся окружностей разберите самостоятельно.

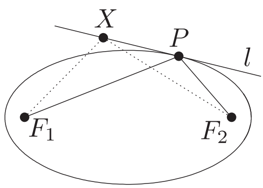


Рис. 2

3. а) Пусть X — произвольная точка l, отличная от P. Так как X лежит вне эллипса, то $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$ (задача 1), т. е. из всех точек прямой l точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. Но, как известно, для точки P, обладающей этим свойством, углы, образованные PF_1 и PF_2 с l, равны.

б) Для параболы оптическое свойство формулируется следующим образом: если прямая l касается параболы в точке P, а P' — это проекция точки P, то l является биссектрисой угла FPP'.

Для гипербол: если прямая l касается гиперболы в точке P, то l является биссектрисой угла F_1PF_2, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы.

в) Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке P. Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1PF_2 соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

4. а) В силу оптического свойства PA и PB — это биссектрисы внешних углов $\triangle F_2AB$. А значит, P — центр его вневписанной окружности. Точка касания вневписанной окружности со стороной (обозначим ее через F_1') вместе с противоположной вершиной F_2 делят периметр треугольника пополам, т. е. $F_1'A + AF_2 = F_2B + BF_1'$. Но этим свойством обладает F_1, и такая точка только одна. Значит, F_1' и F_1 совпадают. Получаем, что F_1 — точка касания вневписанной окружности со стороной, а значит, PF_1 и AB перпендикулярны.

б) Пусть F_1', F_2' — точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PA и PB соответственно (рис. 3).

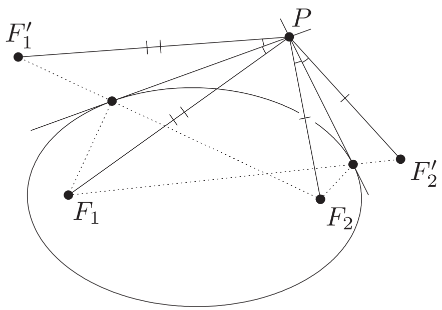


Рис. 3

Тогда $PF_1' = PF_1$ и $PF_2' = PF_2$. Кроме того, точки F_1, B и F_2' лежат на одной прямой (в силу оптического свойства). То же самое верно и про точки F_2, A и F_1'. Получаем $F_2F_1' = F_2A + AF_1 = F_2B + BF_1 = F_2'F_1$. Следовательно, треугольники PF_2F_1' и PF_1F_2' равны (по трем сторонам). А значит:

$$\angle F_2PF_1 + 2\angle F_1PA = \angle F_2PF_1' = \angle F_1PF_2' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PB.$$

Отсюда получаем, что $\angle F_1PA = \angle F_2PB$, что и требовалось.

в) Поскольку треугольники PF_2F_1' и PF_1F_2' равны, равны углы $PF_1'F_2$ и PF_1F_2'. Получаем:

$$\angle PF_1A = \angle PF_1'F_2 = \angle PF_1F_2' = \angle PF_1B.$$

5. Обозначим фокусы этого эллипса через F_1 и F_2. Пусть касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P. Отразим F_1

относительно PX. Полученную точку обозначим через F_1'. Тогда из задачи 4б) следует, что $\angle XPY = \angle F_1'PF_2$ и $F_1'F_2 = F_1X + F_2X$, т. е. $F_1'F_2$ равен большой оси эллипса. Угол $F_1'PF_2$ тогда и только тогда прямой, когда $F_1'P^2 + F_2P^2 = F_1'F_2^2$ (по теореме Пифагора). Следовательно, угол F_1PF_2 прямой тогда и только тогда, когда $F_1P^2 + F_2P^2$ равно квадрату большой оси эллипса. Но, как легко показать, это означает, что точка P принадлежит окружности. Действительно, пусть F_1 имеет декартовы координаты $(x_1; y_1)$, а F_2 соответственно $(x_2; y_2)$. Тогда координаты искомых точек P будут удовлетворять условию

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C,$$

где C — это квадрат большой оси. Но поскольку коэффициенты при x^2 и y^2 равны (а именно 2) и коэффициент при xy равен 0, то множеством точек, удовлетворяющих этому уравнению, будет окружность. Легко понять из соображений симметрии, что центром этой окружности будет середина отрезка F_1F_2.

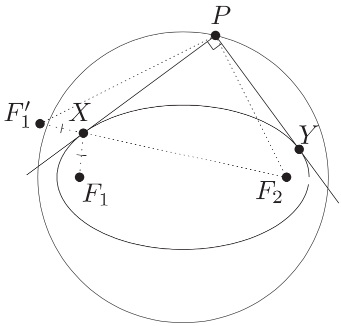


Рис. 4

6. а) Из оптического свойства параболы следует, что если фокус отразить относительно любой касательной, он попадет на директрису. Отсюда легко вывести, что проекция фокуса на касательные к параболе всегда попадает на прямую, которая касается параболы в ее вершине. Остается только воспользоваться результатом задачи 1 из раздела «Изогональное сопряжение и прямая Симсона».

б) Для любых пяти прямых общего положения существует коника, касающаяся каждой из этих прямых. Если считать, что одна прямая бесконечно удаленная, получаем, что для любых четырех прямых общего положения существует парабола, касающаяся их. Фокус этой параболы и будет точкой Микеля.

7. а) Прямое следствие задачи 6 а) и задачи 4 из материала «Изогональное сопряжение и прямая Симсона».

б) Аналогично задаче 6.

8. Пусть ABC — данный треугольник, H — его ортоцентр и X, Y — две бесконечно удаленные точки гиперболы. Проведем через A и B прямые, параллельные направлению на X, а через C и H — прямые, параллельные направлению на Y. Пусть UV — диагональ образованного этими прямыми прямоугольника, B' — основание высоты треугольника, опущенной из B (см. рис. 5).

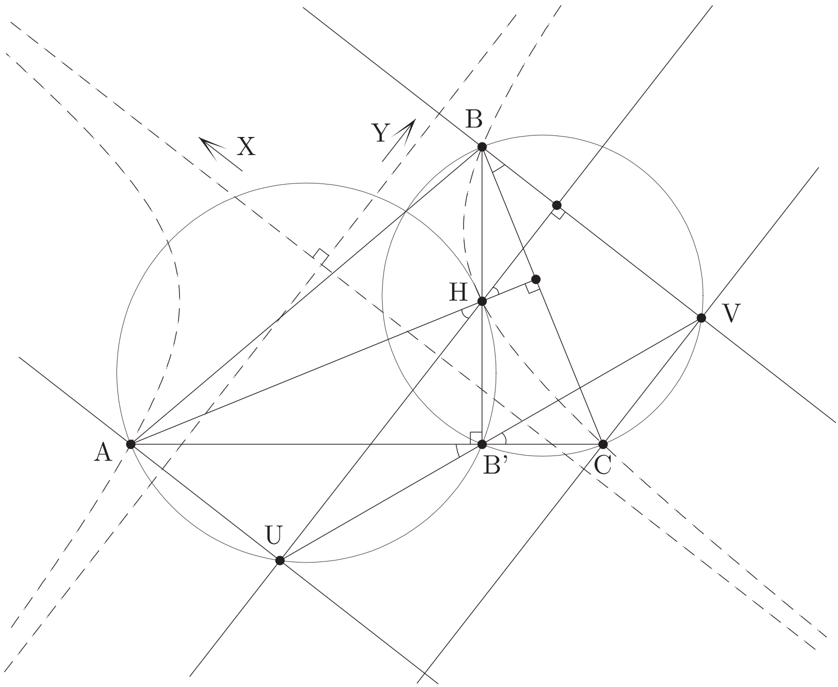


Рис. 5

Так как четырехугольники $BB'CV$ и $AUB'H$ вписаны в окружности с диаметрами BC и AH, $\angle AB'U = \angle AHU$, $\angle VB'C = \angle VBC$. Но $\angle AHU = \angle VBC$, как углы с перпендикулярными сторонами, значит, точки U, B', V лежат на одной прямой и по обратной теореме Паскаля шестиугольник $AXBHYC$ вписан в конику, т. е. равносторонняя гипербола $ABCXY$ проходит через H.

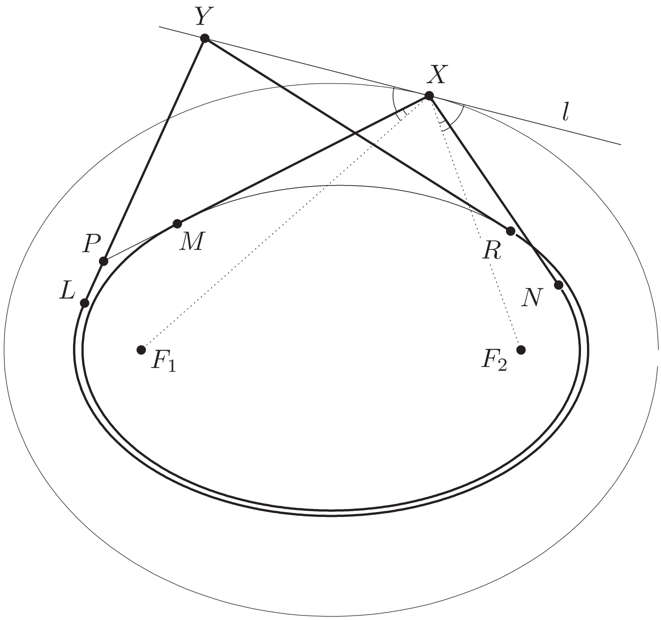


Рис. 6

9. Очевидно, что получившаяся фигура (обозначим ее через α_1) будет иметь гладкую границу. Покажем, что в каждой точке X на фигуре α_1 касательная будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2.

Пусть XM и XN — касательные к α. Тогда $\angle F_1XN = \angle F_2XM$, а значит, биссектриса внешнего угла NXM будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2. Обозначим ее через l.

Пусть Y — произвольная точка на прямой l, YL и YR — касательные к α, причем они проведены с тех же сторон, как показано на рис. 6. В дальнейших рассуждениях будет использоваться, что точка Y лежит «слева» от X, другой случай рассматривается аналогично.

Обозначим через P точку пересечения прямых XM и YL. Легко понять, что $YN < YR + \smile RN$, а $\smile LM < LP + PM$. Кроме того, поскольку l — внешняя биссектриса угла NXP, имеем $PX + XN < PY + YN$. А значит:

$$MX + XN + \smile NM < MX + XN + \smile NL + LP + PM =$$
$$= PX + XN + \smile NL + LP < PY + YN + \smile NL + LP =$$
$$= LY + YN + \smile NL < LY + YR + \smile RN + \smile NL = LY + YR + \smile RL.$$

(здесь под дугами подразумеваются дуги, по которым идет нить). Следовательно, точка Y будет вне фигуры α_1. И так для любой точки Y на прямой l. Получается, что α_1 содержит единственную точку прямой l, т. е. касается этой прямой. Из доказанного также сразу следует, что полученная кривая выпукла.

То есть сумма расстояний до фокусов F_1 и F_2 в любой момент времени не меняется. Из этого можно сделать вывод, что она постоянна, а значит траектория карандаша совпадает с эллипсом.

Криволинейные треугольники и неевклидова геометрия (10–11)

М. Б. Скопенков

Цель данной подборки задач — на простом примере показать, как неевклидова геометрия естественно возникает при решении задач евклидовой геометрии. Предполагается, что читатель знаком с понятием инверсии и ее простейшими свойствами (см., например, раздел «Инверсия» из гл. 6.

Основной пример. При многократных отражениях относительно сторон правильного треугольника на плоскости получается разбиение плоскости на бесконечное число правильных треугольников.

Криволинейным треугольником назовем фигуру, составленную из трех дуг окружностей a, b и c. *Отражением* относительно стороны криволинейного треугольника назовем инверсию относительно соответствующей окружности.

Основной вопрос. Что получится в результате многократного отражения относительно сторон данного *криволинейного* треугольника $\triangle$?

Назовем криволинейный треугольник *правильным*, если он переходит в себя при повороте на $120°$ вокруг некоторой точки.

1. Ответьте на основной вопрос в случае, когда $\triangle$ — правильный криволинейный треугольник с тремя углами по $90°$ (нарисуйте получающуюся картинку).

2. Пусть $\triangle$ — правильный криволинейный треугольник с нулевыми углами (т. е. треугольник, составленный из трех попарно касающихся окружностей). Докажите, что его образы при многократных отражениях лежат внутри его описанной окружности.

3. Пусть $\triangle$ — правильный криволинейный треугольник, все три угла которого меньше $60°$.

а) Докажите, что существует окружность d, перпендикулярная всем трем его сторонам a, b и c.

б) Любая композиция отражений относительно a, b и c оставляет окружность d на месте.

в) Образы треугольника $\triangle$ при многократных отражениях лежат внутри круга, ограниченного окружностью d.

4. Пусть $\triangle$ — криволинейный треугольник с суммой углов меньше 180°. Докажите, что все его образы при многократных отражениях содержатся в некотором круге.

5. Пусть $\triangle$ — криволинейный треугольник с суммой углов 180°.

а) Докажите, что три окружности a, b и c, из дуг которых он составлен, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что плоскость нельзя покрыть *конечным* числом его образов при многократных отражениях.

в) Докажите, что *все* его образы при многократных отражениях покрывают плоскость.

6. Назовем *биссектрисой* двух пересекающихся окружностей окружность, проходящую через обе точки их пересечения и делящую угол между ними пополам. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов 180° пересекаются в одной точке.

7. Пусть $\triangle$ — «осьмушка» сферы (т. е. пересечение единичной сферы с координатным октантом). Какая картинка на сфере получится при многократных отражениях относительно плоскостей, содержащих стороны «треугольника» $\triangle$? Сравните результат с ответом в задаче 1.

8. Пусть $\triangle$ — криволинейный треугольник с суммой углов больше 180°, пусть a, b и c — его стороны.

а) Докажите, что при стереографической проекции на некоторую сферу, касающуюся плоскости в радикальном центре трех окружностей a, b и c, эти окружности переходят в большие окружности сферы.

б) Докажите, что плоскость покрывается конечным числом образов треугольника $\triangle$ при многократных отражениях.

9. Докажите, что три биссектрисы криволинейного треугольника с суммой углов больше 180° пересекаются в одной точке.

Дополнительные задачи [2)]

10*. Назовем *высотой* h_a криволинейного треугольника окружность, проходящую через *обе* точки пересечения окружностей b и c, перпендикулярную окружности a. Аналогично определяются две другие высоты h_b и h_c. (Мы исключаем из рассмотрения криволинейные

[2)] Автор благодарен Ф. Нилову за задачи 11–13.

треугольники с двумя прямыми углами.) Докажите, что если две высоты криволинейного треугольника пересекаются в некоторой точке, то и третья высота проходит через эту точку.

11*. Пусть высоты h_a, h_b и h_c криволинейного треугольника пересекают дуги a, b и c в точках H_a, H_b и H_c соответственно. Назовем окружность, проходящую через точки H_a, H_b и H_c, *окружностью* 9 *точек*. Пусть M_a, M_b и M_c — вторые точки пересечения окружности 9 точек с окружностями a, b и c соответственно. Назовем *медианой* m_a криволинейного треугольника окружность, проходящую через обе точки пересечения окружностей b и c и точку M_a. Определим медианы m_b и m_c аналогично. Докажите, что если две медианы криволинейного треугольника пересекаются в некоторой точке, то и третья медиана проходит через эту точку.

12*. Назовем *вписанной* окружность, касающуюся всех трех окружностей a, b, c. Пусть G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности с окружностями a, b и c соответственно. Проведем окружность g_a через точку G_a и обе точки пересечения окружностей b и c. Определим окружности G_b и G_c аналогично. Докажите, если две из окружностей G_a, G_b, G_c пересекаются в некоторой точке, то и третья из них проходит через эту точку.

13*. Верно ли, что окружность 9 точек (см. задачу 11) касается вписанной окружности (см. задачу 12)?

Подумайте, какие еще теоремы планиметрии остаются справедливыми для криволинейных треугольников, а какие перестают быть верными?

Контрольные вопросы

I. Опишите все окружности, которые остаются на месте при инверсии относительно окружности a.

а) Таких окружностей нет;

б) сама окружность a;

в) окружности, перпендикулярные окружности a;

г) окружности, перпендикулярные окружности a, и сама окружность a;

д) все окружности.

II. Какие из следующих утверждений верны для любого криволинейного треугольника?

а) Существует инверсия, переводящая одну из его сторон в прямолинейный отрезок.

б) Существует инверсия, переводящая две его стороны в прямолинейные отрезки.

в) Существует инверсия, переводящая все три его стороны в прямолинейные отрезки.

III. Сколько существует биссектрис у данной пары пересекающихся окружностей?
а) 1; б) 2; в) 3; г) бесконечно много.

Решения

1. См. рис. 1.

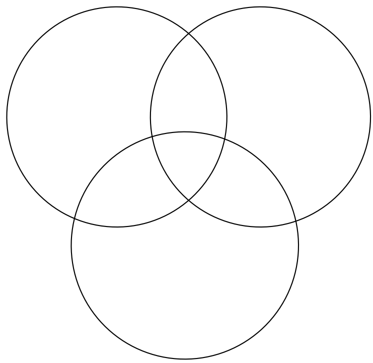


Рис. 1

2. Заметим, что описанная окружность d правильного криволинейного треугольника с нулевыми углами перпендикулярна окружностям a, b и c. Следовательно, внутренность круга, ограниченного окружностью d, остается на месте при инверсии относительно любой из окружностей a, b и c. Значит, она остается на месте при любой композиции этих инверсий. Поскольку исходный криволинейный треугольник лежит внутри окружности d, то и его образ при многократных отражениях лежит внутри окружности d.

Что читать

Доказательство теорем о биссектрисах и высотах для криволинейного треугольника можно прочитать в следующих источниках.

[1] *Скопенков М. Б.* Теорема о высотах и тождество Якоби // Математическое просвещение. Третья серия. 2007. Вып. 11. С. 79–89.
`http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html`

[2] Материалы 18-й летней конференции международного математического Турнира городов.
`http://olympiads.mccme.ru/lktg/2006/4/ index.htm`

Рисование (8–10)

А. Б. Скопенков

1. Куб с ребром 3 разбит на 27 единичных кубиков. Нарисуйте

а) ежа (объединение центрального кубика и имеющих с ним общую грань);

б) то, что получается при выкидывании ежа из куба;

в)* то, что получается при выкидывании угловых кубиков из куба.

2. Можно ли пространство заполнить непересекающимися ежами?

3. Нарисуйте

а) правильный тетраэдр;

б) октаэдр;

в) додекаэдр;

г) икосаэдр

вместе с кубом, при помощи которого они построены.

4. а) Нарисуйте объединение куба $A\ldots D_1$ с кубом, полученным из него поворотом на $\pi/3$ относительно большой диагонали.

б) Нарисуйте объединение тетраэдра $ABCD$ с тетраэдром, полученным из него поворотом на $\pi/2$ относительно бимедианы, т. е. прямой, соединяющей середины противоположных ребер.

5. На плоскости стоят куб и каркас треугольной пирамиды, высота которой больше высоты куба. Нарисуйте тень от каркаса пирамиды на кубе, если пучок света параллелен прямой, соединяющей вершину пирамиды с центром верхней грани куба.

6. Правильные многоугольники с каким числом сторон могут получиться при пересечении куба плоскостью?

7. а) Нарисуйте тело, проекции которого на три взаимно ортогональные плоскости являются треугольником, квадратом и кругом соответственно.

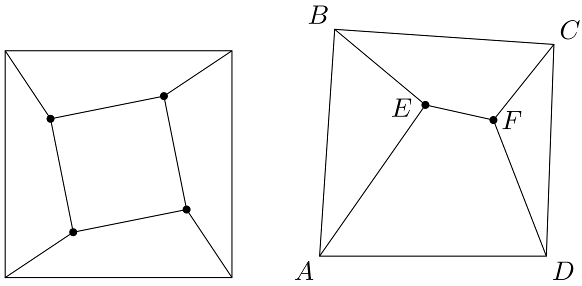
б) Проекции пространственной фигуры на две пересекающиеся плоскости являются прямыми линиями. Обязательно ли эта фигура — прямая линия?

8. На рисунках *а*, *б* изображен вид сверху двух многогранников (невидимых ребер нет). Возможны ли такие многогранники?

в) При каких условиях на точки E и F внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ данный рисунок может быть видом сверху некоторого многогранника?

См. также

`http://www.turgor.ru/lktg/2001/skewline/lines/zip`,



а *б*

`http://www.turgor.ru/lktg/2001/skewline/lines/zip`,
`http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.en/index.htm`,
`http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.en/index.htm`.

Подсчет по частям. Углы, отрезки... (9–10)

А. А. Гаврилюк

1. Правильный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром в точке O, M — произвольная точка плоскости. Докажите, что $A_1M^2 + A_2M^2 + \ldots + A_nM^2 = n(R^2 + OM^2)$.

2. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника ABE равнобедренный треугольник.

3. Пусть P и Q — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$; M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то длины отрезков BC и AD равны.

4. Четыре окружности расположены так, что каждая касается внешним образом двух других. Каждая из этих окружностей касается внутренним образом пятой окружности в точках A, B, C, D. Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot DA$.

5. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC продолжены до пересечения с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что $\dfrac{AA_2}{AA_1} + \dfrac{BB_2}{BB_1} + \dfrac{CC_2}{CC_1} = 4$.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

7. На плоскости даны прямая l и треугольник ABC по одну сторону от нее. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки, симметричные A, B и C относительно l. Через точку A_1 проведена прямая, параллельная BC, через точку B_1 — прямая, параллельная AC, через точку C_1 — прямая, параллельная AB. Докажите, что три построенные прямые пересекаются в одной точке.

Геометрический винегрет (9–10)

А. А. Гаврилюк

1. Назовем выпуклый многоугольник константным, если суммы расстояний от точки внутри него до прямых, содержащих стороны постоянна. Докажите, что многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ константен тогда и только тогда, когда $\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}}{A_1A_2} + \ldots + \dfrac{\overrightarrow{A_nA_1}}{A_nA_1} = \vec{0}$.

2. На сторонах BC, CA и AB треугольника так взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть M — проекция точки A_1 на B_1C_1. Докажите, что MA_1 — биссектриса угла BMC.

3. Дан угол с вершиной A. На одной из его сторон взяты точки B и B_1, на другой — точки C и C_1 так, что отрезки BC и B_1C_1 пересекаются в точке K. В окружности, описанной около треугольника ABC, проведена хорда AD, параллельная B_1C_1, а в окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, проведена хорда AD_1, параллельная BC. Докажите, что точки D, D_1 и K лежат на одной прямой.

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, $\angle AMD = 120°$, $AM = MD$. На стороне BC взята произвольная точка E, а на сторонах AB и CD — соответственно точки K и P так, что $KE \parallel AC$ и $EP \parallel BD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника KEP, лежит на стороне AD.

5. Дан параллелограмм $ABCD$ ($\angle BAD$ — острый). Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке L, а прямую BC — в точке K. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника LCK. Докажите, что точки D, B, C и O лежат на одной окружности.

6. Через точку M, лежащую внутри окружности, проведены 4 различные хорды A_kB_k, где $k = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что точка P пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, точка Q пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4, а также точка M лежат на одной прямой.

7. Прямая, проходящая через центр вписанной в треугольник ABC окружности, пересекает стороны AC и BC в точках E и F. Докажите, что
$$CE+CF \geqslant \frac{4BC\cdot AC}{AB+BC+CA}.$$

8. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA} — окружности, построенные на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно как на диаметрах. Известно, что окружность S_{AB} касается окружности S_{CD}, а окружность S_{BC} касается окружности S_{DA}. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

9. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB=BC$, $\angle C=\angle A=90^\circ$. Внутри него выбрана точка X так, что $AX\perp BE$, $CX\perp BD$. Докажите, что $BX\perp DE$.

10. Дан треугольник ABC, все углы которого выражаются целым числом градусов и отличны от 45°, 90°, 135°. Точки A_1, B_1, C_1 — основания его высот, точки A_2, B_2, C_2 — основания высот треугольника $A_1B_1C_1$, и т. д. Докажите, что среди треугольников $A_nB_nC_n$ бесконечно много подобных между собой.

11. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF \parallel BC$ и $EG\parallel AB$. Докажите, что четырехугольник $DEFG$ — вписанный.

12. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$
$$AB=BC,\quad \angle ABE+\angle DBC=\angle EBD \quad \text{и} \quad \angle AEB+\angle BCD=180^\circ.$$
Докажите, что ортоцентр треугольника BDE лежит на диагонали AC.

13. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB=\angle LAB=\alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

14. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Высоты треугольника из вершин A и C пересекают окружность в точках E и F соответственно, D — произвольная точка на (меньшей) дуге AC, K — точка пресечения DF и AB, L — точка пересечения DE и BC. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треугольника ABC.

15. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке O. Докажите, что O лежит внутри серединного треугольника для $A_1B_1C_1$.

Часть III

КОМБИНАТОРИКА

Г Л А В А 10

ПОДСЧЕТЫ В КОМБИНАТОРИКЕ

Подсчеты числа способов (7–8)

А. А. Гаврилюк

Данный раздел не требует никаких знаний и подходит для первого знакомства с комбинаторикой.

1. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

2. а) Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только четные цифры. Сколько существует пятизначных симпатичных чисел?

б) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

в) Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

3. Имеется $2k+1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

4. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

5. Найдите сумму всех семизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \ldots, 7$.

6. а) На двух клетках шахматной доски стоят черный и белый короли. За один ход можно пойти любым королем (короли дружат, так что могут стоять на соседних клетках, но не в одной и той же). Могут ли в результате их передвижений встретиться все возможные варианты расположения этих королей, причем ровно по одному разу?

б) Тот же вопрос, если короли разучились ходить по диагонали.

Зачетные задачи: все.

Подсчеты с подмножествами (9–10)

Д. А. Пермяков

1. Сколькими способами множество из n элементов можно разбить на 2 множества?

2. Сколько различных неупорядоченных пар непересекающихся подмножеств найдется для множества из n элементов?

3. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ не найдется двух подряд идущих чисел?

4. Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ не найдется трех подряд идущих чисел?

5. Рассмотрим всевозможные непустые подмножества множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, не содержащие подряд идущих чисел. Для каждого подмножества вычислим произведение его элементов. Докажите, что сумма квадратов этих произведений равна $(N+1)! - 1$.

6. Из цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$ составлены все четырехзначные числа, не содержащие повторяющихся цифр. Найдите сумму этих чисел.

7. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, не содержащих повторяющихся цифр.

Зачетные задачи: все, кроме любой одной.

Решения

1. Разбиение множества на два подмножества будем считать выбором некоторого подмножества и его дополнения. Выбирая подмножество, мы можем каждый элемент либо взять в него, либо не взять. Значит, всего способов выбрать подмножество равняется 2^n. Но каждое разбиение мы посчитали дважды: первый — выбирая одно подмножество как основное, а второе как дополнение, и второй раз, выбирая второе подмножество как основное, а первое — как дополнение. Следовательно, всего разбиений 2^{n-1}.

2. Посчитаем сначала количество способов выбрать упорядоченную пару непересекающихся подмножеств. Для каждого элемента есть три варианта: он попадает либо в первое подмножество, либо во второе, либо ни в одно из них. Значит, всего упорядоченных пар 3^n. Неупорядоченной паре из двух пустых подмножеств соответствует одна упорядоченная пара из пустых подмножеств. Любой другой неупорядоченной паре соответствует две упорядоченные пары подмножеств. Значит, всего неупорядоченных пар $(3^n + 1)/2$.

3. Пусть A_n — количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел. Количество таких подмножеств, не содержащих число n, равняется A_{n-1}, так как в этом случае подмножества являются также подмножествами в $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Количество таких подмножеств, содержащих число n, равняется A_{n-2}, так как в этом случае подмножества при выкидывании числа n становятся подмножествами в $\{1, 2, \ldots, n-2\}$. Получаем равенство $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Очевидно, $A_1 = 1$ и $A_2 = 1$. Осталось вычислить последовательно A_3, A_4, ..., A_{11}. Получаем $A_{11} = 89$.

Наборы подмножеств (9–10)

Д. А. Пермяков

1. Дядька Черномор каждый вечер назначает на дежурство 9 или 10 из своих 33 богатырей. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что все богатыри выходили на дежурство одинаковое число раз?

2. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тезок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

3. Какое максимальное число попарно пересекающихся подмножеств можно выбрать в множестве из 100 элементов?

4. Дано 2007 множеств, каждое из которых содержит ровно по 40 элементов. Известно, что любые два из этих множеств имеют ровно один общий элемент. Докажите, что существует элемент, принадлежащий каждому из 2007 множеств.

5. В множестве, состоящем из 100 элементов, выбрали несколько различных трехэлементных подмножеств. Докажите, что если выбрано 101 подмножество, то среди них найдутся два, имеющие ровно один общий элемент.

6. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать своего любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым для не более чем k человек. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на не более чем $3k-2$ группы, чтобы в каждой группе любые два человека имели абсолютно разные вкусы.

Зачетные задачи: все, кроме любого одного пункта.

Решения

1. *Ответ*: 7. Пусть $m \geqslant 0$ дней дежурят по 9 богатырей и $n \geqslant 0$ — дней по 10. Тогда число $9m + 10n$ делится на 33. Перебором возможных значений числа n показывается, что уравнение $9m + 10n = 33$ не имеет решений в целых неотрицательных числах. Для уравнения $9m + 10n = 66$ находим решение $m = 4$, $n = 3$. Легко построить пример, когда богатыри действительно могут продежурить за $m + n = 7$ дней ровно по 2 раза. Если же $9m + 10n \geqslant 99$, то $m + n \geqslant 99/10 > 7$. Значит, минимальное число дней равно 7.

3. *Ответ*: 2^{99}. Всего подмножеств 2^{100}. Разобьем все множества на пары: каждому множеству поставим в пару его дополнение. Тогда всего будет 2^{99} пар, и из каждой пары мы можем выбрать не более одного множества. Чтобы найти 2^{99} попарно пересекающихся подмножеств, достаточно взять все подмножества, содержащие некоторый фиксированный элемент.

Формула включения-исключения (9–10)

Д. А. Пермяков

Данный раздел посвящен доказательству и использованию формулы включения-исключения. Эта формула позволяет отвечать на основной вопрос главы «Сколько существует объектов с данными свойствами?» во многих непростых случаях. Перед решением задач этого раздела нужны базовые навыки решения задач комбинаторики. Например, полезно прорешать разделы «Подсчеты числа способов» и «Наборы подмножеств».

Обозначим через C_n^k количество способов выбрать k элементов из некоторых n различных элементов (без учета порядка). Иными словами, это количество k-элементных подмножеств n-элементного множества, или количество слов длины n из букв А и Б, в которых ровно k букв А. Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*. Можно доказать равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, но в задачах этого раздела это не понадобится. В ответах на задачи этого раздела разрешается использовать биномиальные коэффициенты.

1. а) Сколькими способами можно переставить числа от 1 до n, чтобы и 1, и 2 оказались не на своих местах?

б) Сколькими способами можно переставить числа от 1 до n, чтобы ровно одно из чисел 1, 2 и 3 оказалось на своем месте?

в) Сколькими способами можно переставить числа от 1 до n, чтобы каждое из чисел 1, 2 и 3 оказалось не на своем месте?

г) Сколькими способами можно переставить числа от 1 до n, чтобы каждое из чисел 1, 2, 3 и 4 оказалось не на своем месте?

2. а) Найдите сумму всех 6-значных чисел, получаемых при всех перестановках цифр 4, 5, 5, 6, 6, 6.

б) Найдите сумму всех 10-значных чисел, получаемых при всех перестановках цифр 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7.

3. а) Дано множество A и его подмножества A_1, A_2, A_3. Докажите, что количество элементов в A, не принадлежащих ни одному из A_i, равняется $|A|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$. Здесь через $|A_i|$ обозначается количество элементов в A_i.

б) Дано множество A и его подмножества A_1, A_2, A_3, A_4. Обозначим через S_k сумму $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant 4}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|$. Докажите, что количество элементов в A, не принадлежащих ни одному из A_i, равняется $|A|-S_1+S_2-S_3+S_4$.

в) В условиях пункта б) докажите, что количество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A_i, равняется $C_1^1S_1-C_2^1S_2+C_3^1S_3-C_4^1S_4$.

4. а) Тому Сойеру сказали покрасить забор из 8 досок в белый цвет. В силу своей лени, он покрасит не более 3 досок. Сколько у него способов это сделать?

В хорошем настроении он может покрасить даже не более 5 досок. Сколько у него способов?

А за обещанный десерт он может покрасить любое количество досок. Сколько у него способов?

б) Докажите формулу $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$.

5. а) Докажите, что в любом непустом множестве количество подмножеств из четного числа элементов равно количеству подмножеств из нечетного числа элементов. Другими словами, верна формула $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^nC_n^n=0$.

б) Докажите равенство $C_n^kC_k^r=C_n^rC_{n-r}^{k-r}$.

6. Формула включения-исключения. Пусть имеется множество из N элементов и n его подмножеств $A_1,\ldots,A_n$. Обозначим через $N_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ число элементов в множестве $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}$. Пусть

$$S_0=N\quad\text{и}\quad S_k=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}N_{i_1,\ldots,i_k},\quad\text{где } 1\leqslant k\leqslant n.$$

Пусть $N_{(=r)}$ — число элементов, принадлежащих ровно r подмножествам A_i. Докажите, что справедливы следующие формулы:

$$N_{(=0)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kS_k,\qquad N_{(=r)}=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_k^rS_k.$$

Замечание. Если число $N_{i_1,\ldots,i_k}$ зависит только от k и не зависит от набора индексов, то $S_k = C_n^k N_{1,\ldots,k}$.

7. По кругу стоят n различных предметов. Докажите, что число способов выбрать k из них, чтобы никакие два выбранных не стояли рядом, равняется $\dfrac{n}{n-k}C_{n-k}^k$.

8. Используя предыдущую задачу, найдите число способов рассадить n пар враждующих рыцарей за круглый стол с нумерованными местами, чтобы никакие два враждующих рыцаря не сидели рядом.

9. Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

Зачетные задачи: 1 б)–г); 2 б); 3 б), в); 5 б); 6.

Решения

1. а) Всего имеется $n!$ способов переставить наши числа. Вычтем из них $(n-1)!$ способов перестановки, при которых число 1 остается на месте. Вычтем также $(n-1)!$ способов перестановки, при которых число 2 остается на месте. При этом $(n-2)!$ способов перестановки, при которых оба числа 1 и 2 остаются на месте, мы вычли дважды. Значит, число $(n-2)!$ нужно добавить, чтобы в итоге мы эти способы посчитали 1 раз. Получаем ответ: $n! - 2(n-1)! + (n-2)!$.

2. а) Узна́ем, сколько всего чисел мы складываем. Шесть цифр можно расставить в ряд $6! = 720$ способами. Но при этом неотличимы способы, отличающиеся перестановкой шестерок между собой и пятерок между собой. Значит, всего чисел $\dfrac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$. Каждая цифра будет встречаться во всех разрядах равное число раз. Четверка встретится всего 60 раз, значит в каждом разряде по 10 раз. Пятерка всего 120 раз, значит в каждом разряде по 20 раз. Шестерка всего 180 раз, значит в каждом разряде по 30 раз. Сумма цифр в каждом разряде равна $4\cdot 10 + 5\cdot 20 + 6\cdot 30 = 320$. Значит, сумма всех чисел равна $320 + 320\cdot 10 + 320\cdot 100 + 320\cdot 1000 + 320\cdot 10000 + 320\cdot 100000 = 320\cdot 111111$.

4. а) Если Том красит не более трех досок, то он может покрасить 0, 1, 2 или 3 доски. Он может это сделать

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 = 93$$

способами. Аналогично не более 5 досок можно покрасить

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 = 219$$

способами, а произвольное число досок

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 = 256$$

способами.

Можно решить задачу проще. Каждую из 8 досок Том либо красит, либо нет. Значит, у него всего 2^8 способов.

б) Посчитаем количество подмножеств n-элементного множества. В нем i-элементных подмножеств ровно C_n^i, значит, всего подмножеств $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$. С другой стороны, выбирая подмножество, мы можем каждый элемент либо взять в подмножество, либо не взять. Значит, всего подмножеств 2^n, откуда получаем требуемое равенство.

5. а) Выделим в множестве какой-нибудь элемент. Каждому подмножеству, содержащему выделенный элемент, поставим в пару подмножество, отличающееся от исходного удалением выделенного элемента. При этом все подмножества разобьются на пары, причем в каждой паре одно четное подмножество, а другое нечетное.

Комбинаторика классов эквивалентности [1] (9–11)

А. Б. Скопенков

1. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в красный и серый цвета? Раскраски, совмещающиеся в (трехмерном) пространстве, считаются одинаковыми.

2. Найдите число раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов (т.е. количество раскрасок вершин правильного n-угольника в a цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы) для

а) $n = 5$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

3*. Найдите число замкнутых ориентированных связных ломаных с вершинами в вершинах данного правильного p-угольника (где p — простое). Ломаные, совмещающиеся поворотом, неотличимы.

Решение задачи 2 в). Простой способ решения обычно придумывается и разбирается на занятиях. Аналогично этому способу можно решить задачу 2 для произвольного n, однако решение будет громоздким. Приведем более сложный для простых n, зато более простой для «очень непростых» n способ на примере решения задачи 2 в).

[1] Это обновленная версия части статьи *Скопенков А.* Олимпиады и математика // Матем. просвещение. 2006. № 10. С. 57–63.

Всего имеется a^6 раскрасок поезда из 6 вагончиков. Посчитаем двумя способами число P пар (α, s), в которых $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и α — раскраска поезда, переходящая в себя при циклическом сдвиге на s вагончиков.

Циклический сдвиг на s переводит в себя ровно $a^{(s,6)}$ раскрасок поезда, поэтому $P = a^6 + a + a^2 + a^3 + a^2 + a$.

С другой стороны, обозначим через X искомое число раскрасок, а через $d(\alpha)$ наименьшую положительную величину циклического сдвига, при котором раскраска α поезда переходит в себя. Тогда число тех $s \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для которых циклический сдвиг на s вагончиков переводит раскраску α поезда в себя, равно $6/d(\alpha)$. Поэтому

$$P = \sum_{\text{поездам } \alpha} 6/d(\alpha) = \sum_{\text{каруселям } \beta} d(\beta) \cdot 6/d(\beta) = 6X.$$

Здесь второе равенство выполнено, поскольку

— для раскрасок α_1 и α_2 поезда, переводящихся друг в друга циклическими сдвигами, $d(\alpha_1) = d(\alpha_2)$ (эти равные числа обозначаются $d(\beta)$, где β — соответствующая раскраска карусели);

— количество раскрасок поезда, получающихся циклическими сдвигами из данной раскраски α поезда (т.е. дающих ту же раскраску карусели), равно $d(\alpha)$.

Итак, $X = \dfrac{1}{6}(a^6 + 2a + 2a^2 + a^3)$.

4. Найдите число

а) раскрасок карусели из n вагончиков в a цветов;

б) a-цветных ожерелий из n бус.

5. Сколькими способами можно раскрасить в a цветов грани

а) правильного тетраэдра; б) куба?

Раскраски, совмещающиеся в (трехмерном) пространстве, считаются одинаковыми.

6. а) Сколько существует различных (т. е. неизоморфных) неориентированных графов с 4 вершинами?

б) А с 5 вершинами?

в), г) То же для ориентированных графов.

7*. Отображения $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ (т.е. функции алгебры логики от n переменных) называются *конгруэнтными*, если они становятся равными после переименования переменных.

а) Найдите число b_n функций алгебры логики от n переменных с точностью до конгруэнтности.

б) Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} n!b_n/2^{2^n}$, и найдите этот предел.

8. Сформулируйте общую теорему, которую можно было бы применять вместо повторения приведенного решения задачи 2 в).

Вот ответ.

Лемма Бернсайда. *Пусть заданы конечное множество M и семейство $\{g_1 = id\,M, g_2, \ldots, g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно композиции и взятия обратного элемента, где $id\,M$ — тождественное отображение множества M в себя. Назовем элементы множества M* эквивалентными, *если один можно перевести в другой одним из данных преобразований. Тогда число классов эквивалентности равно $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} fix(g_i)$, где $fix(g_i)$ — число элементов множества M, которые преобразование g_i переводит в себя.*

(Чтобы сделать этот и следующие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке абстрактной теории групп.)

Назовем (*конечной*) *группой* конечное семейство G преобразований (т. е. перестановок) некоторого конечного множества, замкнутое относительно композиции и взятия обратного элемента (т. е. если $f, g \in G$, то $f^{-1} \in G$ и $f \circ g \in M$). Дальнейшие задачи особенно интересны тем, кто уже решал задачи про перестановки.

9. а) Любая группа содержит тождественное преобразование.

б) Если число n преобразований в группе G простое, то для любого нетождественного преобразования $g{\in}G$ имеем $G{=}\{g, g^2, \ldots, g^n{=}id\,M\}$.

Если в группе G найдется преобразование g, для которого $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = id\,M\}$, то группа G называется *циклической*. Группа G называется *бициклической* (этот термин не общепринят), если для некоторых целых $p > 1$ и $q > 1$ и преобразований $g, h \in G$ выполнено $gh = hg$, $g^p = id\,M$, $h^q = id\,M$ и $G = \{g^k h^l \mid 1 \leqslant k \leqslant p, 1 \leqslant l \leqslant q\}$.

10. Приведите пример бициклической группы из 4 элементов.

11. Любая ли группа из n преобразований является циклической или бициклической для

а) $n = 4$; б) $n = 6$; в) $n = 8$;
г)* $n = 9$; д) $n = 10$; е)* $n = 15$?

12*. Теорема Лагранжа. Если H — подгруппа группы G (т. е. подмножество группы G, также являющееся группой), то количество элементов в G делится на количество элементов в H.

13*. Теоремы Силова. Пусть p — простое, n делится на p^k и не делится на p^{k+1}, а G — группа из n элементов. Докажите, что а) в G имеется подгруппа из p^k элементов;

б) число таких подгрупп сравнимо с 1 по модулю p;

в) для любых двух таких подгрупп H и H' найдется такое преобразование $g \in G$, что $H' = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$;

г) если p и q — простые, $p < q$ и $q-1$ не делится на p, то любая группа из pq преобразований является циклической или бициклической.

Зачетные задачи: 1; 2 а) б); 4 а) б); 5 а) б); 6 а) в); 9 а) б); 11 в).

Задачи на комбинаторные покрытия [2)] (10–11)

А. Я. Канель-Белов

Данная подборка посвящена прежде всего тем ситуациям, когда покрытия используются как метод решения. В большинстве случаев рассматриваются *связи* между объектами и эти связи «покрываются».

2001, 3. 21 девочка и 21 мальчик участвуют в математическом соревновании. Оказалось, что

— каждый участник решил не более 6 задач;

— для каждой пары, состоящей из мальчика и девочки, найдется задача, которую они оба решили.

Докажите, что некоторую задачу решило не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.

2005, 6. На математической олимпиаде участникам было предложено 6 задач. Оказалось, что каждая пара задач была решена более чем 2/5 от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

2002, 6. Пусть $n \geqslant 3$ и $C_1, \ldots, C_n$ — круги единичного радиуса с центрами $O_1, \ldots, O_n$, такие что любая прямая пересекает не более трех из них. Докажите, что

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

2003, 1. Пусть A есть 101-элементное подмножество множества $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Докажите, что для некоторых натуральных $t_1, \ldots$ $\ldots, t_{100} \in S$ следующие множества $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$, $j = 1, \ldots, 100$, попарно не пересекаются.

[2)] Указаны год и номер задачи на Международной математической олимпиаде.

2006, 6. Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам многоугольника P, не меньше удвоенной площади многоугольника P.

Указания

2001, 3. Каждая задача рассматривается как «связь» между мальчиками и девочками. Свяжем с ней пару (a, b), где a — число решивших мальчиков, а b — девочек. Если то, что требуется доказать, не выполнено, то для каждой задачи либо $a \leqslant 2$, либо $b \leqslant 2$. Рассматриваемая задача покрывает ab пар мальчик-девочка (всего пар 21^2). Кроме того, $\sum a_i \leqslant 6 \cdot 21$ и $\sum b_i \leqslant 6 \cdot 21$. Решение задачи завершается подсчетом.

Похожим образом решается задача **2005, 6.**

2002, 6. Рассмотрите *фазовое пространство* прямых. С использованием идеи фазового пространства рекомендуем познакомиться по решению задачи 4.6 (об альпинистах), опубликованном в № 6 «Математического просвещения», 2002 г., с. 150–151, или по книге *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1.1.2, где разбирается задача Н. Н. Константинова о возах.

2003, 1. Последовательность $\{t_j\}$ строится поэтапно, возможность построения осуществляется исходя из соображения покрытия.

2006, 6. Используйте *шевеление покрытия*: при движении одной из вершин с постоянной скоростью все площади меняются линейно [3)].

Оценка Виссера мощности пересечений (10–11)

А. Б. Скопенков

1. В парламенте из R депутатов образовано k комиссий по n человек в каждой. (То есть дано R-элементное множество и k его n-элементных подмножеств.)

а) При $R = 2^a$, $n = 2^{a-1}$, $k = 4$ обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по 2^{a-3} элементам.

б) При $R = 2^a$, $n = 2^{a-1}$, $k = 2^a$ не обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся более чем по 2^{a-2} элементам.

в) При $R = 2^a$, $n = 2^{a-1}$, $k = 2^{a-2}$ обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по 2^{a-2} элементам.

[3)] См. раздел «Треугольники и катастрофы» в этой книге, с. 447.

г) При $R=1600$, $n=80$, $k=60$ не обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по 5 элементам.

д)* При $R=p(s-1)^2$ (p простое), $n=p(s-1)$, $k=p^2+p$ не обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по s элементам.

е) При $R=1600$, $n=80$, $k=40$ обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по 3 элементам.

ж)* При $R=1600$, $n=80$, $k=16000$ обязательно найдутся два подмножества, пересекающиеся хотя бы по 4 элементам.

Указание к е), ж): если не получается, то см. следующую задачу.

2. Дискретный вариант леммы Виссера. В парламенте из R депутатов образовано k комиссий по n человек в каждой. Тогда найдутся две комиссии, имеющие более s общих членов,

а) если $s \leqslant n^2/(2R)$ и $k \geqslant n/s$;

б) если $s \leqslant n^2/(2R)$ и $k \geqslant 2R/n$;

в) если $s \leqslant n^2/(\sqrt{2}R)$ и $k \geqslant 2R^2/n^2$;

г) если $s \leqslant n^2/(\sqrt[N]{2}R)$ и $k \geqslant 2R^N/n^N$ для некоторого N;

д) если $s < n^2/R$ и $k > \dfrac{n-s}{(n^2/R)-s}$ ($\simeq R/n$ при $s \ll n \leqslant R$).

Эту задачу интересно сравнить со следующей теоремой.

Теорема Фрэнкла—Вильсона. В парламенте из R депутатов образовано k комиссий по n человек в каждой. Если $p>2$ простое, $R=4p^\alpha$, $n=R/2$ и $k>2C_{R-1}^{R/4-1}$, то обязательно найдутся две комиссии, имеющие ровно $R/4$ общих членов.

3*. а) Оценка из задачи 2 а) точная (сформулируйте сами, в каком смысле).

б) При каких R, k, n, s в парламенте из R депутатов с k комиссиями по n человек в каждой обязательно найдутся две комиссии, имеющие не менее s общих членов?

Подмножество отрезка $[0,1]$ называется *хорошим*, если оно является объединением конечного числа непересекающихся интервалов. *Мерой* (*длиной*) $|E|$ хорошего множества E называется сумма длин его интервалов.

1. а) Если $E_1, \ldots, E_k$ — непересекающиеся хорошие множества меры $1/k$ каждое и E_0 — хорошее множество меры $1/k$, то $|E_0 \cap E_j| \geqslant 1/k^2$ для некоторого j.

б) Придумайте пример бесконечного семейства хороших множеств меры $1/2$ каждое, чтобы мера пересечения любых двух из них не превосходила бы $1/4$.

в) То же для множеств меры $1/k$ и меры пересечения не более $1/k^2$.

2′. Лемма Виссера. Если $E_1, \ldots, E_k, \ldots \subset [0,1]$ — хорошие множества меры m каждое, то найдутся i, j, для которых

а) $|E_i \cap E_j| \geqslant m^2/2$;

б) $|E_i \cap E_j| \geqslant 0{,}99m^2$.

в) То же для хороших (т. е. являющихся объединением конечного количества многоугольников с непересекающимися внутренностями) подмножеств единичного квадрата и их меры (определите сами, что это такое).

Задача 1′ поясняет роль множителей 0,99 и m^2 в лемме Виссера.

4. Теорема Пуанкаре—Каратеодори о возвращении множеств.

а) Пусть $E \subset [0,1]$ — хорошее множество положительной меры и $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — взаимно однозначное отображение, сохраняющее хорошие подмножества и их меры. Тогда существуют сколь угодно большие n, для которых $|E \cap f^n(E)| > 0$.

Здесь через f^n обозначается n-я итерация отображения f:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}.$$

Для доказательства необходимо также f^n с $n < 0$:

$$f^n = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}}_{|n| \text{ раз}}.$$

б) То же для взаимно однозначного отображения f круга единичной площади в себя (например, любого движения этого круга), сохраняющего хорошие подмножества и их меры (определите сами, что это такое).

5. Теорема Хинчина. В условиях теоремы Пуанкаре—Каратеодори

а) существуют сколь угодно большие n, для которых $|E \cap f^n(E)| \geqslant$ $\geqslant 0{,}99|E|^2$.

б) существует такое (большое) L, что для любого целого M число n из пункта а) можно найти среди чисел M, $M+1$, $\ldots$, $M+L$.

Указания и решения

1. г) Разобьем всех парламентариев на $400 = 20 \cdot 20$ четверок. Занумеруем четверки парами (i, j) целых чисел, $1 \leqslant i, j \leqslant 20$. Каждая комиссия будет объединением двадцати четверок. Первая комиссия является объединением четверок $(1, j)$, $1 \leqslant j \leqslant 20$. Вообще, i-я комиссия при $1 \leqslant i \leqslant 20$ является объединением четверок (i, j) по $1 \leqslant j \leqslant 20$. А j-я комиссия при $21 \leqslant j \leqslant 40$ является объединением четверок $(i, j-20)$ по $1 \leqslant i \leqslant 20$. И k-я комиссия при $41 \leqslant k \leqslant 60$ является объединением всех четверок (i, j), в которых $i - j - k$ делится на 20 и $1 \leqslant i, j \leqslant 20$. Тогда любые две комиссии имеют менее 5 (более точно, 0 или 4) общих членов.

д) См. «Квант», 1997, № 2, с. 24, решение задачи М1566 (этот пример принадлежит Н. Б. Васильеву).

е) Если любые две комиссии имеют не более 2 общих членов, то число всех парламентариев не меньше $40 \cdot 80 - (40 \cdot 39/2) \cdot 2 = 40 \cdot 41 > 1600$ (это частный случай формулы включений-исключений). Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

ж) Аналогично задачам 2 г) или 2 д) (см. ниже). Утверждение верно даже для $R = 1600$, $n = 80$, $k = 77$.

2. а) Аналогично задаче 1 е).

б) Аналогично задаче 1 е). Найдите наибольшее значение выражения $2(km-1)/[k(k-1)]$ по k (где $m = n/R$).

в) Примените рассуждение из 2 б) к декартову квадрату парламента (т. е. к множеству упорядоченных пар), в котором образовано k комиссий, являющихся декартовыми квадратами исходных комиссий.

г) То же, что в 2 в), для декартовой N-й степени.

д) См. «Квант», 1997, № 2, с. 24, решение задачи М1566 (это решение придумано участниками Всероссийской олимпиады 1996 года, где эта задача предлагалась девятиклассникам под номером 4).

2′. Аналогично задаче 2.

Г Л А В А 11

МНОГОМЕРНЫЙ КУБ

Пункты данной главы можно изучать независимо друг от друга. Для некоторых задач нужно знакомство с биномиальными коэффициентами.

Комбинаторика N-мерного куба (9–10)

А. Б. Скопенков

0. Расставьте на шахматной доске нескольких коней, чтобы каждый бил четырех других.

1. s) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$;

a) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$;

l) $\left| {n+1 \atop k+1} \right| = \left| {n \atop k+1} \right| + (2^{n-k}-1)\left| {n \atop k} \right|$.

Здесь $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k);

$\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств.

Чтобы определить $\left| {n \atop k} \right|$, рассмотрим 2^n состояний (*узоров*) набора из n упорядоченных лампочек (каждая лампочка может быть включена или выключена). *Выключателем* назовем произвольное подмножество этого набора (неформально говоря, это подмножество состоит из тех лампочек, к которым выключатель подсоединен). *Нажатие* на выключатель преобразует узор, изменяя на противоположное состояние всех лампочек этого выключателя. Семейство узоров *задается* данным набором выключателей, если нажатиями на эти выключатели из узора, в котором ни одна лампочка не светит, можно получить в точности данное семейство узоров. Так вот, $\left| {n \atop k} \right|$ есть количество семейств узоров, каждое из которых можно задать k выключателями и нельзя задать меньшим числом выключателей. (Научно $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$ называется количеством *k-мерных линейных подпространств линейного пространства* $\mathbb{Z}_2^n$.)

$*$) Найдите явную формулу для $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$.

Указание. Пункты l) и $*$) непросты. Если у вас не получается, то оставьте их и возвращайтесь к ним по мере решения следующих.

A. а) Какое наименьшее число партий можно организовать среди n человек, чтобы политические взгляды любых двух были бы различны (т. е. чтобы для любых двух человек нашлась бы партия, в которую один из них входит, а другой нет)? (Один человек может входить в несколько партий.)

б) Тридцать три буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц длины n. При каком наименьшем n кодирование можно выбрать однозначным?

в) Если при получении сообщения возможна ошибка в не более чем одном разряде, т. е. если коды различных букв должны отличаться по крайней мере в трех разрядах, то $n = 8$ разрядов не хватит.

г)* Если возможна ошибка в не более чем двух разрядах, то $n = 10$ разрядов не хватит.

д)* Найдите наименьшее число разрядов, достаточное для кодирования из в).

L. Имеется табло с n горящими лампочками. Каждый выключатель может быть подсоединен к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку выключателя соединенные с ним лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а негорящие загораются. Какое наименьшее число выключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек (не входящие в этот набор лампочки гореть не должны)?

T. а) При фиксированном n число C_n^k максимально при $k = [n/2]$.

б) На математической олимпиаде предлагалось n задач. Выяснилось, что для каждых двух школьников A и B нашлась задача, которую решил A и не решил B, и задача, которую решил B, но не решил A. Какое максимально возможное количество школьников могло быть при этом условии?

На математическом языке эта задача формулируется так: найти максимальное количество элементов в таком семействе подмножеств n-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

в) Какое наименьшее число комитетов можно организовать среди n человек, чтобы для любых двух людей A и B нашелся бы комитет, содержащий A и не содержащий B?

Занумеруем депутатов числами $1, 2, \ldots, n$ и сопоставим каждому комитету множество депутатов, которые в нем участвуют. На математическом языке предыдущая задача формулируется так: какое минимальное количество подмножеств можно выбрать в n-элементном множестве, чтобы для любых его элементов A, B нашлось бы выбранное подмножество, содержащее A и не содержащее B?

г) В n-элементном подмножестве даны подмножества $A_1, \ldots, A_k$, состоящие из $a_1, \ldots, a_k$ элементов соответственно. Если ни одно из них не содержит другое, то $\dfrac{1}{C_n^{a_1}} + \ldots + \dfrac{1}{C_n^{a_k}} \leqslant 1$.

Указания

Введем понятие n-мерного куба, которое, в частности, поможет решить задачу Т. Для каждого подмножества множества $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ нарисуем точку. При этом на k-й *этаж* поместим точки, соответствующие k-элементным множествам. Соединим точки отрезком, если одно множество получается из другого добавлением одного элемента. Тогда соединяемые отрезком точки лежат на соседних этажах. Полученный граф называется *n-мерным кубом.* Происхождение названия: полученная картинка есть изображение вершин куба в n-мерном пространстве с соединенными отрезком соседними вершинами.

Ответ к задаче А а): $\lceil \log_2 n \rceil$, где через $\lceil x \rceil$ обозначается наименьшее целое число, не меньшее числа x.

План решения задачи Т б). Для любого a существует семейство из C_n^a подмножеств, удовлетворяющее этому условию. Далее, $C_n^a \leqslant C_n^{[n/2]}$. Назовем *цепью подмножеств* множества U_n путь «снизу вверх» от $\varnothing$ к U_n на n-мерном кубе, т. е. набор $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где $X_0 = \varnothing$, $X_1 = \{a_1\}$, $X_2 = \{a_1, a_2\}$, $\ldots$, $X_n = \{1, \ldots, n\}$. В любой цепи имеется не более одного множества из нашего семейства подмножеств $X_1, \ldots, X_m$. Через подмножество размера a проходит $a!(n-a)! \leqslant [n/2]! \cdot (n - [n/2])!$ цепей. Всего цепей $n!$. Поэтому размер искомого семейства не может быть больше, чем $\dfrac{n!}{[n/2]!(n-[n/2])!} = C_n^{[n/2]}$.

1*) Если наше линейное пространство имеет размерность n, то выбрать в нем независимое подмножество размера k можно

$$(2^n - 2^0) \cdot (2^n - 2^1) \cdot \ldots \cdot (2^n - 2^{k-1})$$

способами.

Ответ: $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix} = \dfrac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\ldots(2^{n-k+1}-1)}{(2^k-1)(2^{k-1}-1)\ldots(2^1-1)}$.

Структуры на конечном множестве[1] (11)

А. Б. Скопенков

В предыдущей теме рассмотрены некоторые классические и, на первый взгляд, различные комбинаторные задачи. На самом деле они являются частными случаями общей проблемы. Цель предлагаемого цикла задач — рассказать об этой и близких проблемах.

Рассмотрим множество U_n целых чисел от 1 до n. Обозначим через 2^{U_n} множество всех его подмножеств.

Алгеброй на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $\overline{A} := U_n \setminus A$. Например, 2^{U_n} — алгебра на U_n; $\{\varnothing, \{1,2,3\}\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ — алгебры на U_3.

Базисом алгебры называется наименьшее (по включению) ее подсемейство $\{X_1, \ldots, X_k\}$, такое что любой элемент алгебры можно выразить через $X_1 \ldots X_k$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения. Задача А а) предыдущего раздела равносильна нахождению наименьшего числа множеств в базисе алгебры 2^{U_n}.

А. 1) Найдите все алгебры на U_1, U_2 и U_3.

2) *Разбиением* множества U_n называется неупорядоченный набор $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ подмножеств $X_i \subset U_n$, для которого $U_n = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \ldots \cup X_k$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$. Установите взаимно однозначное соответствие между алгебрами на U_n и разбиениями множества U_n.

3) Количество элементов произвольной алгебры есть степень двойки 2^k.

4) Размеры разных базисов одной алгебры могут быть различны.

Линейным пространством на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое вместе с любыми подмножествами A и B содержит также их симметрическую разность $A \oplus B$. Например, любая алгебра является линейным пространством; $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{1,2\}\}$, $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ и $\{\varnothing, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}\}$ — линейные пространства на U_3. Определение *базиса* линейного пространства и его связь с задачей L из предыдущего раздела аналогичны случаю алгебр.

L. 1) Любое линейное пространство содержит $\varnothing$.

2) Найдите все линейные пространства на U_1, U_2 и U_3.

3) В линейном пространстве не может быть ровно 3 элемента.

[1] Благодарю Никокошева Илью за полезные обсуждения.

4) Количество элементов произвольного линейного пространства есть степень двойки 2^k. Число k есть размер любого его базиса. Оно называется *размерностью* линейного пространства. В частности, размеры любых двух базисов данного линейного пространства одинаковы.

Топологией на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое содержит $\varnothing$, U_n и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$, $A \cup B$. Например, любая алгебра является топологией; $\{\varnothing, \{1\}, \{1,2,3\}\}$ и $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\{1,2,3\}\}$ — топологии на U_3. Определение *базиса* топологии и его связь с задачей Т в) из предыдущего раздела аналогичны случаю алгебр.

Т. 1) Найдите все топологии на U_1, U_2 и U_3. Убедитесь, что существует топология, число элементов которой не является степенью двойки.

2) Любая ли топология является линейным пространством? Можно ли симметрическую разность выразить через пересечение и объединение?

Задача 1*. a) Найдите рекуррентную формулу для числа $N_A(n)$ всех алгебр (*числа Белла*).

l) Для числа $N_L(n)$ линейных пространств докажите $N_L(2n) \sim \sim C \cdot 2^{n^2}$.

t) Найдите количество топологий на n-элементном множестве (нерешенная задача).

2. *Цепью топологий* называется такая последовательность топологий

$$\{\varnothing, U_n\} = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \ldots \subsetneq A_k = 2^{U_n},$$

между любыми двумя соседними членами которой нельзя вставить еще одну топологию (т. е. для любого i не существует топологии B, для которой $A_i \subsetneq B \subsetneq A_{i+1}$). Аналогично определяются *цепи* алгебр и линейных пространств.

1) Все цепи алгебр (линейных пространств) имеют одинаковую длину (какую?).

2) Приведите пример цепей топологий различной длины.

3)*, 4) Найдите наибольшую длину $D_T^+(n)$ и наименьшую длину $D_T^-(n)$ цепей топологий.

3. l) *Шириной* $W_L(n)$ (семейства всех линейных пространств на U_n) называется максимальное количество элементов линейных пространств, ни одно из которых не содержится (собственно) в другом. Найдите $W_L(n)$.

l′)* $W_L(2n) \sim C_1 \cdot 2^{n^2}$.

a) Найдите $W_A(n)$.

t)* Найдите $W_T(n)$ (нерешенная задача).

4. *Базой* на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое содержит U_n и вместе с любыми подмножествами A и B содержит также $A \cap B$. Примеры баз: любая топология; $\{\{1,2\},\{2,3\},\{2\},U_4\}$ — база на U_4.

5. *Структурой* на множестве U_n называется семейство его подмножеств, которое замкнуто относительно некоторого заданного набора операций. Например, если заданный набор операций пуст, то решетка структур совпадает с 2^n-мерным кубом. Определение *базиса* структуры и ее других характеристик аналогичны случаю алгебр.

Решите для других типов структур аналоги приведенных выше задач. Полный список различных типов структур называется *решеткой Поста*.

Указания

A. 2) Разбиению $U_n = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ поставьте в соответствие семейство всех множеств, полученных объединением некоторых из $X_1, \ldots, X_k$.

3) Следует из задачи A 2).

4) Рассмотрите алгебру 2^{U_4} и два базиса, один — из множеств $\{1,2\}$ и $\{1,3\}$, другой — из множеств $\{1\},\{2\},\{3\}$.

L. 4) Докажите существование какого-либо базиса.

Введем определения, которые пояснят связь между различными разделами задач 2, 3, 4 и 5, а также помогут решить их.

Нарисуем все алгебры (на U_n — эти слова мы дальше опускаем). Проведем стрелку от алгебры A к алгебре B, если $A \subsetneq B$ и между ними нельзя вставить никакую другую алгебру. Полученный граф называют *решеткой алгебр*.

Разбиение $H = H_0 \sqcup H_1 \sqcup \ldots \sqcup H_m$ множества всех алгебр называется *разбиением на этажи*, если для любых двух соединенных стрелкой алгебр $A \subset B$ номер этажа алгебры A на единицу меньше номера этажа алгебры B.

Ясно, что решетка алгебр допускает разбиение на этажи. (Какие алгебры находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводятся понятия *решетки линейных пространств* и ее *разбиения на этажи*. Ясно, что решетка линейных пространств допускает разбиение на этажи. (Какие линейные пространства находятся на k-м этаже?)

Аналогично случаю алгебр вводится понятие *решетки топологий*. Можно определить также понятие ее *разбиения на этажи*. Но оказывается, что решетка топологий не допускает разбиения на этажи.

Ответы: $D_A(n) = D_L(n) = n + 1$, $D^+_T(n) = 2n + 2$, $D_B(n) = 2^n + 1$.

Теорема Поста о выразимости для функций алгебры логики (10–11)

А. И. Засорин, А. Б. Скопенков

В этом разделе латинскими буквами обозначаются элементы множества $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Введем обозначения:

$$\overline{a} = \begin{cases} 1, & \text{при } a = 0, \\ 0, & \text{при } a = 1 \end{cases} \qquad \text{(логическое «не»);}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1, & \text{при } a = 1 \text{ или } b = 1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{(логическое «или»);}$$

$$a \,\&\, b = \begin{cases} 1, & \text{при } a = 1 \text{ и } b = 1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{(логическое «и»);}$$

$$a \oplus b = \begin{cases} 1, & \text{при } a = b, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad \text{(сумма по модулю 2, или XOR).}$$

1. а) $\overline{a \vee b} = \overline{a} \& \overline{b}$, б) $(a \vee b) \,\&\, c = (a \& c) \vee (b \,\&\, c)$.

2. Выразите

а) $x \,\&\, y$ через $\overline{x}$ и $\vee$; б) $x \oplus y$ через $\overline{x}$, & и $\vee$.

Если неясно, что значит «выразить», то см. ниже определение суперпозиции. В процессе выражения одних функций через другие в функцию можно подставлять вместо некоторых переменных одну и ту же (т. е. отождествлять переменные).

Условимся не писать &, например, записывать $(x \,\&\, y \,\&\, z) \vee (\overline{a} \,\&\, b)$ как $xyz \vee \overline{a}b$.

3. Докажите, что через $\overline{x}$ и & можно выразить:

а) $x \vee y$;

б) $x \oplus y$;

в) $x|y$, где $1|1 := 0$ и $x|y := 1$, если хотя бы одно из x, y равно нулю;

г) $x \uparrow y$, где $0 \uparrow 0 := 1$ и $x \uparrow y := 0$, если хотя бы одно из x, y равно единице;

д) $x \leqslant y$, где $(x \leqslant y) := 1$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$;

е) каждую функцию $f : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ двух переменных.

4. Выразите через &, $\vee$ и $\overline{x}$ функцию трех переменных $f\colon \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2$, которая

а) равна 1 на наборе $(0,1,0)$ и равна 0 на остальных наборах;

б) равна 1 на наборах $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ и равна 0 на остальных наборах;

в) произвольна.

5. Докажите, что каждую функцию $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ можно выразить через

а) &, $\vee$ и $\overline{x}$; б) & и $\overline{x}$; в) &, $\oplus$ и 1, где $1(x) := 1$; г) $|$.

6. Докажите, что всякая функция $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ *единственным* образом представляется *полиномом Жегалкина*—суммой по модулю два *мономов*, т. е. неповторяющихся произведений переменных, причем в каждом мономе все переменные различны. При этом 1 считается мономом, в котором нет множителей. Константу 0 по определению выражает пустой полином Жегалкина.

7. Можно ли выразить каждую функцию $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ через

а) $\oplus$ и 1;

б) $\vee$ и &;

в) $\vee$, &, 0 и 1;

г) $\oplus$ и &;

д) $f(x,y) = x \oplus y \oplus 1$ и $\vee$;

е) $g(x,y,z) = xy \vee xz \vee yz$ и $\overline{x}$?

Пусть дано некоторое множество функций $F = \{f_\alpha(x_1,\ldots,x_{n_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ (не обязательно конечное). Определим понятие *суперпозиции* функций из F (или *формулы* над F) индуктивно.

1) Сами функции f_i и все переменные x_j являются суперпозициями функций из F.

2) Если функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g_1(\ldots)$, $\ldots$, $g_n(\ldots)$ являются суперпозициями функций из F (не обязательно различными), то и функция $f(g_1(\ldots),\ldots,g_n(\ldots))$ является суперпозицией функций из F.

Суперпозицию можно также определить графически, на языке схем.

8. Если брать только $f \in F$ (а не произвольную суперпозицию f функций из F), то получится эквивалентное определение.

9. Отображения (функции) называются *равными*, если их значения совпадают при всех значениях переменных. Примеры равных отображений см. в задаче 1.

а) Сколько различных отображений $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$?

Переменная x_1 называется *несущественной* для отображения $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$, если для любых $x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{Z}_2$ выполнено $f(0,x_2,\ldots,x_n) =$

$= f(1, x_2, \ldots, x_n)$. Аналогично определяется несущественность переменной x_i, $i = 2, \ldots, n$. Отображения $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ называются *эквивалентными*, если они становятся равными после переименования переменных, добавления и изъятия несущественных переменных. Классы эквивалентности называются *функциями алгебры логики*. Далее *функциями* называются не функции-отображения, а функции алгебры логики.

б) Сколько существует различных функций, имеющих не более двух существенных переменных?

в) Придумайте функцию трех переменных, существенно зависящую от каждой переменной.

г)* То же, что в б), но для трех переменных.

10. Назовем функцию f *линейной*, если при некоторых $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$ и подмножестве $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$ для любого $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} + \ldots + x_{i_s} + \varepsilon$ (т. е. если ее полином Жегалкина не содержит мономов степени больше 1).

Точнее, в приведенном определении f — не функция алгебры логики, а отображение $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$. Функция алгебры логики называется *линейной*, если некоторое (или, эквивалентно, любое) представляющее ее отображение $f\colon \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ линейно. Далее такие тонкости будем опускать (но не советуем вам опускать их в своих олимпиадных или научных работах!).

а) Если все функции набора линейные, то через них нельзя выразить ни одну нелинейную функцию.

б) Через функции задачи 7а) можно выразить все линейные функции.

в) Не существует одной линейной функции, через которую можно выразить все линейные функции.

11. Назовем функцию f *монотонной*, если для любых двух наборов $(x_1, \ldots, x_n) \geqslant (y_1, \ldots, y_n)$ выполняется $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant f(y_1, \ldots, y_n)$. При этом $(x_1, \ldots, x_n) \geqslant (y_1, \ldots, y_n)$, если это выполнено покомпонентно, то есть $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$, $\ldots$, $x_n \geqslant y_n$.

а), б) Решите аналоги задач 10 а), б) для монотонных функций (7 в) вместо 7 а)).

в) Не существует трех монотонных функций, через которые можно выразить все монотонные функции.

12. Функция f называется *сохраняющей* 0, если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

а)–в) Решите аналоги задач 10 а)–в) для функций, сохраняющих 0 (7 г) вместо 7 а)).

13. Аналогично определим функции, *сохраняющие* 1.

а)–в) Решите аналоги задач 10 а)–в) для функций, сохраняющих 0 (7 д) вместо 7 а)).

14. Назовем функцию f *самодвойственной*, если $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

а), б) Решите аналоги задач 10 а), б) для функций, сохраняющих 0 (7 е) вместо 7 а)).

в) Существует одна самодвойственная функция, через которую можно выразить все самодвойственные функции.

15. а) Пусть f — несамодвойственная функция. Докажите, что через f и $\overline{x}$ можно выразить константы 0 и 1.

б) Пусть f — немонотонная функция. Докажите, что через f и константы 0, 1 можно выразить функцию $\overline{x}$.

в) Пусть f — нелинейная функция. Докажите, что через f, $\overline{x}$, 1 и 0 можно выразить &.

г) **Критерий полноты — теорема Поста**. Через функции данного множества функций можно выразить любую функцию тогда и только тогда, когда в этом множестве найдутся функции (не обязательно различные) каждого из пяти предполных классов.

Предполным классом (= *множеством*) называется каждое из пяти перечисленных выше множеств функций (линейные, монотонные, сохраняющие 1, сохраняющие 0 и самодвойственные).

16. а) В каждом из пяти предполных классов есть функции, не принадлежащие к другим классам, т. е. для любых двух различных предполных классов A и B есть такая функция f, что $f \in A$ и $f \notin B$.

б) Множество функций называется *полным*, если через функции этого множества можно выразить любую функцию. Докажите, что при добавлении к каждому из пяти предполных классов любой новой функции получается полное множество.

17*. Придумайте бесконечное число различных классов функций, замкнутых относительно суперпозиции[2)].

Зачетные задачи: 2 а), б); 3 а), б); 4 в); 5 а)–г); 7 а)–е); 10 а), б); 11 а), б); 12 а), б); 14 а), б); 15 а)–г); 16 а), б).

Указания

7. *Ответ*: нет (во всех пунктах).
Указание:
б), г), е) $f(x) = 1$ выразить нельзя;
б), д), е) $f(x) = 0$ выразить нельзя;
в) $f(x) = \overline{x}$ выразить нельзя.

[2)] На занятии была показана *решетка Поста*, состоящая из всех классов функций, замкнутых относительно суперпозиции.

Рассмотрите выражение указанной выше функции через данные. Все переменные в нем можно считать совпадающими.

9. *Ответ*: а) 2^{2^n}; б) 12; в) xyz.

Геометрия N-мерного куба (10–11)

Ю. М. Бурман

Хорошо известно, что точке плоскости можно сопоставить пару чисел — ее декартовых координат (для этого нужно предварительно выбрать систему координат, т. е. начало координат и оси). Тем самым плоскость можно понимать просто как множество всевозможных пар (x_1, x_2) действительных чисел. Аналогично трехмерное пространство можно считать просто множеством всевозможных троек (x_1, x_2, x_3). Накладывая на числа различные ограничения, мы получим описание разнообразных подмножеств плоскости и пространства (плоских фигур и трехмерных тел).

Контрольный вопрос

Даны три набора условий на числа x_1, x_2, x_3:
а) $x_1 = x_2 = 2x_3$;
б) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, $3x_1 + 2x_2 + x_1 = 1$;
в) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_3 = -1$.
Какие из них задают прямую в трехмерном пространстве?

Когда измерений больше, чем три, координатный подход становится ведущим: удобно *определить*, скажем, четырехмерное пространство как множество всевозможных наборов (x_1, x_2, x_3, x_4) из четырех действительных чисел.

Отрезком мы назовем множество $[-1, 1] = \{x\colon |x| \leqslant 1\}$ чисел, по модулю не превосходящих 1. *Квадратом* — множество $[-1, 1]^2 = \{(x_1, x_2)\colon |x_1|, |x_2| \leqslant 1\}$ пар чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1. *Кубом* — множество

$$[-1, 1]^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\colon |x_1|, |x_2|, |x_3| \leqslant 1\}$$

троек таких чисел, четырехмерным кубом — четверок, и т. д. См. рис. 1.

1. а) Расставьте на рисунке координаты вершин.
б) Сколько вершин у n-мерного куба?
в) Какие вершины n-мерного куба соединены между собой ребром, а какие нет?

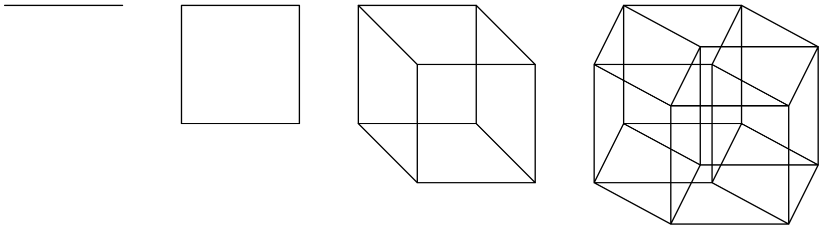


Рис. 1. Кубы размерностей 1, 2, 3, 4

2. а) Сколько ребер у n-мерного куба?
б) Двумерных граней?
в) k-мерных граней, где k — произвольное число от 0 до n?
г) Всего граней, всевозможных размерностей?

Точка на прямой задается условием (уравнением) вида $x = p$. Прямая на плоскости задается уравнением вида $a_1x_1 + a_2x_2 = p$, где a_1 и a_2 не равны нулю одновременно. Плоскость в пространстве задается уравнением вида $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p$, где среди чисел a_1, a_2, a_3 есть хотя бы одно ненулевое. Аналогичное уравнение от 4 переменных задает трехмерное подпространство в четырехмерном пространстве, и т. д.; в общем случае (в n-мерном пространстве) такой объект называется *гиперплоскостью.* Нас будут интересовать гиперплоскости, заданные уравнениями $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, и т. д.

Ортантом называется часть плоскости (в этом случае еще говорят «квадрант»), трехмерного пространства («октант»), четырехмерного пространства, и т. д., в котором все координаты имеют фиксированные знаки. Например, на прямой имеется два ортанта — луч $\{x \mid x > 0\}$ и луч $\{x \mid x < 0\}$, на плоскости — 4 квадранта, и т. д.; всего в n-мерном пространстве, очевидно, 2^n ортантов.

Контрольный вопрос

Сколько ортантов пересекаются с гиперплоскостью, заданной уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$?
а) Все;
б) все, кроме двух;
в) ровно половина.

Пересечение прямой $x_1 + x_2 = 0$ и квадрата — отрезок, соединяющий две вершины (диагональ). Пересечение плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и куба — многоугольник.

3. Какой именно? Нарисуйте этот многоугольник и перечислите координаты его вершин.

Следует ожидать, что пересечение четырехмерного куба $[-1,1]^4$ и трехмерной гиперплоскости $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ — трехмерный многогранник; обозначим его Q_3.

4. а) Перечислите все вершины многогранника Q_3.

б) Перечислите все ребра. Какие вершины соединены ребром, а какие нет? Нарисуйте «каркас» многогранника Q_3, состоящий из вершин и ребер.

в) Перечислите все грани многогранника Q_3. Сколько вершин в каждой грани и какие именно вершины принадлежат одной грани? Нарисуйте многогранник Q_3.

Флагом в многограннике называется набор из вершины v («гво́здик»), ребра e («древко») и грани f («полотнище») таких, что v — один из концов e, а e — одна из сторон f. Многогранник Q называется *правильным*, если для любых двух его флагов (v_1,e_1,f_1) и (v_2,e_2,f_2) существует движение пространства, переводящее Q в себя и при этом переводящее $v_1\mapsto v_2$, $e_1\mapsto e_2$, $f_1\mapsto f_2$.

5. Докажите, что для любых двух вершин v_1,v_2 многогранника Q_3 существует движение четырехмерного пространства, переводящее Q_3 в себя и v_1 в v_2.

6. а) Пусть e_1,e_2 — два ребра многогранника Q_3, имеющие общую вершину $v=(1,1,-1,-1)$. Докажите, что существует движение четырехмерного пространства, переводящее Q_3 в себя, вершину v в себя, а ребро e_1 в e_2.

б) Пусть f_1,f_2 — две грани многогранника Q_3, имеющие общее ребро $e=\{(-t,1,t,-1)\mid -1\leqslant t\leqslant 1\}$. Докажите, что существует движение четырехмерного пространства, переводящее Q_3 в себя, ребро e и вершину v (из пункта а)) в себя, а грань f_1 в f_2.

7. Выведите из задач 5 и 6, что многогранник Q_3 — правильный.

8. Проверьте изученный метод на простом примере: докажите, действуя как в задачах 5, 6 и 7, что многоугольник из задачи 3 — правильный.

9. Какие правильные многогранники могут получаться при пересечении четырехмерного куба трехмерной гиперплоскостью?

10*. Примените изученный метод к более сложному примеру: рассмотрите четырехмерный многогранник Q_4, полученный пересечением пятимерного куба $[-1,1]^5$ и гиперплоскости $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$. Сколько у него вершин? ребер? двумерных граней? трехмерных граней? Является ли Q_4 правильным?

11. Докажите, что любое n-мерное сечение $(n+1)$-мерного куба, перпендикулярное диагонали и проходящее через вершину, комбинаторно эквивалентно «зоне» в n-мерном кубе между двумя аналогичными сечениями. Точнее, пусть

$$L_n(a, b) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in [0, 1],\ a \leqslant x_1 + \ldots + x_n \leqslant b\}.$$

Докажите, что $L_{n+1}(k, k)$ комбинаторно эквивалентно $L_n(k-1, k)$. Другими словами, между этими n-мерными многогранниками имеется взаимно однозначное соответствие, при котором вершинам, ребрам и вообще граням всех размерностей одного многогранника отвечают вершины, ребра и грани соответствующих размерностей другого многогранника. Начните со случая $n = 3$, $k = 2$.

Зачетные задачи: 3, 4, 6, 7, 8.

Решения

1. *Ответ.* а) Частичный ответ см. на рис. 2.

б) Вершины куба имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, где сочетание знаков произвольно. На каждом месте в строке координат может стоять 2 числа (1 и -1). Всего чисел в строке n. Поэтому общее количество вершин равно $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

в) Вершины соединены между собой ребром, если соответствующие наборы координат отличаются ровно в одной позиции.

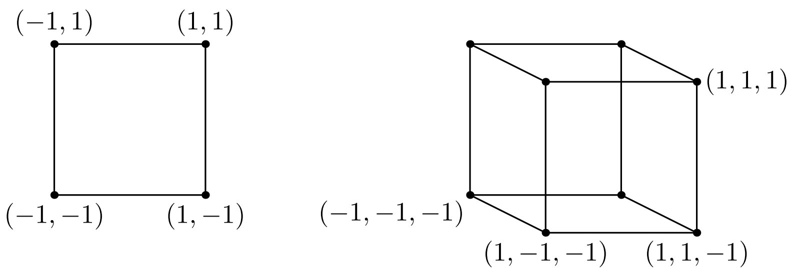


Рис. 2

2. а) Ребро n-мерного куба — это множество наборов из n чисел, в котором на всех местах, кроме одного (скажем, i-го), стоят числа ± 1 (одни и те же для всего ребра), а на i-м месте — произвольное число от -1 до $+1$. Поэтому чтобы задать ребро, нужно, во-первых, зафиксировать число i, а во-вторых — указать, какие именно числа (1 или -1)

стоят на оставшихся $n-1$ местах. Первый выбор можно сделать n способами, второй — 2^{n-1} способами. Поэтому общее число ребер куба равно $n2^{n-1}$.

б) Двумерная грань — это множество наборов из n чисел, где на двух местах стоят произвольные числа от -1 до 1, а на остальных местах — числа ± 1 (одни и те же для всей грани). Поэтому чтобы задать двумерную грань, нужно выбрать 2 свободные позиции; это можно сделать $C_n^2 = n(n-1)/2$ способами — и указать, какие именно числа стоят на оставшихся позициях; здесь количество способов равно 2^{n-2}. Поэтому общее количество двумерных граней равно $2^{n-2}C_n^2$.

в) Аналогично общее количество k-мерных граней равно $2^{n-k}C_n^k$.

г) Грань произвольной размерности описывается так: это множество наборов из n чисел, в которых на некоторых местах стоят фиксированные (для данной грани) числа ± 1, а на некоторых — произвольные числа от -1 до 1 (количество мест, на которых стоят произвольные числа, равно размерности грани). Таким образом, на каждом из n мест может стоять одно из трех: либо 1, либо -1, либо произвольное число. Тем самым общее количество всевозможных граней равно $3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^n$. Одна из этих граней имеет размерность n (все числа произвольные) — это сам куб.

5. Для решения этой задачи не обязательно знать *все* движения четырехмерного пространства — нужно лишь иметь достаточный запас. Например, для всякой перестановки i_1, i_2, i_3, i_4 чисел 1, 2, 3, 4 существует такое движение — перестановка координат: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto$ $\mapsto (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$. Оно, очевидно, сохраняет (переводит в себя) куб $[-1, 1]^4$ и гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (напомним, что слово «перестановка» означает, что среди i_1, i_2, i_3, i_4 каждое число 1, 2, 3, 4 встречается ровно один раз). Следовательно, это движение сохраняет и пересечение Q_3 куба с гиперплоскостью. Если вы решили задачу 5, то легко увидите, что перестановками координат можно перевести любую вершину многогранника Q_3 в любую другую.

Кстати (это пригодится в других задачах), имеется еще одно движение, переводящее Q_3 в себя — смена знака всех координат: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$.

Г Л А В А 12

МИНИКУРС ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Простейшие понятия теории графов (7–8)

А. Б. Скопенков

Данный раздел посвящен базовым определениям и понятиям теории графов. Он не потребует никаких знаний и подходит для первого знакомства с этой теорией.

1. а) Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспосадочными) авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?

б) Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 15 бывших республик СССР заключила договор ровно с 3 другими. Можно ли ему доверять?

в) Выпуклый многоугольник (отличный от треугольника) разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Обязательно ли найдутся хотя бы два треугольника разбиения, примыкающие к сторонам многоугольника двумя сторонами?

г) Докажите, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

д)* Город N состоит из нескольких площадей (кругов), соединенных непересекающимися дорогами (прямолинейными отрезками). Известно, что существует замкнутый маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз. (Иными словами, в любом нарисованном на плоскости без самопересечений эйлеровом графе существует эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями.)

Графом без петель и кратных ребер называется набор точек, некоторые пары которых соединены линиями, причем одна пара вершин не может быть соединена более чем одной линией. Точки называются *вершинами* графа, а линии — *ребрами*. Линии могут не быть отрезками. Им разрешается пересекаться, но точки пересечения «не считаются», т. е. не являются вершинами.

Распространенным примером графа без петель и кратных ребер является граф знакомств. Вершины этого графа соответствуют людям, и две вершины соединены ребром, если соответствующие два человека знакомы между собой. В задаче 1 а) можно рассмотреть граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — авиалиниям.

Графом с петлями и кратными ребрами, называется набор точек, среди которых некоторые пары (возможно совпадающих) вершин соединены линиями. Ребра, соединяющие вершину саму с собой, называются петлями, а несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин — кратными ребрами. Количества вершин и ребер (с учетом кратности и включая петли) обозначаются V и E соответственно.

Везде в задачах, где не оговорено обратное, графом называется граф без петель и кратных ребер.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер. При этом считается, что петля выходит из вершины дважды.

2. Степени вершин. а) В любом графе найдутся две вершины одинаковой степени.

б) Сумма степеней вершин в любом графе четна и равна $2E$.

в) При каких E и V существует граф с V вершинами и E ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? Такие графы называют *кубичными* или *правильными степени* 3.

Путем в графе называется последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (цикл) называется *несамопересекающимся*, если он проходит по каждой своей вершине только один раз.

Длиной пути (цикла) называется количество ребер, вдоль которых он проходит.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов.

3. Деревья. а) В любом дереве, отличном от точки, найдется вершина степени 1 (даже две).

б) В любом дереве $V - E = 1$.

в) В дереве любые две вершины соединены ровно одним несамопересекающимся путем.

г) В любом связном графе G существует *максимальное дерево*, или *остов*, т. е. дерево, содержащее все вершины графа G. Это дерево может быть не единственно.

Дадим несколько определений, которые будут использоваться далее.

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если любые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета.

Цикл (путь) называется *эйлеровым*, если он проходит через каждое *ребро* графа ровно по одному разу. Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Цикл (путь) называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую *вершину* графа ровно по одному разу. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

Ориентированный граф — граф, каждое ребро которого является стрелкой от одной вершины ребра к другой. Путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет стрелка из предыдущей.

Замечание. Дадим строгое определение графа (хотя при решении задач можно пользоваться нестрогим, данным ранее). *Графом без петель и кратных ребер* называется конечное множество, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Элементы данного множества называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *ребрами*. При данном определении каждое ребро соединяет различные вершины (нет петель), и любые две вершины соединены не более чем одним ребром (нет кратных ребер).

Графом с петлями и кратными ребрами, или просто *графом*, называется конечное множество V, в котором выделены некоторые неупорядоченные пары (возможно совпадающих) элементов, и каждой выделенной паре приписано натуральное число — кратность этой пары.

При работе с графами удобно пользоваться их изображениями. Вершины изображаются точками (например, на плоскости или в пространстве). Каждое ребро, соответствующее паре различных элементов изображается ломаной (или кривой), соединяющей соответствующие точки. Каждое ребро, соответствующее паре (A, A) изображается замкнутой ломаной (или кривой), соединяющей эту вершину A саму с собой. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами. Для простоты будем рассматривать только те рисунки, на которых ребра изображаются ломаными (а не произвольными кривыми). Важно, что граф (в строгом определении) и его изображение — не одно и то же.

Зачетные задачи: все, кроме любых двух пунктов задачи 1.

Пути в графах (8–11)

Д. А. Пермяков

8–9 класс

Для решения задач этого раздела нужно понять, как устроен граф при наложенных на него условиях и, в частности, как устроены пути в этом графе. Вам понадобится только знание основных определений теории графов, которые можно изучить в разделе «Простейшие понятия теории графов».

1. Докажите, что вершины графа можно правильно покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины. Такие графы называются *двудольными*.

2. В графе есть цикл нечетной длины. Докажите, что в нем есть несамопересекающийся цикл нечетной длины.

3. В графе между любыми двумя вершинами существует несамопересекающийся путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует несамопересекающийся путь нечетной длины.

4. В графе есть простой цикл, проходящий через ребра a и b, и есть простой цикл, проходящий через ребра b и c. Докажите, что есть простой цикл, проходящий через ребра a и c.

5. Вершины A и B не связаны ребром. При удалении любой другой вершины найдется путь между A и B. Докажите, что в исходном графе между A и B найдутся два пути, пересекающиеся только по концевым вершинам.

6. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

7. Эйлеровы графы. а) Докажите, что в связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.

б) При каком условии в графе существует эйлеров путь?

в) При каком условии в *ориентированном* графе существует эйлеров цикл?

г) Рассеянный математик забыл трехзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду. Докажите, что математик сможет открыть замок за

1) 29 секунд, если в коде использованы только цифры 1, 3 и 7;
2) 1002 секунды, если в коде использованы все десять цифр.

Зачетные задачи: все, кроме любых 4 пунктов.

9–10 класс

8. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по улицам, по которым он проходил до этого нечетное число раз. Докажите, что он сможет это сделать.

9. В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

10. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k, где $k \geqslant 2$. Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k+1$.

11. Все ребра связного графа раскрашены в 2 цвета. Из каждой вершины выходит поровну ребер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

12. *Диаметр* связного графа — наибольшее из расстояний [1] между его вершинами. Пусть в связном графе диаметра d минимальная длина цикла $2d+1$. Докажите, что степени всех вершин равны.

13. Дан связный граф, который при удалении любого своего ребра остается связным. Двое игроков по очереди ставят стрелки на ребрах. Проигрывает игрок, после хода которого от какой-то вершины нельзя добраться до какой-нибудь другой, двигаясь только по направлению стрелок и по ребрам без стрелок. Докажите, что при правильной игре обоих соперников партия закончится вничью.

Зачетные задачи: все, кроме любой одной.

10–11 класс

Для решения основной задачи этого раздела потребуются некоторые навыки работы с графами. Перед этой серией задач полезно (но не обязательно) прорешать две предыдущие.

[1] *Расстояние* между двумя вершинами — длина кратчайшего пути, соединяющего эти вершины.

Турнир — ориентированный граф, между любыми двумя вершинами которого есть ровно одно ребро.

Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой, двигаясь по направлению стрелок на ребрах.

14 (основная). Какое минимальное количество несамопересекающихся циклов длины k может быть в сильносвязном турнире с n вершинами?

Данная задача является сложной, к ней не так просто подступиться. Обычно при решении сложной задачи бывает полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать эту задачу и высказывать ваши предположения.

14′. а), б), в), г), ... Сформулируйте и докажите какую-нибудь лемму, которая, по вашему мнению, поможет в решении задачи 14.

После того как вы попробовали найти путь к решению самостоятельно, мы предлагаем вам доказать следующие утверждения. Они могут оказаться полезными в решении задачи 14 и, возможно, помогут довести решение до конца.

15. Докажите, что турнир является сильносвязным тогда и только тогда, когда в нем есть несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам графа.

16. Докажите, что в сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся цикл (идущий по направлениям стрелок на ребрах) любой длины от трех до количества вершин турнира.

Решения

2. Рассмотрим любую вершину, по которой цикл проходит хотя бы дважды. Можно рассмотреть две части цикла: между первым и вторым прохождениями этой вершины и оставшуюся. Каждая из этих частей является циклом, и одна из них имеет нечетную длину. Уменьшая так длину нечетного цикла, получим цикл, у которого нет точек самопересечения.

4. Обозначим через C_1 и C_2 вершины ребра c, через T_{ab} — простой цикл, проходящий через ребра a и b, а через T_{bc} — простой цикл, проходящий через ребра b и c. Пойдем из вершины C_1 по циклу T_{bc} не по ребру c. Первое пересечение с циклом T_{ab} обозначим через C_1'. Аналогично найдем вершину C_2'. Искомый цикл будет состоять из части цикла

T_{ab} от C_1' до C_2', содержащей a, пути от C_2' до C_2, ребра c и пути от C_1 до C_1'.

8. Назовем четными те улицы, по которым турист на пути к кафе прошел четное число раз, остальные — нечетными. На пути к кафе турист с вокзала выходил на один раз больше, чем возвращался, значит, по выходящим с вокзала улицам он проходил в сумме нечетное число раз. Следовательно, с вокзала выходит нечетное число нечетных улиц. Аналогично из кафе выходит тоже нечетное число нечетных улиц, а из любой другой площади — четное число нечетных улиц. Пусть турист идет из кафе по нечетным улицам как угодно, но проходя каждую улицу не более одного раза. Когда он входит на площадь, отличную от вокзальной, остается еще нечетное число неиспользованных нечетных улиц, выходящих с этой площади. Значит, он всегда сможет с нее выйти. Поэтому в тот момент, когда туристу будет некуда идти, он уже будет находиться на вокзале.

9. Рассмотрим человека A с максимальным числом знакомых n. Пусть его знакомые — это $B_1, B_2, \ldots, B_n$. У каждой пары B_i и B_j есть общий знакомый A, значит, B_i и B_j не знакомы между собой. У B_1 и B_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ есть общий знакомый C_i, отличный от A. Если C_i и C_j для некоторых $i \neq j$ — один и тот же человек, то у C_i и A есть общие знакомые B_1, B_i и B_j, что невозможно по условию. Значит, у B_1 есть хотя бы n знакомых: $A, C_2, C_3, \ldots, C_n$. В силу максимальности числа n у B_1 ровно n знакомых. Аналогично у всех B_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, ровно по n знакомых, откуда, в свою очередь, у всех знакомых с B_i также по n знакомых. Каждый человек знаком либо с A, либо с кем-нибудь из B_i, значит, у всех в обществе ровно по n знакомых.

Теория Рамсея (8–9)

Д. А. Пермяков

Данный раздел посвящен классической задаче по оценке чисел Рамсея (задачи 8 и 11). Хотя эти оценки известны давно, точные значения известны только для нескольких первых чисел Рамсея. Для изучения этого раздела понадобится только знание определения графа.

1. Докажите, что среди пяти человек может не найтись ни трех попарно знакомых, ни трех попарно незнакомых.

2. Среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

3. Среди любых десяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

4. Среди любых девяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

5. Среди любых 20 человек найдется либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

Обозначим через $r(m, n)$ минимальное такое число, что среди любых $r(m, n)$ человек найдется либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых. Числа $r(m, n)$ называются *числами Рамсея.*

6. а) Найдите $r(3, 3)$. б) Найдите $r(4, 3)$.

7. Докажите, что

$$r(m, n) \leqslant r(m-1, n) + r(m, n-1).$$

8. Докажите, что $r(m, n) \leqslant C^m_{m+n}$.

9. На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

Обозначим через $r(m_1, \ldots, m_k)$ минимальное такое число, что если полный граф с $r(m_1, \ldots, m_k)$ вершинами раскрашен в k цветов, то для некоторого i найдется m_i вершин, попарно соединенных ребрами цвета i.

10. Докажите, что

$$r(m_1, m_2, \ldots, m_k) \leqslant r(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_k) + \\ + r(m_1, m_2 - 1, \ldots, m_k) + \ldots + r(m_1, m_2, \ldots, m_k - 1).$$

11. Найдите оценку на $r(m_1, m_2, ..., m_k)$, аналогичную задаче 8.

Зачетные задачи: 1, 5–10.

Решения

2. Рассмотрим произвольного человека. Пусть у него есть хотя бы 3 знакомых. Если среди них есть пара знакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно знакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно незнакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека среди оставшихся 5 человек нет трех знакомых. Тогда у него найдется 3 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно знакомых.

3. Рассмотрим произвольного человека. У него найдется либо 6 знакомых, либо 4 незнакомых. Пусть найдется 4 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют четверку попарно знакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека найдется 6 знакомых. Согласно задаче 1, среди них найдется либо трое попарно незнакомых, либо трое попарно знакомых, образующих с рассмотренным человеком четверку попарно знакомых.

4. Если у некоторого человека найдется 6 знакомых или 4 незнакомых, то мы найдем нужную группу людей аналогично задаче 2. Единственный плохой случай, когда у всех девяти человек ровно по 5 знакомых. Тогда количество пар знакомых людей равняется $\frac{9 \cdot 5}{2} = 22{,}5$, т. е. не целое число, что невозможно.

Литература

[1] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов // Квант. 1988. № 4.

Раскраски графов (8–10)

Д. А. Пермяков

Данный раздел посвящен исследованию, в какое наименьшее количество цветов можно правильно раскрасить вершины различных графов. Для решения задач этого раздела полезно иметь некоторые навыки работы с графами, например, полезно прорешать задачи раздела «Пути в графах».

8–9 класс

Напомним, что раскраска графа (т. е. раскраска всех вершин графа) называется *правильной*, если любые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разный цвет.

1. а) В графе степени всех вершин не превосходят d. Докажите, что его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

б) В связном графе степени всех вершин не превосходят d и есть вершина степени меньше d. Докажите, что его можно правильно раскрасить в d цветов.

в) В связном графе степени всех вершин не превосходят d и есть вершина, после удаления которой граф перестает быть связным. Докажите, что исходный граф можно правильно раскрасить в d цветов.

2. Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

3. В ориентированном графе из каждой вершины выходит не более d ребер. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в $2d+1$ цвет.

4. В графе максимальный несамопересекающийся путь проходит через l вершин. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в l цветов.

Зачетные задачи: все, кроме любого одного пункта.

9–10 класс

5. В графе максимальный нечетный простой цикл имеет длину l. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в $l+1$ цвет.

6. а) В связном графе степень каждой вершины не превосходит 3. Его можно правильно раскрасить в 3 цвета, чтобы для некоторой вершины среди ее соседей не встречалось хотя бы двух цветов. Добавили одну вершину и выходящие из нее ребра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят 3. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

б) В связном графе степень каждой вершины не превосходит 3. Его можно правильно раскрасить в 3 цвета, но при любой правильной раскраске у каждой вершины найдется соседняя вершина каждого из двух оставшихся цветов. Добавили одну вершину и выходящие из нее ребра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят 3 и полученный граф отличен от полного четырехвершинника (графа с 4 вершинами). Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

в) **Теорема Брукса.** В графе степень каждой вершины не превосходит $d \geqslant 3$ и нет полного подграфа с $d+1$ вершиной. Докажите, что его можно правильно раскрасить в d цветов.

7. Степень любой вершины графа не превосходит d. Натуральные числа $d_1, \ldots, d_k$ таковы, что $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = d + 1 - k$. Докажите, что вершины можно так разбить на k групп, что любая вершина i-й группы соединена не более, чем с d_i вершинами своей группы.

8. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся между собой во внутренних точках. Докажите, что полученный плоский граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

9. Трем смышленым девочкам Ире, Тане и Юле выдали по копии одного и того же графа. Юля и Таня раскрасили свои графы правильно, т. е. так покрасили все вершины, что концы каждого ребра — разного цвета. Юля использовала меньше цветов, чем Таня, зато у Тани в каждый цвет покрашены минимум две вершины. Докажите, что Ира может правильно раскрасить свой граф так, чтобы использовать цветов не больше, чем у Юли, и покрасить в каждый цвет не меньше двух вершин.

Зачетные задачи: все, кроме 5 или 9.

Решения

1. а) Будем красить вершины как попало и в произвольном порядке. На цвет каждой очередной вершины имеется не более d запретов, поэтому мы сможем ее окрасить.

б) Докажем индукцией по количеству вершин. Удалим из графа вершину степени меньше d со всеми выходящими из нее ребрами. Оставшийся граф можно правильно раскрасить по предположению индукции. Вернем удаленную вершину. На ее цвет меньше, чем d запретов, поэтому мы сможем ее окрасить.

2. Все вершины цвета $k-1$, не соединенные ребром с цветом k, перекрасим в цвет k. После этого все вершины цвета $k-2$, которые можно, перекрасим в цвет $k-1$. Аналогично перекрасим вершины цветов $k-3, \ldots, 2, 1$. Согласно условию, в полученной раскраске найдется вершина цвета 1. Мы ее не перекрасили, значит, есть соседняя с ней вершина цвета 2. Мы не перекрасили вершину цвета 2, значит, есть соседняя с ней вершина цвета 3. Аналогично найдутся такие вершины цветов $4, \ldots, k$, что каждая следующая соседствует с предыдущей. Эти вершины имели те же цвета в исходной раскраске графа (до перекрашиваний) в силу правильности исходной раскраски. Значит, мы нашли требуемый путь.

4. Сразу следует из задачи 2.

Подсчеты в графах (9–11)

Д. А. Пермяков

Данный раздел содержит задачи, для решения которых не нужно изучать устройство графа, а нужно посчитать количество некоторых объектов в нем: ребер, треугольников, определенных вершин и т. п. Для решения этих задач потребуется только знание определения графа. Но если задачи вызовут затруднения, можно сначала прорешать раздел «Теория Рамсея», содержащий более простые задачи по близкой теме. Часть задач этого раздела взята из окружных олимпиад разных лет.

1. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

2. На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 9$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце вечеринки?

3. В круговом турнире участвовало 2007 команд и не было ничьих. Найдите максимальное возможное количество троек команд, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, а третья у первой.

4. В каждой из трех школ учится по n человек. Любой ученик имеет в сумме ровно $n+1$ знакомых учеников из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.

5. а) В графе для любых двух смежных вершин есть ровно одна вершина, смежная с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

б) В графе для любых двух смежных вершин есть две вершины, смежные с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

6. В графе 2007 вершин и степень каждой вершины является степенью двойки. Володя посчитал для каждой вершины количество выходящих из нее путей, проходящих по не более чем двум ребрам, а затем просуммировал полученные результаты по всем вершинам. У него получилось 100 000. Докажите, что Володя ошибся.

7. На предприятии трудятся 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по предприятию не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

Зачетные задачи: все пункты, кроме любых двух.

Решения

1. Малообщительных, не являющихся чудаками, будем называть «просто малообщительными», а чудаков, не являющихся малообщительными, — «просто чудаками». Малообщительные чудаки не могут быть знакомы с просто чудаками, значит, просто чудаки знакомы только с просто малообщительными. Каждый просто чудак знаком с хотя бы 10 просто малообщительными, а каждый малообщительный не более чем с 9 просто чудаками.

Пусть между просто чудаками и просто малообщительными всего n знакомств. Тогда просто чудаков не более $\frac{n}{10}$, а просто малообщительных не менее $\frac{n}{9}$. Получаем, что просто чудаков не больше, чем просто малообщительных, а значит, всего чудаков не больше, чем всего малообщительных.

2. Нетрудно проверить, что если все пришедшие, кроме двух человек A и B, были знакомы между собой, то в конце должны остаться все, кроме A и B, т. е. 8 человек. Докажем, что не могло остаться 9 человек. Ясно, что человек A, имевший изначально меньше всего знакомых (k), в некоторый момент уйдет. Если больше никто не ушел, то все остальные (кроме A) имели больше k знакомых до ухода A и меньше $k+1$ после его ухода. Но тогда A должен быть знаком со всеми остальными, т. е. $k=9$, что противоречит строгой минимальности k.

Задачи по комбинаторной теории графов (9–11)

А. Б. Скопенков

Данный раздел посвящен некоторым классическим задачам и теоремам комбинаторной теории графов.

1. Компоненты связности. а) В некотором царстве имеется столица, город Дальний и несколько других городов. Некоторые пары городов соединены дорогами (дороги могут пересекаться). Из столицы выходит 21 дорога, из города Дальнего — 1 дорога, а из остальных городов по 20 дорог. Обязательно ли из столицы можно проехать в Дальний (возможно, с пересадками)?

б) В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрестки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц.

Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрестке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофер губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.

в)* Два альпиниста стоят на уровне моря на противоположных сторонах горного хребта (плоской ломаной с конечным числом звеньев), расположенного целиком над уровнем моря. Докажите, что они смогут встретиться, оставаясь в процессе движения все время на одной высоте над уровнем моря.

2. Теорема Турана. а) Пусть в некоторой компании среди любых трех человек найдутся два друга. Обязательно ли эту компанию можно разбить на две группы так, чтобы любые два человека из одной группы были друзьями?

б) Найдите наибольшее возможное количество ребер в графе с n вершинами, если известно, что среди любых трех его вершин есть две, не соединенные ребром.

в)* То же для «четырех его вершин».

3. а) **Лемма о паросочетаниях.** Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек, причем каждый юноша знаком с некоторым (возможно с нулевым) числом девушек.

Докажите, что всех юношей можно женить на (попарно различных) девушках, если и только если для любого множества наших юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из них, не меньше числа этих юношей.

б) **Теорема Холла.** Пусть X — непустое конечное множество, а $X_1, \ldots, X_n$ — его подмножества.

Докажите, что в каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in X_i$ так, чтобы все x_i были различны, если и только если для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ объединение любых k из этих подмножеств имеет не меньше, чем k элементов.

4. Теорема Уитни. Число $P_G(n)$ правильных раскрасок графа G с V вершинами в n цветов есть многочлен от n степени V.

5. В турнире без ничьих участвовало n команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Докажите, что можно так занумеровать команды числами $1, \ldots, n$, чтобы $(i+1)$-я команда выиграла у i-й (для любого $i = 1, \ldots, n-1$).

6. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, голосует за себя (если он является кандидатом) и за всех тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

7. а) Нарисуйте гамильтоновы циклы в графах правильных многогранников.

б) Никакой граф, гомеоморфный букве θ (т. е. графу $K_{3,2}$), не является гамильтоновым.

в)* Если из любой вершины графа (без петель и кратных ребер) с V вершинами выходит не менее $V/2$ ребер, то этот граф гамильтонов.

Зачетные задачи: 1 а); 2 б); 3 а), б); 4 а), б); 5; 7 а).

Изоморфизмы графов[2] (10–11)

И. Н. Шнурников

1. а) Сколько существует изоморфизмов $K_5 \to K_5$; $K_{3,3} \to K_{3,3}$?

б) Изоморфны ли графы G_2 и G_3, вершины каждого из которых занумерованы числами от 1 до 7, вершины графа G_k соединены ребром, если либо $i - j \equiv 1 \mod 7$, либо $i - j \equiv k \mod 7$.

в) Постройте граф с наименьшим числом n, $n > 1$, вершин, такой что никакая нетождественная перестановка его вершин не является изоморфизмом.

2. Симметричные графы. Мы будем работать со связными ориентированными графами с петлями и кратными ребрами. Пусть из каждой вершины графа выходят два ребра и в каждую входят два ребра. Такой граф назовем *симметричным*, если для любой пары ребер a, b существует перестановка вершин графа (а если есть кратные ребра, то и перестановка их между собой), при которой все ребра графа переходят в ребра этого же графа, а ребро a переходит в ребро b (направления всех ребрах сохраняются). При этом никакое ребро не должно остаться на месте.

а) Для каждого натурального n придумайте два (неизоморфных) симметричных графа с n вершинами каждый.

б) Придумайте симметричные графы с 6, 12 и 30 вершинами (не изоморфные графам из а)).

[2] Определение изоморфизма графов можно посмотреть в начале заметки «Вокруг критерия Куратовского планарности графов», см. с. 315.

в) Найдите все симметричные графы, которые имеют хотя бы одну петлю или хотя бы одно кратное ребро.

г) Найдите все симметричные графы с p-вершинами (p — простое число).

д) Найдите все симметричные графы с не более чем 8 вершинами.

е) Найдите все симметричные графы, которые можно нарисовать (без самопересечений) на плоскости так, что для каждой вершины входящие ребра чередуются с выходящими.

ж)* Найдите все плоские симметричные графы.

3. У Васи есть несвязный граф. Он всеми возможными способами удалил из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовал на отдельном листочке бумаге, после чего все листочки отдал Коле. Докажите, что Коля может восстановить исходный граф.

4*. Нерешенные задачи о вершинной и реберной реконструируемости. а) Пусть G и $\widetilde{G}$ — связные графы с V, $V \geqslant 3$, занумерованными вершинами. Для каждого $k \in \{1, \ldots, V\}$ рассмотрим графы $G - k$ и $\widetilde{G} - k$, полученные из графов G и $\widetilde{G}$ удалением в каждом из них вершины с номером k и всех выходящих из нее ребер. Пусть для всех $k \in \{1, \ldots, V\}$ графы G_k и $\widetilde{G}_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\widetilde{G}$ изоморфны?

б) Пусть G и $\widetilde{G}$ — связные графы с E, $E \geqslant 5$, ребрами. Для каждого $k \in \{1, \ldots, E\}$ рассмотрим графы G_k и $\widetilde{G}_k$, полученные из графов G и $\widetilde{G}$ соответственно путем удаления в каждом из них ребра с номером k. Пусть для всех $k \in \{1, \ldots, E\}$ графы G_k и $\widetilde{G}_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\widetilde{G}$ изоморфны?

Зачетные задачи: 1 а)–в); 2 а)–е); 3.

Задачи по топологической теории графов[3] (9–11)

А. Б. Скопенков, И. Н. Шнурников

1. а) Докажите формулу Эйлера $V - E + F = 2$ для плоского связного графа с ребрами-отрезками (V, E и F — число вершин, ребер и граней соответственно) .

б) Найдите аналог формулы Эйлера для несвязного плоского графа с k компонентами связности.

[3] Используемые здесь определения плоского графа, его грани, гомеоморфизма и изоморфизма графов можно посмотреть в начале заметки «Вокруг критерия Куратовского планарности графов» (см. с. 315).

2. Применения формулы Эйлера. а) Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

б) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединенные точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

в)* Выпуклых правильных многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов).

Указание. Если не получается решить пункты а), б) и в), то решайте следующие пункты.

г) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, $2E \geqslant 3F$ и $E \leqslant 3V - 6$.

д) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

е) В любом выпуклом многограннике есть либо треугольная грань, либо вершина степени 3.

ж) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а в границе каждой грани ровно k ребер, то

$$d \leqslant 5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$

з) В любом планарном графе с хотя бы четырьмя вершинами найдется хотя бы четыре вершины степени не более пяти.

3. Раскраска граней плоского графа в несколько цветов называется *правильной*, если любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.

а) Грани эйлерова плоского графа можно правильно раскрасить в 2 цвета.

б) Грани гамильтонова плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета.

в) Вершины (или грани) любого плоского графа можно правильно раскрасить в 5 цветов.

4. Гомологии и когомологии графов. а) В дереве нет подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины четна.

б) Для данного графа обозначим через a число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины четна. Тогда a — степень двойки. Выразите a через количества V вершин, E ребер и C компонент связности графа.

в) На ребрах дерева стоят знаки «+» и «−». Разрешается менять знаки на всех ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любого узора можно получить любой другой.

г) Пусть b — наибольшее количество узоров из «+» и «−» на ребрах данного графа, ни один из которых нельзя получить из другого описанными выше операциями. Тогда b — степень двойки. Выразите b через V, E и C.

д)* Операция *стягивания ребра* (отличного от петли) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину C, а все ребра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на ребра, выходящие из вершины C в те же вершины. Например, если граф — простой цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится простой цикл с тремя вершинами. Докажите, что a и b инвариантны при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $a = b$.

5. k-связные графы. а) Из любого связного графа можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее ребрами) так, что он останется связным.

б) Для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающихся (нигде, кроме этих вершин) пути по его ребрам из одной вершины в другую.

в) В графе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдется путь между вершинами A и B. Докажите, что в этом графе между вершинами A и B найдутся два пути, не имеющих общих ребер.

г)* **Теорема Менгера.** Граф остается связным после удаления любой $k-1$ вершины тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

6. Изотопии в пространстве. а) Любой узел $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ можно непрерывно и без самопересечений продеформировать в узел, лежащий в «книжке» с тремя листами $T \times I \subset \mathbb{R}^3$.

б) Любой граф (или даже поверхность с краем) $N \subset \mathbb{R}^3$ можно непрерывно и без самопересечений продеформировать в граф, лежащий в «книжке» с тремя листами $T \times I \subset \mathbb{R}^3$.

7. В плоском графе с треугольными гранями выкинули вершину вместе с выходящими из нее ребрами.

а) Верно ли, что получившаяся грань ограничена простым циклом?

б) Верно ли, что если выкинуть еще одну вершину, то все грани опять будут ограничены простыми циклами?

в) Пусть в полученном графе степень каждой вершины не менее 3. Верно ли, что любую вершину нового графа можно удалить и получить граф, все грани которого будут ограничены простыми циклами?

8. а) Дан невыпуклый многоугольник с непрозрачными сторонами. Назовем его *ядром* множество его внутренних точек, из которых видны все вершины многоугольника. Докажите, что если ядро многоугольника непусто, то его можно разрезать прямой на два многоугольника с непустым ядром, чтобы число сторон у новых многоугольников было меньше, чем у исходного.

б) **Теорема Фари.** Плоский граф можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, что все ребра будут отрезками.

в) Любой связный граф с g ребрами можно так нарисовать внутри правильного $2g$-угольника, диаметрально противоположные стороны которого склеены, что некоторые ребра являются отрезками, а остальные ребра являются объединениями двух непересекающихся отрезков, у каждого из которых один конец — вершина графа, а другой конец лежит на стороне $2g$-угольника.

Зачетные задачи: 1 а), б), 2 б), г), д), е), 3 а), б), 4 б), 5 а), 7 а), 8 а).

Указания

2. а) Приведем доказательство непланарности графа K_5, основанное на формуле Эйлера. Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$. Нарисуем около каждого ребра графа K_5, нарисованного на плоскости, стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E = 20$. Но поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то число стрелок не меньше $3F = 21 > 20$. Противоречие. Основываясь на этой идее, можно доказать непланарность графа $K_{3,3}$.

г) Нарисуем около каждого ребра графа стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то $3F \leqslant 2E$. По формуле Эйлера $V - E + F = 2$. Значит, $6 = 3(V - E + F) \leqslant 3V - E$, откуда $E \leqslant 3V - 6$.

д) Если степень каждой вершины не меньше 5, то $2E \geqslant 6V$. А это противоречит предыдущему пункту.

е) Допустим, что в некотором многограннике нет вершины степени 3 и нет треугольной грани. Так как это многогранник, то степень каждой вершины не менее 4. Значит, $2E \geqslant 4V$. Так как нет треугольных граней, то каждая грань содержит не менее чем 4 ребра. Значит, $2E \geqslant 4F$. Следовательно, $2 = V - E + F \leqslant 0$. Противоречие.

Метод минимального контрпримера и спуск в графах (10)

А. Я. Канель-Белов

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего*), который заключается в следующем.

Предположим, что надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще «меньший» контрпример и получают противоречие.

Понятие «меньше» подбирается в процессе доказательства. Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. При этом обычно ведется индукция сперва по числу вершин, потом по числу ребер.

Начнем с простейшего примера.

Доказательство теоремы Эйлера о плоских графах (формулировку см. на с. 305 и 316). Пусть граф G не удовлетворяет условиям теоремы Эйлера. Рассмотрим ребро графа G и пойдем по ребрам. В этом случае мы либо попадем в висячую вершину V, либо пройдем цикл.

В первом случае уничтожим вершину V и входящее в нее ребро l. При этом количества вершин и ребер уменьшатся на 1, а количество граней не изменится.

Во втором случае уничтожим ребро r из цикла. В этом случае количества граней и ребер уменьшатся на 1, а количество вершин не изменится.

В обоих случаях граф остается связным и мы получаем меньший контрпример. $\square$

Более содержательный пример — знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $a \not\prec a$,

2) $a \not\prec b$ либо $b \not\prec a$,

3) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми.* Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми.* *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *антицепью* — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

а) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

б) **Теорема Дилуорса.** Минимальное количество цепей, на которые разбивается частично упорядоченное множество, совпадает с его диаметром.

2. Пусть G — граф, A и B — его вершины, не соединенные ребром.

а) Если есть k путей, соединяющих A и B и не имеющих промежуточных общих вершин, то при удалении любых $k-1$ вершин вершины A и B остаются в одной связной компоненте.

б) **Теорема Менгера.** Если вершины A и B не соединены ребром и при удалении любых $k-1$ вершин вершины A и B остаются в одной связной компоненте, то имеются k путей, соединяющих A и B и не имеющих промежуточных общих вершин.

3. В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа: КСБ и КБС. Докажите, что разность количеств городов разных типов делится на 4. (Задача зонального этапа Всероссийской олимпиады 1994 г.)

4. IMO, 2004, Shortlist. С конечным графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Дан полный граф из n вершин. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции?

5. IMO, 2001, Shortlist. k-клика есть подмножество из k попарно знакомых людей. Известно, что каждые две 3-клики имеют общего члена и нет 5-клик. Докажите, что можно, удалив двух людей, все 3-клики разрушить.

6. IMO, 1992, Longlist. Дан граф G с n вершинами, $m < n$. Докажите, что G содержит подмножество из $m+1$ вершины, степени которых отличаются не больше, чем на $m-1$.

7. Докажите, что каждую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 5 цветов. (См. необходимые определения выше.)

См. также доказательство теоремы Куратовского (см. с. 317).

Указания к задачам

1. а) Ясно, что цепь и антицепь могут пересекаться по не более чем одному элементу. Поэтому количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

б) *Доказательство теоремы Дилуорса.* Рассмотрим минимальный контрпример — множество M. Пусть C — цепь диаметра D. Тогда каждый элемент множества $M \setminus D$ либо больше некоторого элемента из D, либо строго его меньше. Таким образом, $M \setminus D$ есть несвязное объединение двух частей M' (выше D) и M'' (ниже D).

Если $M' \cup D$ и $M'' \cup D$ разбиваются на d цепей, то и всё M разбивается на d цепей (каждая цепь склеивается из верхней и нижней половин).

Если $M' \neq \varnothing$ и $M'' \neq \varnothing$, то $\#(M' \cup D) < \#M$ и $\#(M'' \cup D) < \#M$. Мы осуществили спуск. В противном случае имеется не более двух максимальных антицепей: верхняя (если $M' = \varnothing$) и нижняя (если $M'' = \varnothing$). Рассмотрим случай наличия только верхней антицепи (случай наличия только нижней антицепи симметричен).

Пусть имеется единственная максимальная антицепь D и $x \in D$. Тогда $M \setminus \{x\}$ имеет диаметр $d-1$ и в силу минимальности контрпримера разбивается на $d-1$ цепь $C_1, \ldots, C_{d-1}$. Поэтому $x \cup \{C_i\}_{i=1}^{d-1}$ есть искомое разбиение на d цепей.

Пусть имеются две максимальные антицепи D_1 и D_2. Легко показать, что найдется пара таких элементов $x \in D_1$ и $y \in D_2$, что $x \prec y$. Тогда диаметр множества $M \setminus \{x, y\}$ строго меньше диаметра M, и доказательство завершается аналогично.

2. *Доказательство теоремы Менгера.* Доказательство основано на методе минимального контрпримера и похоже на доказательство теоремы Дилуорса.

Пусть G — минимальный контрпример. Назовем *менгеровой цепочкой* набор из минимального числа k вершин, разделяющих A и B. Назовем такое $k = k(G)$ *менгеровостью* графа G. Выберем контрпример для минимально возможного k. Невозможность спуска накладывает на граф G условия, приводящие к противоречию.

Прежде всего, каждая вершина $V \in G$ входит в менгерову цепочку, т. к. иначе $k(G - V) = k(G)$.

Более того, удаление любого ребра уменьшает менгеровость. Это значит, что если ребро r соединяет две вершины C_1 и C_2, отличные от A и B, то найдется такой набор N из $k-1$ вершин, что $N \cup \{C_1\}$ и $N \cup \{C_2\}$ — менгеровы цепочки.

Если некоторая вершина V соединена и с A, и с B, то V можно выбросить вместе с выходящими из нее ребрами и осуществить спуск. Поэтому нет вершин, соединенных с A и B одновременно.

Пусть M — менгерова цепочка из k вершин. Построим граф G_A, оставив как есть вершины B-компоненты и цепочки M и ребра между этими вершинами, выбросив все другие компоненты и соединив вершину A напрямую со всеми вершинами из M. Аналогично строим граф G_B. Если есть k непересекающихся путей, соединяющих A и B в графах G_A и G_B, то так же будет в G (путь строится из двух половинок).

Если количество вершин в каждом графе G_A и G_B меньше, чем в G, то в каждом из графов G_A и G_B, а значит, и в графе G, найдется k непересекающихся путей.

В противном случае либо $G = G_A$, либо $G = G_B$.

Так как приведенные рассуждения верны для любой менгеровой цепочки M, то любая менгерова цепочка либо напрямую соединена с A, либо напрямую соединена с B. Следовательно, каждая вершина графа G соединена либо с A, либо с B, но не с A и B одновременно.

Тогда есть две вершины, соединенные ребром e, одна из которых смежна с A, а другая с B. В силу минимальности k в графе $G \setminus e$ найдется $k-1$ непересекающихся путей от A до B. Каждый из этих путей можно выбрать состоящим из трех ребер, и вместе с трехреберным путем, проходящим через ребро e, они дают k непересекающихся путей.

Случайные графы (10–11)

А. М. Райгородский

Зафиксируем натуральное число n, а также $p \in [0, 1]$ и $q = 1 - p$. Рассмотрим множество $V = \{1, \ldots, n\}$. *Вероятностью* графа $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер назовем $P(G) := p^{|E|}q^{C_n^2 - |E|}$. *Вероятностью* произвольного семейства (или, что то же самое, свойства [4)]) графов с множеством вершин V называется сумма вероятностей входящих в него графов.

0. Если Ω — множество всех графов с n вершинами, то $P(\Omega) = 1$.

(Говоря научно, ребра графа выбираются с помощью «схемы испытаний Бернулли», т. е. каждое ребро независимо от остальных имеется в графе с вероятностью $p \in [0, 1]$; поэтому с вероятностью $q = 1 - p$ его нет в графе. В результате возникает *случайный граф*, множество вершин которого фиксировано, а множество ребер случайно. Всякое событие строится из элементарных, как из кирпичиков, и считается произошедшим, коль скоро случайный граф ему — как множеству — принадлежит. Имея понятие случайного графа, можно судить о том, с какой степенью достоверности граф обладает тем или иным свойством. Например, можно определить вероятность связности графа и т. д.)

Любая функция X, определенная на множестве графов, будет называться *случайной величиной*. Например, количество ребер графа — слу-

[4)] Сказать, что для графа выполнено некоторое свойство, это все равно, что отнести граф к семейству графов, указанным свойством обладающих.

чайная величина. Пусть X принимает k различных значений $y_1, \ldots, y_k$. Тогда *математическим ожиданием* величины X называется ее «взвешенное среднее» $MX = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(X^{-1}(y_i))$, где $X^{-1}(y_i)$ — семейство таких графов G, для которых $X(G) = y_i$. Для краткости последнюю вероятность можно обозначать $P(X = y_i)$.

1. а) Докажите *линейность* математического ожидания:

$$M(c_1X_1 + \ldots + c_sX_s) = c_1MX_1 + \ldots + c_sMX_s$$

для любых случайных величин $X_1, \ldots, X_s$ и констант $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$.

б) Докажите, что если X принимает неотрицательные целые значения, то $P(X = 0) \geqslant 1 - MX$.

2. Найдите MX для графов G с n вершинами и случайной величины X, равной числу

а) треугольников в G;
б) циклов длины k в G;
в) полных подграфов на k вершинах (k-клик) в G;
г) различных k-вершинных деревьев в G;
д) k-вершинных древесных компонент в G;
е) вершин на древесных компонентах G;
ж) вершин на циклических компонентах G.

Древесная/циклическая компонента — компонента связности графа, являющаяся деревом/простым циклом.

Пусть f и g — некоторые функции натурального аргумента n, причем $g(n) \neq 0$ для всех n. Скажем, что $f = o(g)$ (читается «f — о малое от g»), если $\dfrac{f(n)}{g(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Например, $1 = o(\sqrt{n})$ или $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. Пусть P_a и P_b — многочлены степеней a и b соответственно, $a < b$. Докажите, что $P_a = o(P_b)$.

Полезно бывает изучать различные вероятности при $n \to \infty$. Пусть теперь n меняется и величина $p = p_n$ (вероятность появления ребра случайного графа) зависит от n. (В этом есть глубокий смысл, который прояснится далее.) Свойство B называется *исключительно достоверным*, если $P(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$, где B_n — семейство графов с n вершинами, удовлетворяющих свойству B. Говорят даже, что в таком случае это свойство выполнено *почти наверное*.

4. Докажите, что если $p_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет треугольников.

5. Пусть $k \geqslant 2$ — константа. Докажите, что если $p_n = o\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет компонент связности, являющихся деревьями на k вершинах.

6. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное является лесом [5)].

7. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное двудолен.

8. Определим *число независимости* $\alpha(G)$ графа G как размер максимального подмножества вершин в G, которые попарно не соединены ребрами. Пусть $p_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что почти наверное

$$\alpha(G) < 2\log_2 n + 10\log_2\log_2 n.$$

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — минимальное количество цветов, в которое можно раскрасить вершины графа G правильным образом.

9. Докажите, что если $p_n = \frac{1}{2}$, то хроматическое число случайного графа почти наверное больше, чем $\frac{n}{2\log_2 n} + o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$. Более строго: для некоторой функции $f_n = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ почти наверное выполнено свойство $\chi(G) > \frac{n}{2\log_2 n} + f_n$ (зависящее от n).

10. Докажите, что если $p_n > \frac{3\ln n}{n}$, то почти наверное случайный граф связен.

11*. Пусть $p_n = n^{-\alpha}$, где $\alpha > \frac{5}{6}$. Докажите, что

$$P\left(\forall\, S \subset V,\ |S| \leqslant \sqrt{n}\colon\ \chi(G|_S) \leqslant 3\right) \to 1, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Здесь $G|_S$ — *порожденный*, или *индуцированный*, подграф графа $G = (V, E)$, т. е. граф $H = (S, F)$, у которого $e = (x, y) \in F$ тогда и только тогда, когда $x, y \in S$ и $e \in E$. Иными словами, H получается из G удалением всех вершин, не принадлежащих S, вместе со всеми выходящими из них ребрами.

12*. *Граф расстояний* на плоскости — граф, вершины которого являются точками плоскости и ребрами соединены пары вершин, находящиеся на расстоянии 1. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное может быть реализован как граф расстояний на плоскости, а если $p_n > \frac{1000}{n}$, то почти наверное выполнено обратное свойство.

[5)] Лес — это граф, являющийся набором не связанных между собой деревьев.

Зачетные задачи: все, кроме задач со звездочкой и еще любых двух.

Решение.

0. $P(\Omega) = \sum\limits_{k=0}^{C_n^2} C_{C_n^2}^k p^k (1-p)^{C_n^2-k} = (p + (1-p))^{C_n^2} = 1.$

Вокруг критерия Куратовского планарности графов [6)]

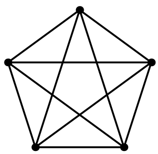
А. Б. Скопенков

Формулировка критерия Куратовского планарности графов хорошо известна (все необходимые понятия и эта формулировка сформулированы далее). Однако его классическое доказательство сложно и приводится не во всех книгах по теории графов. В настоящем тексте приводится доказательство Макарычева [17] (с дальнейшими упрощениями, сделанными Заславским, Прасоловым, Телишевым и автором). По-видимому, оно является наиболее простым (ср. [24, § 5]; Юрий Макарычев придумал свое доказательство, еще будучи школьником!). Перед доказательством критерия Куратовского приводятся необходимые определения и факты теории графов, а после, — близкие результаты.

Планарные графы

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (т. е. ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались.

Например, любое дерево и любой граф, образованный вершинами и ребрами некоторого выпуклого многогранника, — планарные.


K_5

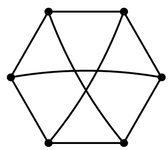

$K_{3,3}$

Рис. 1. Графы Куратовского

6) Обновляемый текст см. на `http://arxiv.org/abs/0802.3820`. Настоящий текст является дополненной версией статьи [7]. Благодарю М. Н. Вялого, А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, В. В. Прасолова и А. А. Телишева за полезные замечания и обсуждения, М. Н. Вялого и издательство МЦНМО за подготовку рисунков, а также Б. Мохара и С. В. Матвеева за предоставленные ссылки.

Еще в XVIII веке Леонард Эйлер доказал, что графы K_5 и $K_{3,3}$ (см. рис. 1) не являются планарными. Это можно доказать [5, § 1, Теорема 1.3] путем небольшого перебора с использованием следующей теоремы. (Доказательство непланарности графа K_5, основанное на понятии коэффициента пересечения, см. в [2], [7], [5, § 1].)

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая* (*т. е. цикл*) *делит плоскость ровно на две части.* (*При этом одна часть ограничена, другая неограничена, причем две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой.*)

Обсуждение и доказательство этой теоремы см., например, в [1].

Плоским графом называется изображение графа на плоскости без самопересечений. Иногда такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же планарный граф можно нарисовать (без самопересечений) на плоскости разными способами (см. рис. 2).

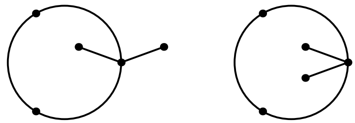


Рис. 2. Различные вложения графа в плоскость

Из теоремы Жордана следует, что *любой плоский граф разбивает плоскость на конечное число связных частей.* Эти части называются *гранями* плоского графа.

Формула Эйлера. *Для связного плоского графа с V вершинами, E ребрами и F гранями выполнено равенство $V - E + F = 2$.*

Доказательство и применения этой теоремы см., например, в [5].

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если множество вершин графа G содержится в множестве вершин графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединенные ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

Коротко говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы G_1 и G_2 (без петель и кратных ребер) называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon V_1 \to V_2$, называемое *изоморфизмом* графов, множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2, удовлетворяющее условию: *вершины* $A, B \in V_1$ *соединены ребром в том и только в том случае, если вершины* $f(A), f(B) \in \in V_2$ *соединены ребром.*

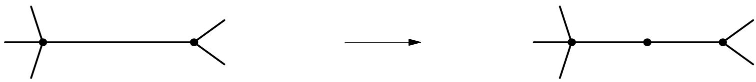


Рис. 3. Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 3. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Или, эквивалентно, если существует граф G, полученный из обоих данных графов операциями подразделения ребра. Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Эта теорема объявлена также замечательным советским математиком Львом Семеновичем Понтрягиным (доказательство не опубликовано), а также Фринком и Смитом. Поэтому иногда ее называют теоремой Понтрягина—Куратовского. До публикации теоремы Куратовского Карл Менгер объявил, что *граф, степень каждой вершины которого равна 3, является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу* $K_{3,3}$. Читатель может попытаться самостоятельно доказать этот факт (вытекающий из теоремы Куратовского). Кроме теоремы Куратовского существует много других критериев планарности графов [24]. Огромный интерес к поиску критерия планарности графов объясняется, в частности, наличием одной из величайших математических гипотез — гипотезы четырех красок [5, § 1]. Она утверждает, что вершины любого плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета. Раскраска вершин (граней) плоского графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины (грани) окрашены в разные цвета.

Простое доказательство критерия Куратовского

О необходимости в теореме Куратовского сказано выше. Приведем доказательство достаточности. Будем рассматривать графы с петлями и кратными ребрами. Предположим, напротив, что существует неплоский граф, не содержащий подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$. Среди всех таких графов выберем граф G *с минимальным числом ребер, не содержащий изолированных вершин.*

Введем операции удаления ребра, стягивания ребра и удаления вершины, показанные на рис. 4. Стягивание ребра означает удаление ребра с последующим объединением его концов в одну вершину. Удаление вершины подразумевает также удаление всех выходящих из нее ребер. Графы, получающиеся из графа G удалением ребра (xy), стягиванием ребра (xy) и удалением вершины x, будем обозначать $G - xy$ (рис. 4 слева), G/xy (рис. 4 в центре) и $G - x$ (рис. 4 справа) соответственно.

Лемма об удалении ребра. *Для любого ребра xy графа G*

а) *из каждой вершины графа $G - x - y$ выходит не менее двух ребер*;

б) *граф $G - x - y$ не содержит θ-графа, т. е. графа, гомеоморфного букве θ (графу $K_{3,2}$).*

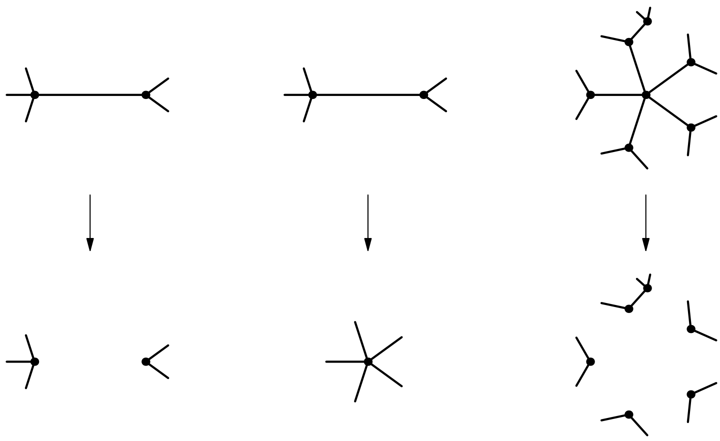


Рис. 4. Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра G/e и удаление вершины $G - x$

Лемма о графах Куратовского. *Для произвольного графа K следующие три условия равносильны*:

1) *для любого ребра xy графа K граф $K - x - y$ не содержит θ-графа, изолированных вершин и висячих вершин*;

2) *для любого ребра xy графа K граф $K - x - y$ является циклом (содержащим $n \geqslant 3$ вершин)*;

3) *граф K изоморфен K_5 или $K_{3,3}$.*

Из леммы об удалении ребра вместе с импликацией 1) $\Rightarrow$ 3) леммы о графах Куратовского вытекает, что граф G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

В сформулированных леммах нетривиальна только часть б) леммы об удалении ребра, которую мы докажем в самом конце. Импликации 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) в лемме о графах Куратовского очевидны и не используются в доказательстве теоремы Куратовского.

Доказательство части а) *леммы об удалении ребра.* Изолированных вершин в графе $G - x - y$ нет, поскольку от изолированной вершины графа $G - x - y$ в графе G отходит не более двух ребер, что невозможно.

В графе $G - x - y$ нет и висячих вершин. Действительно, если p — висячая вершина, то она соединена и с x, и с y, поскольку в графе G из каждой вершины выходит не менее трех ребер. Граф $G - xy$ планарен по минимальности графа G (поскольку G не содержит ни K_5, ни $K_{3,3}$). Нарисуем граф $G - xy$ на плоскости без самопересечений и «подрисуем» ребро xy вдоль ребер px и py. Получим изображение графа G на плоскости без самопересечений. Противоречие.

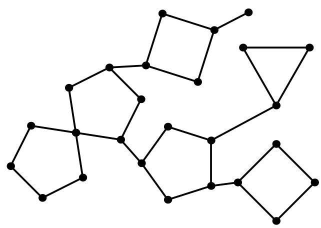


Рис. 5. «Дерево» из циклов

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) *в лемме о графах Куратовского.* Из 1) следует, что граф $K - x - y$ представляет собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы (рис. 5). Поэтому в графе $K - x - y$ существует «висячий» цикл, т. е. цикл C, имеющий с остальным графом только одну общую вершину v. В этом цикле K есть еще по крайней мере две вершины p и q. Так как в графе K нет вершин, из которых выходит менее трех ребер, каждая из этих вершин p и q соединена либо с x, либо с y. Поэтому в объединении цикла C и ребер, соединяющих вершины x, y, p, q, можно выделить θ-подграф. Значит, по условию 1) каждое ребро графа $K - x - y$ имеет конец на цикле C. Поскольку по условию 1) граф $K - x - y$ не содержит висячих вершин, то он совпадает с циклом C.

Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 3) *в лемме о графах Куратовского.* При $n=3$ для любых двух вершин b и c цикла $K-x-y$ граф $K-b-c$ является циклом, поэтому оставшаяся вершина цикла $K-x-y$ соединена (ребром) в K и с вершиной x, и с вершиной y. Поэтому $K=K_5$.

При $n \geqslant 4$ возьмем любые четыре соседние вершины a, b, c, d цикла $K-x-y$. Поскольку граф $K-b-c$ является циклом, то в G одна из вершин a и d соединена с x (и не соединена с y), другая соединена с y (и не соединена с x), а отличные от a, b, c, d вершины цикла $K-x-y$ (которых нет при $n=4$) не соединены ни с x, ни с y. При $n \geqslant 5$ получаем противоречие. При $n=4$ получаем, что четыре вершины цикла $K-x-y$ соединены с x и y попеременно, откуда $K=K_{3,3}$. $\square$

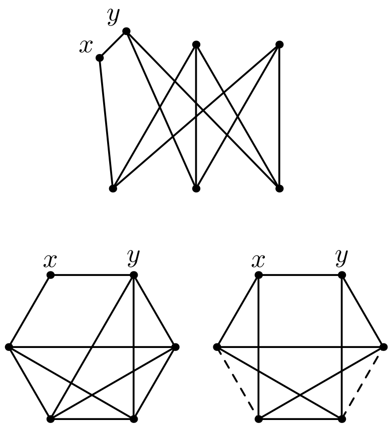


Рис. 6. «Растягивание ребра» в графах Куратовского

Доказательство части б) *леммы об удалении ребра.* Докажем сначала, что граф G/xy планарен. Утверждение «*граф G содержит подграф, гомеоморфный графу H*» будем сокращенно записывать в виде «$G \supset H$». Если $G/xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$, а если $G/xy \supset K_5$, то $G \supset$ $\supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$ (рис. 6). Поэтому планарность графа G/xy следует из минимальности графа G.

Нарисуем без самопересечений на плоскости граф G/xy (рис. 7). Покрасим в белый цвет ребра графа G/xy, выходящие из вершины xy. Изображение графа $G-x-y=G/xy-xy$ на плоскости получается стиранием белых ребер. Покрасим в черный цвет границу B той грани (изображения) графа $G/xy-xy$, которая содержит вершину xy графа G/xy.

Заметим, что *граница грани не может содержать θ-подграфа.* Это утверждение можно вывести из теоремы Жордана. Другое доказатель-

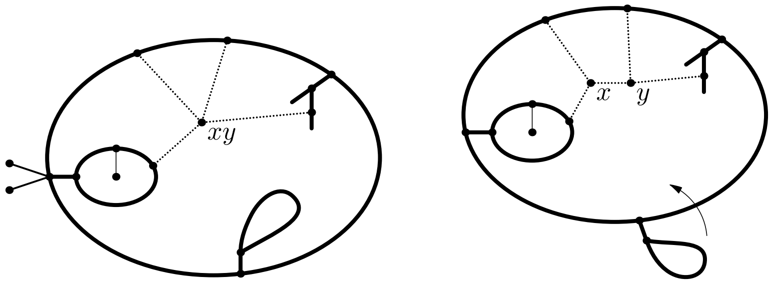


Рис. 7. Изображение на плоскости графов G/xy и G

ство получается от противного: если граница грани содержит θ-подграф, то возьмем точку внутри этой грани и соединим ее тремя ребрами с тремя точками на трех «дугах» θ-подграфа. Получим изображение графа $K_{3,3}$ на плоскости без самопересечений. Противоречие.

Поэтому достаточно доказать, что в графе G/xy все ребра либо белые, либо черные. Пусть это не так. Тогда непокрашенные ребра находятся в грани графа $G/xy - xy$, не содержащей вершины xy. Значит граф B из черных ребер разбивает плоскость. Поэтому найдется цикл C из черных ребер, относительно которого вершина xy лежит (не уменьшая общности) внутри, а некоторое еще не покрашенное ребро — вне.

Покрасим в красный цвет все ребра графа G/xy, лежащие вне цикла C. Заметим, что при этом могут остаться непокрашенные ребра.

Построенная раскраска графа G/xy порождает раскраску (части) графа G (ребро xy красится в белый цвет). Граф $G - R$, полученный из графа G удалением красных ребер, можно нарисовать на плоскости без самопересечений (рис. 7). Можно считать, что белые ребра лежат внутри черного цикла C. Поскольку объединение B черных ребер — граница грани, то оно не содержит θ-подграфа. Значит каждая компонента связности графа $B - C$ пересекается с C не более чем по одной точке. Поэтому можно перекинуть каждую компоненту связности графа $B - C$ (вместе с непокрашенными ребрами) внутрь цикла C. Будем считать далее, что $B - C$ и все непокрашенные ребра лежат внутри цикла C. Нарисовав красные ребра вне C, как для вложения графа G/xy (рис. 7), получим вложение графа G в плоскость. Полученное противоречие доказывает, что $G - x - y$ есть граница грани и поэтому не содержит θ-подграфа. $\square$

Другое доказательство того, что G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$ (без использования импликации 2) $\Rightarrow$ 3) в лемме о графах Куратовского). Поскольку граф G не имеет вершин степени 1 или 2, то любая вершина цикла $G - x - y$ соединена либо с x, либо с y. Если вершина u цикла $G - x - y$ соединена с x и не соединена с y, то соседняя с u вершина v цикла не соединена с x (поскольку в противном случае граф $G - vx$ планарен по минимальности графа G, значит, мы можем добавить ребро vx к вложенному в плоскость графу $G - vx$ и получить вложение в плоскость графа G). Поэтому либо *любая вершина цикла $G - x - y$ соединена в G и с x, и с y*, либо *вершины цикла $G - x - y$, соединенные с x и соединенные с y, чередуются вдоль этого цикла.* В первом случае $G = K_5$, во втором — $G = K_{3,3}$. □

Задача. Придумайте алгоритм распознавания планарности графа, основанный на приведенном доказательстве, и оцените его сложность [7].

Запрещенные подсистемы

Если некоторая подсистема системы N нереализуема в другой системе M, то и N нереализуема в M. Естественная идея — попытаться найти список «запрещенных» систем $N_1, \ldots, N_k$, нереализуемых в M, со следующим свойством.

Для того чтобы система N была реализуема в M, необходимо и достаточно, чтобы N не содержал ни одной из этих «запрещенных» подсистем.

Классический пример теоремы такого рода — теорема Куратовского. Так можно описать графы, вложимые в любую данную поверхность [20], а также много других классов графов или более общих объектов (например, графы и даже пеановские континуумы, *базисно* вложимые в плоскость [22], [16]) [8]. Приведем формулировки некоторых результатов (доказательства оставляем читателю в качестве задач). Те фор-

[7] Для этого может пригодиться следующее изменение приведенного доказательства, не содержащее предположения о противном и поэтому не включающее работы с несуществующими объектами. Граф, полученный из графа G произвольной последовательностью операций удаления ребра или вершины или стягивания ребра, называется *минором* графа G. Ясно, что минор плоского графа является плоским. Можно доказывать теорему Куратовского в эквивалентной формулировке, полученной из следующего факта: *граф не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$ $\iff$ граф не имеет минора, изоморфного K_5 или $K_{3,3}$*. Пусть *G — неплоский граф, любой минор которого плоский.* Достаточно доказать, что G изоморфен K_5 или $K_{3,3}$, что делается аналогично приведенным выше рассуждениям.

[8] Заметим, что список запрещенных подграфов для вложимости графа в лист Мёбиуса содержит целых 103 графа [14]. Даже *существование* такого конечного списка для произвольной поверхности доказывается сложно [10], [20]. Список запрещенных полиэдров бесконечен для вложимости двумерных полиэдров в $\mathbb{R}^3$ или n-мерных полиэдров в $\mathbb{R}^{2n}$, где $n \geqslant 2$ [21]. Поэтому интересны другие препятствия к вложимости. Заметим, что одно из самых полезных препятствий строится с помощью *конфигурационного пространства* упорядоченных пар различных точек данного пространства [6], [23].

мулировки, в которых встречаются неизвестные читателю объекты, он может игнорировать.

Теорема Шартрана—Харари. *Граф G можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, чтобы он был границей некоторой* одной *грани тогда и только тогда, когда G не содержит θ-подграфа.*

Назовем несамопересекающийся цикл C в связном графе G *граничным*, если существует изображение без самопересечений графа G на плоскости, при котором цикл C изображается границей некоторой грани. Следующий результат можно вывести из теоремы Куратовского, ср. [11].

Рис. 8. Цикл C не может быть границей внешней грани

Относительная версия теоремы Куратовского. *Цикл C является граничным тогда и только тогда, когда граф G планарен и цикл C не содержится в подграфе графа G, как на рис.* 8.

А вот следующий результат проще доказывать, не используя теорему Куратовского (подробнее см. [8, гл. 1]).

Теорема о 8 и $\boldsymbol{\theta}$. *Граф G с заданными циклами ребер, выходящих из каждой вершины, можно изобразить без самопересечений на плоскости, чтобы указанные циклы шли по часовой стрелке, тогда и только тогда, когда G не содержит «восьмерки» или «буквы θ» с циклами, изображенными на рис.* 9.

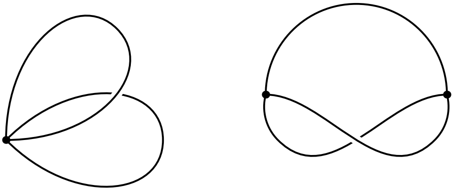


Рис. 9. Графы с циклическими порядками, не реализуемыми на плоскости

Два вложения (т. е. изображения без самопересечений) f, g одного и того же графа в плоскость называются *изотопными*, если одно можно так непрерывно продеформировать в другое, чтобы в процессе деформации мы все время имели бы вложение (формальное определение см., например, в [4]).

Теорема Маклейна—Адкиссона [19]. *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой триод T и на любой несамопересекающийся цикл S^1 изотопны (т. е. не таковы, как на рис.* 10*).*

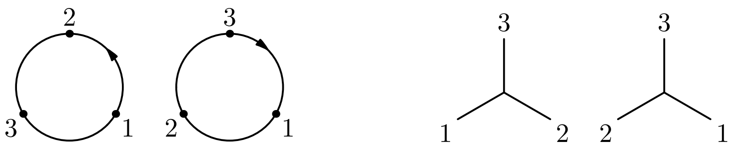


Рис. 10. Различные вложения окружности и триода в плоскость

Эту теорему удобно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к доказанному путем выделения максимального дерева.

Теорема Маклейна—Адкиссона справедлива также для *полиэдра* или даже *пеановского континуума* [19].

Теорема Маклейна—Адкиссона (без утверждения в скобках) справедлива для вложений в сферу, тор и другие сферы с ручками (доказательство аналогично). Заметим, что любая изотопия графа на поверхности объемлема [С. В. Матвеев, частное сообщение].

Теорема Баэра—Эпштейна [13]. *Две замкнутые несамопересекающиеся кривые на двумерном многообразии гомотопны тогда и только тогда, когда они изотопны.*

Теорема Баэра—Эпштейна сводит вопрос о классификации вложений окружности в двумерное многообразие N (и, тем самым, произвольного графа в сферу с ручками и дырками) к вопросу о реализуемости элементов фундаментальной группы $\pi_1(N)$ вложенными окружностями. Но последний вопрос очень сложен.

Задача. Граф называется (вершинно) *k-связным*, если он остается связным после удаления любой $k-1$ вершины и распадается после удаления некоторых k вершин. Выведите из теоремы Маклейна—Адкиссона следующие утверждения.

а) Любое вложение произвольного трехсвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и осевых симметрий.

б) Любое вложение двусвязного графа в сферу может быть получено из любого другого композицией изотопии и «переворачиваний блоков» (рис. 11).

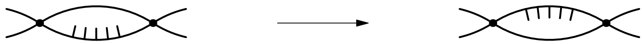


Рис. 11. Переворачивание блока

Определите операции, при помощи которых можно получить любое вложение 1-связного ($\Longleftrightarrow$ связного) графа в сферу из любого другого. Сделайте то же и для 0-связного ($\Longleftrightarrow$ произвольного) графа. Таким образом получится другое описание вложений графов в плоскость с точностью до изотопии [25].

Приложение: планарность полиэдров и континуумов

Полиэдр (синоним: тело симплициального комплекса) — это многомерный аналог графа. Определение см., например, в [5, § 8], [4]. Уже двумерные полиэдры — интересные и сложные объекты, про которые имеется несколько знаменитых и трудных нерешенных проблем [4]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

Теорема Халина—Юнга [15], [18]. *Связный полиэдр вложи́м в сферу S^2 тогда и только тогда, когда он не содержит графов K_5, $K_{3,3}$ или «зонтика» U^2 (рис. 12).*

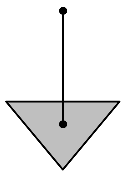


Рис. 12. Зонтик

В этом результате интересна лишь часть «тогда» и лишь для двумерных полиэдров. Следующее доказательство (видимо, являющееся фольклорным) проще представленного в [15] и тем более в [18].

Набросок доказательства части «тогда». Пусть связный 2-полиэдр $N \not\cong S^2$ не содержит ни графов K_5, $K_{3,3}$, ни зонтика U^2. Так как N не содержит зонтика, то окрестность любой точки в N является объединением дисков и отрезков, склеенных за одну точку (рис. 13 слева). Если этих дисков больше одного, то заменим эту окрестность на изображенную на рис. 13 справа.

Рис. 13. Преобразование окрестности точки

При этом преобразовании не появится подграфов K_5 и $K_{3,3}$. Обратное преобразование является стягиванием «звезды с несколькими лучами» и поэтому сохраняет планарность. Значит, достаточно доказать теорему для полученного 2-полиэдра. Рассмотрим объединение $\overline{N}$ его двумерных граней. Тогда окрестность любой точки в $\overline{N}$ является диском. Значит, по теореме классификации поверхностей $\overline{N}$ является сферой с ручками, пленками Мёбиуса и дырками. Поскольку каждый из графов K_5 и $K_{3,3}$ вложим и в тор с дыркой, и в лист Мёбиуса, то $\overline{N}$ есть несвязное объединение дисков с дырками. Заменим каждый из этих дисков с дырками на граф с рис. 14.

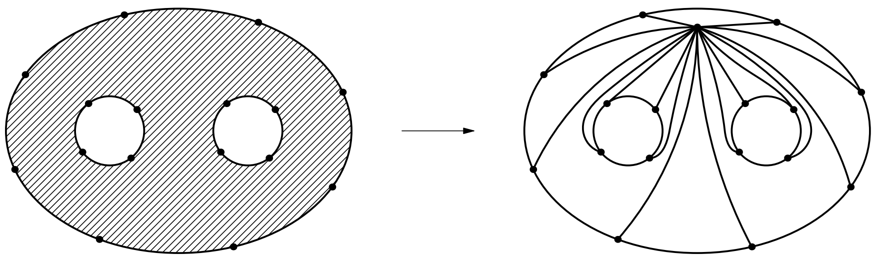


Рис. 14. Преобразование диска с дырками

Полученный граф планарен. По вложению этого графа в плоскость легко построить вложение полиэдра N в плоскость. □

В терминах запрещенных подсистем можно также описать «компактно бесконечные графы» (т. е. локально связные континуумы), вложимые в плоскость. *Континуум* — компактное связное метрическое пространство. Континуумы естественно появляются при изучении динамических систем (даже гладких!). Континуум называется *локально связным* (или континуумом Пеано), если для любой его точки x и ее окрестности U существует такая меньшая окрестность V точки x, что любые две точки из V соединяются некоторым путем, целиком лежащим в U (или, эквивалентно, если он является непрерывным образом дуги). Локально связные континуумы могут быть очень сложно устроены [3]. Поэтому удивительно, что имеется следующий результат.

Теорема Клейтора [11], [12]. *Пеановский континуум вложи́м в сферу S^2 тогда и только тогда, когда он не содержит континуумов K_5, $K_{3,3}$, C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$ (рис. 15).*

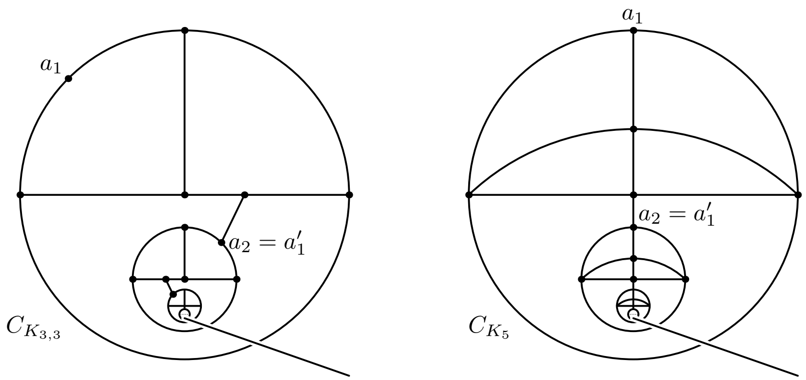


Рис. 15. Континуумы Куратовского

Построение континуумов C_{K_5} и $C_{K_{3,3}}$. Возьмем ребро ab графа K_5 и отметим на нем новую вершину a'. Пусть $P = K_5 - (aa')$. Пусть P_n копия графа P. Обозначим через a_n и a_n' вершины графа P_n, соответствующие a и a'. Положим

$$C_{K_5} := \Big(P_1 \bigcup_{a_1'=a_2} P_2 \bigcup_{a_2'=a_3} P_3 \dots\Big) \bigcup_{x=0} I,$$

где $\{P_n\}$ — последовательность графов на плоскости со стремящимися к нулю диаметрами, сходящаяся к точке $x \notin \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$. Точно так же можно определить континуум $C_{K_{3,3}}$, взяв в начале $K_{3,3}$ вместо K_5.

Доказательство невложимости в теореме Клейтора. Докажем невложимость C_{K_5} (доказательство невложимости $C_{K_{3,3}}$ аналогично). Пусть, напротив, $f\colon C_{K_5} \to \mathbb{R}^2$ — вложение. Обозначим через $S := P - a - a'$ окружность в P, составленную из ребер, не содержащих вершин a и a'. Аналогично определим $S_n \subset P_n$.

Так как S_n сходится к $x = 0$, то $f1$ лежит вне fS_n для достаточно большого n.

Так как fI — путь между $f0$ и $f1$, лежащий вне fS_n, то $f0$ лежит вне fS_n.

Так как S_n сходится к $x = 0$, то fS_m лежит вне fS_n и fS_l лежит вне fS_m для достаточно больших $m < l$. Но тогда fa_m и fa'_m лежат вне fS_m. Это противоречит тому, что для любого вложения $g\colon P \to \mathbb{R}^2$ точки ga и ga' лежат по разные стороны от образа gS. $\square$

Отметим, что в теореме Куратовского можно заменить плоскость $\mathbb{R}^2$ на сферу S^2. В теоремах Халина—Юнга и Клейтора можно заменить S^2 на $\mathbb{R}^2$, только добавив запрещенный подполиэдр или подконтинуум S^2.

Литература

[1] *Аносов Д. В.* Отображения окружности, векторные поля и их применения. М.: МЦНМО, 2003.

[2] *Болтянский В. Г.*, *Ефремович В. А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.

[3] *Куратовский К.* Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1969.

[4] *Матвеев С. В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.

[5] *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.

[6] *Реповш Д.*, *Скопенков А.* Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54, № 6. С. 61–108.

[7] *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Мат. просвещение. 2005. Вып. 9. С. 116–128; 2006. Вып. 10. С. 276–277; `http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html`.

[8] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с элементарной точки зрения. М.: МЦНМО, в печати; `arxiv://math/0801.1568`.

[9] *Скопенков А.*, *Телишев А.* И вновь о критерии Куратовского планарности графов // Матем. просвещение. 2007. Вып. 11.

[10] *Archdeacon D.*, *Huneke P.* A Kuratowski theorem for non-orientable surfaces // J. Comb. Th. Ser. B. 1989. V. 46. P. 173–231.

[11] *Claytor S.* Topological immersions of peanian continua in a spherical surface // Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 809–835.

[12] *Claytor S.* Peanian continua not embeddable in a spherical surface // Ann. of Math. 1937. V. 38. P. 631–646.

[13] *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.

[14] *Glover H. H.*, *Huneke J. P.*, *Wang C. S.* 103 graphs that are irreducible for the projective plane // J. Comb. Th. 1979. V. 27, № 3. P. 332–370.

[15] *Halin R.*, *Jung H. A.* Charakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre // Arch. Math. 1964. V. 15. P. 466−469.

[16] *Kurlin V. A.* Basic embeddings into products of graphs // Topol. Appl. 2000. V. 102. P. 113−137.

[17] *Makarychev Yu.* A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion // J. of Graph Theory. 1997. V. 25. P. 129−131.

[18] *Mardešić S.*, *Segal J.* ε-mappings and generalized manifolds //Michigan Math. J. 1967. V. 14. P. 171−182.

[19] *McLane S.*, *Adkisson V. W.* Extensions of homeomorphisms on the spheres // Michig. Lect. Topol. Ann Arbor, 1941. P. 223−230.

[20] *Robertson N.*, *Seymour P. D.* Graph minors. VIII. A Kuratowski graph theorem for general surfaces // J. Comb. Theory. Series B. 1990. V. 48. P. 255−288.

[21] *Sarkaria K. S.* Kuratowski complexes //Topology. 1991. V. 30. P. 67−76.

[22] *Skopenkov A. Б.* A description of continua basically embeddable in $\mathbb{R}^2$ // Topol. Appl. 1995. V. 65. P. 29−48.

[23] *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // Surveys in Contemporary Mathematics. Ed. N. Young and Y. Choi. London Math. Soc. Lect. Notes. 2008. V. 347. P. 248−342. (`arxiv:math/0604045`.)

[24] *Thomassen C.* Kuratowski's theorem // J. Graph. Theory. 1981. V. 5. P. 225−242.

[25] *Whitney H.* Planar graphs // Fund. Math. 1933. V. 21. P. 73−84.

Г Л А В А 13

АЛГОРИТМЫ, КОНСТРУКЦИИ, ИНВАРИАНТЫ

Инвариант (8–9)

А. В. Шаповалов

Несвобода конструкции может быть в некотором свойстве целого, которого нет у частей. При попытке построения примера это обнаруживается в том, что «концы с концами не сходятся» только в самый последний момент. Это явный признак, что стоит поискать инвариант, т. е. какое-то неизменное число или свойство конструкции, полученной разрешенными действиями. Типичные инварианты: четность, делимость на какое-то число, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков, периметр, площадь, ориентация, рациональность или иррациональность и т. п. Если разрешенные действия не меняют инвариант, то конструкцию с его значением, отличным от начального, получить невозможно. Например, нельзя доехать на поезде от Нью-Йорка до Москвы, поскольку поезда из Америки ходят только в Америку.

Вот два примера, где инвариантом служит четность.

1. Дана пустая таблица размера $(2n+1)\times(2n+1)$. Двое по очереди ставят в нее фишки: первый может поставить фишку в клетку (x, y), если в столбце с номером x и в строке с номером y до его хода поставлено в сумме четное число фишек, второй — если нечетное. В каждую клетку можно поставить не более одной фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что один из игроков, как бы он сам не играл, выигрывает.

2. По кругу стоит нечетное количество целых чисел. На каждом шаге между каждой парой соседних чисел пишется их полусумма, после чего все старые числа стираются. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то первоначальные числа равны.

В следующих двух примерах инвариант — делимость.

3. Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — N л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда *всю* жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. При каких целых N можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

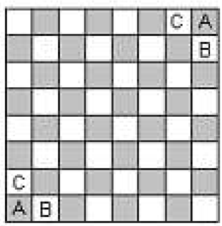
4. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

А здесь инвариант — остаток. И он используется не только для доказательства невозможности, но и для поиска оптимальной конструкции.

5. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

В следующей задаче инвариант — ориентация, т. е. порядок обхода по или против часовой стрелки.

6. На полях A, B и C в левом нижнем углу шахматной доски стоят белые ладьи (см. рис). Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи. Можно ли за несколько ходов переставить ладьи так, чтобы каждая попала на обозначенное той же буквой поле в правом верхнем углу?



И наконец, геометрические инварианты — длины и площади.

7. Пусть F_1, F_2, F_3, … — последовательность выпуклых четырехугольников, где F_{k+1} (при $k = 1, 2, 3, \ldots$) получается так: F_k разрезают по диагонали, одну из частей переворачивают и склеивают по линии разреза с другой частью. Какое наибольшее количество различных четырехугольников может содержать эта последовательность? (Различными считаются многоугольники, которые нельзя совместить движением.)

Но неужели инвариант можно найти, только перебирая известные «отмычки» из списка? Конечно, нет! Сравните начальную и конечную позиции, а еще лучше: группу позиций, получаемую из начальной, и группу, получаемую из конечной. Посмотрите внимательнее на «узкое место»: где возникает основная трудность?

8. На главной диагонали квадрата 101×101 стоят пять ладей. Каждым ходом можно переставить одну из ладей в любом направлении по вертикали или горизонтали вплотную к ближайшей ладье или стенке квадрата (перепрыгивать через ладьи нельзя). Может ли в итоге одна ладья оказаться в центральной клетке квадрата, а остальные четыре — в клетках, соседних по стороне с центральной?

И наконец, очень трудная задача!

9. Ладья, делая ходы по вертикали или горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

Зачетные задачи: все, кроме любых 3 пунктов.

Решения и ответы

1. Посчитаем количество пар клеток, стоящих в одном столбце или строке, одна из которых занята фишкой, а другая нет. Это количество перед ходом первого всегда четное, значит первый всегда может пойти.

3. *Ответ.* При любом N, некратном 3 и большем 7.

5. *Ответ.* 498 долларов.

Указание. Определите минимальную сумму, которую можно снять за несколько операций, и повторите соответствующую группу операций много раз.

8. *Ответ.* Нет.

Предположим, что это возможно. Рассмотрим центральный крест (из центральной вертикали и горизонтали). Изначально не все 5 ладей стоят в этом кресте, а в конечном итоге там должны оказаться все ладьи. Рассмотрим момент, когда последняя (пятая) ладья впервые попала в крест. Нетрудно понять, что когда 4 ладьи стоят в центральном кресте, пятая в нем остановиться не может, противоречие.

9. *Указание.* Рассмотрим граф, вершины которого — узлы шахматной доски, в которых сходятся по 4 клетки, а ребра — всевозможные стороны клеток. Пусть G — часть этого графа, расположенная внутри ломаной, по которой двигалась ладья. Постарайтесь найти ответы на следующие вопросы: сколько вершин у графа G? сколько ребер у графа G? какова четность количества горизонтальных ребер у графа G? [1)]

Полуинвариант (8–9)

А. В. Шаповалов

Перед изучением данного раздела полезно изучить предыдущий.

Полуинвариант — это связанная с текущей позицией (расположением, ситуацией) величина, которая при каждом ходе (разрешенной в задаче операции) меняется только в одну сторону, скажем, все время уменьшается. Это гарантирует отсутствие циклов (мы не можем вернуться к уже пройденной позиции!) и часто может гарантировать, что ходы закончатся. Типичный пример: в большинстве игр уменьшается число возможных ходов до конца игры, что не дает игре продолжаться бесконечно.

В следующих двух задачах важно, что полуинвариант целочисленный и не может быть больше определенного числа.

1. На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?

Типичный полуинвариант — сумма всех чисел.

2. В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что можно сделать в итоге лишь конечное число таких операций.

Если полуинвариант не целочисленный, то его ограниченность еще не гарантирует окончания процесса (например, убывающий положительный полуинвариант мог бы бесконечно долго принимать значения $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots$). В этих случаях прекращение ходов гарантируется конечным числом позиций.

3. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

Очень часто положение, в котором нет разрешенных операций, и является искомым.

[1)] См.: Кожевников П. А. Задача Шаповалова о ладье // Математическое просвещение. Третья серия, вып. 4. С. 211–212; `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/i5211212.pdf.zip`

4. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел в любой строке или любом столбце неотрицательны.

В комбинаторных задачах полуинвариантом часто служит число каких-то комбинаций, например «неправильных» пар.

5. На Украине все города подняли над ратушами флаги — голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

Некоторые конструкции создаются «методом последовательного улучшения». Мы берем несовершенную конструкцию и начинаем ее преобразовывать. Полуинвариант гарантирует завершение процесса и достижение нужного эффекта в конце.

6. В парламенте каждый депутат имеет не более трех врагов. Докажите, что парламент можно так разбить на две палаты, что у каждого депутата в его палате будет не более одного врага.

7. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с концами разных цветов.

Полуинвариант может быть и нестрогим, т. е. не меняться при некоторых ходах. Тогда полезно найти еще один полуинвариант, который строго меняется как раз тогда, когда первый остается неизменным.

8. На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх, вправо-вверх или вправо-вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

Если и второй полуинвариант оказывается нестрогим, то приходится рассматривать и третий, и четвертый... В этом случае естественно рассматривать наборы значений полуинвариантов как строки, упорядоченные лексикографически (как слова в словаре: сравниваются первые элементы, при равенстве — вторые... и так до первого несовпадения).

9. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз (в частности, может вынуть просто одну карту рубашкой вниз), переворачивает эту пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что независимо от того, как Петя выбирает пачки, в конце концов все карты лягут рубашкой вверх.

В заключение — еще несколько задач на полуинварианты и их комбинации.

10. В строке записано несколько чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

11. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой — не больше, чем сотая часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

12. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1. (Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

13. За круглым столом сидят десять человек, перед каждым лежат несколько орехов. Всего орехов — сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину, если у дающего было четное число, или один орех плюс половину остатка — если нечетное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий, и так далее до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.

Зачетные задачи: все, кроме любых трех пунктов.

Указания и решения

1. *Указание.* Занумеруйте вертикали слева направо, а горизонтали — снизу вверх. Рассмотрите, как при ходе короля меняется сумма номеров горизонтали и вертикали.

2. *Указание.* Сумма ограничена суммой модулей всех элементов.

3. *Указание.* При выполнении операции сумма квадратов разностей соседних по кругу чисел уменьшается, а число перестановок чисел — конечно.

4. Меняем знак только там, где сумма чисел меньше нуля. Тогда сумма чисел во всей таблице будет увеличиваться. Но число расстановок знаков конечно, значит, в какой-то момент операции закончатся. Это и означает, что суммы чисел во всех строках и столбцах положительны.

5. *Указание.* Число пар соседних городов с флагами разных цветов каждый день уменьшается.

6. Сначала разобьем депутатов на две палаты произвольным образом. Если какой-то депутат обнаружит в своей палате хотя бы двух врагов, то переведем его в другую палату. От этого суммарное число враждующих внутри палат пар уменьшится.

7. *Указание.* Проведем отрезки с разноцветными концами как попало. Пару пересекающихся отрезков с разноцветными концами можно заменить на пару непересекающихся отрезков с этими же разноцветными концами, при этом суммарная длина отрезков уменьшится. Рано или поздно этот процесс закончится, так как есть только конечное число способов соединить данные точки отрезками с разноцветными концами.

8. *Указание.* Первый полуинвариант — как в задаче 1, второй — номер вертикали.

Замечание. Оба полуинварианта можно заменить одним: номер горизонтали плюс удвоенный номер вертикали.

9. Положение колоды можно закодировать «словом» из букв В (карта рубашкой вверх) или Н (карта рубашкой вниз). Таких слов — конечное число, и при каждой операции получается слово, стоящее в «словаре» раньше по алфавиту: до какого-то места ничего не изменилось, а затем Н заменилась на В. Значит, рано или поздно операции прекратятся, а это возможно, лишь когда все карты лежат рубашкой вверх.

Разные задачи (8–9)

Д. А. Пермяков

1. В народной дружине 100 человек. Каждый день на дежурство выходят трое. Докажите, что нельзя так организовать график дежурств, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

2. На каждой из планет некоторой системы сидит астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

3. Какое максимальное число ладей можно выставить на шахматную доску, чтобы каждая ладья била не более двух других? Ладья *не* может бить через другую.

4. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке.

а) Во скольких точках пересекутся диагонали?

б) На сколько частей разделится при этом многоугольник?

5. Архитектор хочет расположить 7 высотных зданий так, чтобы, гуляя по городу, можно было увидеть их шпили в любом циклическом порядке. Удастся ли это ему?

Зачетные задачи: все, кроме любой одной.

Решения

1. Рассмотрим одного человека. Выходя на дежурство, он каждый раз будет дежурить с двумя новыми людьми. Значит, всего он продежурит с четным числом людей, следовательно, он не сможет продежурить вместе со всеми 99 оставшимися людьми.

2. Докажем индукцией по числу планет. Для трех планет утверждение очевидно. Если каждую планету кто-нибудь наблюдает, то каждую планету наблюдает не более одного астронома. Рассмотрим пару самых близких планет. Их астрономы смотрят друг на друга и больше их никто не наблюдает. Значит, мы можем применить индукционное предположение к оставшимся планетам.

4. а) Каждая четверка вершин многоугольника однозначно задает пару пересекающихся диагоналей, и при этом каждой паре пересекающихся диагоналей однозначно соответствует четверка вершин. Значит, всего количество точек пересечения равняется количеству четверок вершин, т. е. C_n^4.

Цикличность (8–10)

П. А. Кожевников

Идея зацикливания или периодичности так или иначе присутствует во многих задачах. В данном разделе представлены задачи разнообразной тематики (алгебра, геометрия, делимость, комбинаторика), объединенные этой общей идеей.

8–9 класс

1. Решите систему уравнений $x_1+\sqrt{x_2}=x_2+\sqrt{x_3}=\ldots=x_n+\sqrt{x_1}=2$ для $n=9$.

2. В выпуклом многоугольнике все углы равны. Известно, что внутри него есть точка, из которой все стороны видны под равными углами. Докажите, что этот многоугольник правильный.

3. В футбольном первенстве участвуют 20 команд. Докажите, что после двух туров можно выбрать 10 команд, среди которых нет двух уже сыгравших.

4. Имеются красные и синие бусинки. Составляется ожерелье из n бусинок. Оно называется *хорошим*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k-1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в хорошем ожерелье, если $n=42$, $k=6$?

9–10 класс

5. Решите задачу 1 для $n = 10$.

6. В пересечении пяти прямых получена пятиконечная звезда. Ее внешний контур состоит из 10 отрезков. Раскрасим эти 10 отрезков поочередно в красный и синий цвета. Может ли оказаться, что любой красный отрезок длиннее любого синего?

7. Бесконечная последовательность цифр $9, 6, 2, 4, \ldots$ строится по правилу: каждая следующая цифра равна последней цифре суммы предыдущих четырех. Встретится ли в этой последовательности четверка идущих подряд цифр $2, 0, 0, 7$?

8. Решите задачу 4 для произвольного числа n бусинок и любого $k \leqslant [n/2]$.

9. В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

10. Пусть m — натуральное число, $\{f_n\}$ — последовательность Фибоначчи: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

а) Докажите, что последовательность остатков f_n при делении на m периодична.

б) Докажите, что найдется такой номер n, что f_n делится на m.

Зачетные задачи: 1–4.

Контрольные вопросы

I. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ состоит из натуральных чисел, не превосходящих 100. При этом значение каждого члена последовательности a_n однозначно определяет значение следующего члена a_{n+1}. Верно ли, что последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ обязательно периодическая?

а) Верно; б) неверно.

II. Бесконечная в обе стороны последовательность $\ldots, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ состоит из натуральных чисел, не превосходящих 100. При этом значение каждого члена последовательности a_n однозначно определяет значение как следующего члена a_{n+1}, так и значение предыдущего члена a_{n-1}. Верно ли, что последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ обязательно периодическая?

а) Верно; б) неверно.

III. В стране расстояния между парами городов различны. Путешественник начинает путь из города N и выбирает каждый раз маршрут в наиболее удаленный город. Возможно ли, чтобы он возвратился в N на третьем шаге?

а) Возможно; б) невозможно.

Зачетные задачи: 1–4.

Комментарии, указания и решения

1. Заметим, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ — решение. Пусть $x_1 > 1$. Из равенств последовательно получаем, что $x_2 < 1$, $x_3 > 1$, $\ldots$, $x_9 > 1$, $x_1 <$ < 1 — противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если $x_1 < 1$.

2. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — многоугольник и O — точка внутри него. Из равенств

$$\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \ldots = \angle A_nA_1A_2 = \frac{\pi(n-2)}{n},$$
$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_nOA_1 = \frac{2\pi}{n}$$

следует, что $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3 = \ldots = \angle OA_nA_1$. Треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, $\ldots$, OA_nA_1 подобны, поэтому $OA_1/OA_2 = k$, $OA_2/OA_3 = k$, $\ldots$, $OA_n/OA_1 = k$. Перемножив равенства, получим $k = 1$, откуда $OA_1 =$ $= OA_2 = \ldots = OA_n$.

3. Составим граф сыгранных игр. Из каждой вершины выходит два ребра, поэтому граф представляет собой объединение непересекающихся циклов. Эти циклы четной длины (цикл нечетной длины не может быть сыгран в два тура). Из каждого цикла достаточно выбрать половину команд, не игравших друг с другом.

4. См. общий случай в задаче 8.

5. Из условия вытекает, что $x_i \in [0; 2]$. Из уравнений $x_i + \sqrt{x_{i+1}} = 2$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ последовательно выводится, что при $x_1 \neq 1$ расстояние от x_k до 1 увеличивается с ростом k.

6. *Ответ*: не может. *Указание.* Для пяти треугольников, содержащих красную и синюю стороны, применим утверждение о том, что против большей стороны лежит больший угол.

7. *Ответ*: встретится.

Четыре цифры определяют следующую и предыдущую цифру в данной последовательности. Поскольку упорядоченных четверок цифр конечное число, в последовательности встретятся две одинаковые группы из четырех идущих подряд цифр. Отсюда вытекает, что последовательность периодична, причем не имеет предпериода. Это означает, что четверка последовательно идущих цифр 9, 6, 2, 4 встретится не только в начале. Легко видеть, что появлению четверки 9, 6, 2, 4 предшествует четверка 2, 0, 0, 7.

8. *Ответ*: $d\left[\dfrac{n}{2d}\right]$, где $d = \text{НОД}\,(n, k)$.

Соединим пары вершин, между которыми $k-1$ бусин. Это «граф запретов»: две красные вершины не могут быть соединены ребром. Пусть $d = \text{НОД}\,(n, k)$. Тогда граф распадается на d циклов длины n/d. В каждом цикле может быть не более половины красных вершин, причем ровно $\left[\dfrac{n}{2d}\right]$ красных вершин покрасить можно.

9. Любой сложный обмен — это объединение *независимых* циклов. Остается понять, что обмен по циклу можно провести за два дня.

Указание. Поворот можно представить в виде последовательного применения двух осевых симметрий.

10. Выпишем последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на m: $r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots$ Упорядоченных пар остатков конечное число, поэтому найдутся такие номера $i < j$, что $r_i = r_j$ и $r_{i+1} = r_{j+1}$. Остатки r_i и r_{i+1} однозначно определяют последующий и предыдущий остатки, поэтому последовательность остатков периодична с периодом $l = j - i$.

Из периодичности вытекает, что $r_{l+1} = r_{l+2} = 1$, откуда $r_l = 0$.

Литература

[1] *Канель-Белов А., Сапир М.* «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике // Квант. 1990. № 4.

Конечное и счетное (9–11)

П. А. Кожевников

9–10 класс

1. Множество натуральных чисел разбито на бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1, d_2, \ldots$

а) Докажите, что если число прогрессий конечно, то $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \ldots = 1$.

б) Верно ли утверждение пункта а), если число прогрессий бесконечно?

2. Плоскость освещена прожекторами, каждый из которых освещает угол.

а) Докажите, что если число прожекторов конечно, то сумма углов не меньше 360°.

б) Верно ли утверждение пункта а), если число углов бесконечно (счетно)?

10–11 класс

3. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

4. Множество натуральных чисел разбито на две части A и B. Известно, что A не содержит трехчленной арифметической прогрессии. Может ли случиться так, что B не содержит бесконечной арифметической прогрессии?

5. Существует ли такая последовательность $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$ натуральных чисел, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M?

6. Можно ли окрасить целочисленные точки плоскости в 2007 цветов так, чтобы все цвета присутствовали, на каждой прямой (содержащей не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической? (Раскраска плоскости называется периодической, если найдется ненулевой целочисленный вектор, при сдвиге на который раскраска переходит в себя.)

7. Существует ли такая функция $f\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, не являющаяся многочленом от двух переменных, что для любого $a \in \mathbb{Q}$ функции $f(a, x)$ и $f(x, a)$ являются многочленами?

Зачетные задачи: 3–5.

Комментарии, указания и решения

1. а) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — первые члены прогрессий. Возьмем $N = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$ подряд идущих натуральных чисел $A+1, A+2, \ldots, A+N$, где $A > \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Легко видеть, что среди выбранных N чисел в i-й прогрессии лежит ровно $\dfrac{N}{d_i}$ чисел (ровно одно из d_i подряд идущих). Отсюда $N = \dfrac{N}{d_1} + \dfrac{N}{d_2} + \ldots + \dfrac{N}{d_n}$. Сокращая на N, получаем требуемое.

б) *Ответ*: неверно.

Приведем разбиение на прогрессии, для которого $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \ldots = \dfrac{1}{2^k}$, где k — фиксированное натуральное число. Для этого подберем прогрессии с разностями $d_i = 2^{i+k}$.

Опишем выбор первых членов прогрессий a_i. Пусть $a_1 = 1$. Если $a_1, \ldots, a_n$ уже выбраны, то пусть a_{n+1} — наименьшее натуральное, не входящее ни в одну из прогрессий. (Подумайте почему такое число найдется даже среди первых d_n чисел?) Так как d_{n+1} делится на $d_1, d_2, \ldots, d_n$, то прогрессия с номером $n+1$ не пересекается с уже определенными (докажите?).

2. а) Перенесем параллельно углы-прожекторы так, чтобы все они имели общую вершину O. Пусть сумма углов меньше $360°$. Тогда найдется луч с началом в O, не освещенный перенесенными прожекторами. Нетрудно доказать, что до параллельного переноса каждый прожектор освещал на этом луче ограниченную часть (отрезок или пустое множество), поэтому часть луча была неосвещенной — противоречие.

б) *Ответ*: неверно.

Опишем покрытие углами величиной $\alpha_i = \left(\frac{1}{2^{i+k}}\right)^\circ$, так что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \left(\frac{1}{2^k}\right)^\circ.$$

Рассмотрим круги радиусами $1, 2, \ldots$ с центром в начале координат. Ясно, что если каждый из этих кругов будет покрыт некоторым углом, то вся плоскость будет покрыта. Круг радиусом i покроем углом с номером i, взяв вершину угла очень далеко от начала координат.

Контрольный вопрос

В каких моментах решения задач 1 а) и 2 а) использовалась конечность множества?

Во всех задачах 3–7 ответ на вопрос положителен. Как и в задачах 1 б), 2 б), объект, существование которого требуется доказать, можно «конструировать» за счетное число шагов. Предположим, что после n-го шага построено множество K_n. На $(n+1)$-м шаге множество K_n «достраивается» до множества $K_{n+1} \supset K_n$. Искомой конструкцией является множество $K = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Ниже используется тот факт, что для счетных множеств A_i множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ (т. е. множество упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in A_i$), счетно.

3. Занумеруем клетки произвольным образом. Расставляем числа $1, 2, 3, \ldots$ по порядку, руководствуясь следующим правилом. На первом шаге поставим число 1 в клетку с номером 1. Пусть после n шагов уже расставлены числа $1, 2, \ldots, n$ и пусть k — минимальный номер клетки, в которой еще нет числа. Поставим число $n+1$ в клетку с номером k, если $n+1$ просто. В противном случае поставим $n+1$ в любую такую клетку, что в ее строке и столбце еще не расставлено чисел. Через несколько шагов клетка с номером k будет занята, так как простых чисел бесконечно много.

4. Занумеруем произвольным образом все бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел (множество прогрессий счетно, так как прогрессия определяется первым членом и разностью). Положим $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, где числа a_1, a_2, ... определяются следующим образом. Пусть a_1 — любое число из прогрессии с номером 1. Если a_n уже определено, то возьмем a_{n+1} из прогрессии с номером $n+1$ так, чтобы выполнялось неравенство $a_{n+1} > 2a_n$. Легко видеть, что множества A и $B = \mathbb{N} \setminus A$ удовлетворяют условию.

5. Опишем построение последовательности $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$, для которой наборы $M_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям:

1) $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2k}$;

2) все разности вида $r_{ij} = a_j - a_i$ для $1 \leqslant i < j \leqslant 2k$ различны;

3) множество $R_k = \{r_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 2k\}$ содержит числа $1, 2, \ldots, k$.

Это даст нам нужный пример.

Положим $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, т. е. $M_1 = \{1, 2\}$, и для M_1 условия 1)–3) выполнены.

Пусть уже построено $M_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k}\}$, для которого условия 1)–3) выполнены. Если $k+1 \notin R_k$, то положим $a_{2k+1} = 2a_{2k}$, $a_{2k+2} = 2a_{2k} + k + 1$. Если $k+1 \in R_k$, то положим $a_{2k+1} = 2a_{2k}$, $a_{2k+2} = 4a_{2k}$.

Нетрудно показать, что для $M_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k+2}\}$ условия 1)–3) выполнены.

6. Занумеруем прямые, содержащие бесконечное множество целочисленных точек. Занумеруем ненулевые целочисленные векторы. На первом шаге покрасим первую прямую периодично, используя 2007 цветов. На i-м ($i \geqslant 2$) шаге покрасим периодично i-ю прямую, (это возможно, так как до i-го шага на ней покрашено конечное число точек), а затем найдем две еще не покрашенные точки, отстоящие на вектор с номером $i-1$, и окрасим их в разные цвета. Из определения процедуры вытекает, что окраска каждой прямой периодична, но окраска плоскости непериодична, так как раскраска не совмещается сдвигом ни на какой целочисленный вектор.

7. Опишем построение нужной функции f. Занумеруем рациональные числа $q_1, q_2, \ldots$ На первом шаге положим $f(q_1, y) = f(x, q_1) = 0$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}$. На i-м ($i \geqslant 2$) шаге будем задавать значения $f(x, y)$ на прямых $x = q_i$ и $y = q_i$. Перед i-м шагом уже определены значения функции f лишь в конечном числе точек прямой $x = q_i$ (а именно в точках (q_i, q_1), (q_i, q_2), …, (q_i, q_{i-1})). Подберем такой многочлен $g_i(y)$ степени больше i, что $g_i(q_k) = f(q_i, q_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, i-1$ (такой многочлен найдется; это можно доказать, например, с использованием *интерполяционного многочлена Лагранжа*), и положим $f(q_i, y) = g_i(y)$. Далее, положим $f(x, q_i) = h_i(x)$, где $h_i(x)$ — такой многочлен степени больше i, что $h_i(q_k) = f(q_k, q_i)$ для $k = 1, 2, \ldots, i$. Этим завершается i-й шаг построения.

Если бы функция $f(x, y)$, полученная в результате такого построения, была многочленом от двух переменных, то степени многочленов $f(x, q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ были бы ограничены, что неверно.

Другой взгляд на задачи 1, 2

1. Пусть M — некоторое подмножество натурального ряда. Рассмотрим последовательность $q_n = \dfrac{k(n)}{n}$, где $k(n)$ — количество чисел множества M среди чисел $1, 2, \ldots, n$. Если существует предел $Q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$, то назовем Q *мерой* подмножества M, $Q = \mu(M)$. (Конечно, это понятие отличается от классического определения меры, скажем, тем, что объединение двух *измеримых* множеств, т. е. множеств, для которых определена мера, не обязательно измеримо.) В некотором смысле, мера $\mu(M)$ представляет собой вероятность того, что случайно выбранное натуральное число будет числом из множества M. Легко заметить, что $\mu(\mathbb{N}) = 1$, мера конечного множества равна 0, мера бесконечной арифметической прогрессии с разностью d равна $1/d$. (Покажите, что существуют неизмеримые подмножества; найдите меру множества точных квадратов, множества простых чисел и т. д.) Нетрудно доказать, что мера μ аддитивна, т. е. для измеримых непересекающихся подмножеств A и B, множество $A \cup B$ измеримо, причем $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Из аддитивности меры μ вытекает равенство из задачи 1 а). Однако, мера μ не является σ-аддитивной, т. е. для попарно непересекающихся измеримых подмножеств $A_1, A_2, \ldots$ равенство $\mu\Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Bigr) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ выполнено не всегда (и вообще, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ может не быть измеримым): например, $\mathbb{N}$ — объединение множеств, состоящих из одного числа. Пример из задачи 1 б) также доказывает отсутствие σ-аддитивности меры μ.

2. Аналогично изложенному выше можно попытаться определить меру для некоторых подмножеств M плоскости. Пусть $q_R = \dfrac{S_R}{\pi R^2}$, где S_R — площадь (кстати, что такое площадь?) множества $M \cap C_R$ (C_R — круг радиуса R с центром в начале координат). Если существует предел $Q = \lim\limits_{R\to+\infty} q_R$, то назовем Q *мерой* подмножества M, $Q = \mu(M)$. В некотором смысле мера $\mu(M)$ представляет собой вероятность того, что случайно выбранная точка плоскости будет точкой из множества M. Легко заметить, что мера всей плоскости равна 1, мера ограниченного подмножества плоскости множества равна 0, мера внутренности угла величины α° равна $\alpha/360$. (Покажите, что существуют неизмеримые подмножества; изменится ли понятие измеримости и мера, если изменить начало координат, если C_R — не круги, а, скажем, квадраты $|x| + |y| \leqslant R$?) Как и в задаче 1, мера μ оказывается аддитивной, но не является σ-аддитивной. Подумайте, как получить из этих соображений другое решение задачи 2.

Игры (8–10)

Д. А. Пермяков, М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов

1. Симметрия, передача хода и дерево позиций (8–10). *Д. А. Пермяков, М. Б. Скопенков*

Целью данного цикла задач является знакомство с некоторыми красивыми идеями теории игр. Для решения задач данного раздела полезно знакомство с инвариантами, поскольку на них основаны многие стратегии в играх (пример инварианта — симметричность позиции). Поэтому может быть полезно прорешать сначала задачи раздела «Инвариант».

Довольно часто в задачах элементарной теории игр встречаются следующие 3 идеи. Проиллюстрируем их на конкретных примерах.

I. Симметричная стратегия (а также ее обобщение — *дополняющая стратегия*). Двое по очереди выкладывают доминошки на доску 8×9. Каждая доминошка покрывает ровно две клетки доски, каждая клетка может быть покрыта не более чем одной доминошкой. Проигрывает тот игрок, который не может положить очередную доминошку. Кто выигрывает при правильной игре? Как он должен для этого играть?

II. Передача хода. В *двухходовых* шахматах фигуры ходят по обычным правилам, только за каждый ход разрешается сделать ровно два хода одной фигурой. Цель игры — съесть короля соперника. Докажите, что белые в двухходовых шахматах могут играть так, что заведомо не проиграют (т. е. либо выиграют, либо сыграют вничью).

III. Дерево позиций («ставь на минус!»). Ферзь стоит на d1. Двое по очереди ходят им по направлению вверх, вправо или вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит его на h8. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен для этого играть?

В следующих задачах необходимо выяснить, кто из игроков может выиграть, как бы хорошо ни играл противник.

1. В соседних углах доски 9×9 стоят черная и белая ладьи, остальные клетки заняты серыми пешками. Два игрока ходят по очереди, каждый своей ладьей, причем каждым ходом нужно съесть либо серую пешку, либо ладью противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. На шахматной доске стоит король. Двое по очереди ходят им. Проигрывает игрок, после хода которого король оказывается в клетке, в которой побывал ранее.

3. На одном столе лежит 34 камня, на другом — 42. Играют двое. За ход можно переложить со стола, на котором лежит n камней, на другой стол число камней, равное делителю числа n (возможно, все n камней). Проигрывает игрок, после хода которого будет расположение камней, уже встречавшееся в игре. Камни считаются одинаковыми, столы — разными.

4. На бесконечной клетчатой бумаге двое по очереди закрашивают отрезки между соседними узлами сетки, каждый своим цветом. Цель первого — получить замкнутую ломаную своего цвета. Игра длится сколь угодно долго. Сможет ли второй помешать своему противнику?

5. На доске написано число 2. За ход разрешается прибавить к числу на доске любой из его делителей, меньший самого числа. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1 000 000.

6. На столе лежит две кучки спичек: в одной m, в другой n спичек, $m > 2n$. Играют двое. За ход можно взять из одной кучки ненулевое число спичек, делящееся на число спичек во второй кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку из какой-нибудь кучки.

7. Город представляет собой прямоугольную сетку 10×12. Две компании по очереди ставят на неосвещенных перекрестках фонари. Каждый фонарь освещает в городе прямоугольник с вершиной в этом фонаре, являющийся северо-восточным углом города. Проигрывает компания, которая осветит последний перекресток.

8. Два игрока играют на доске $m \times n$ в следующую игру. У них есть белый и черный король соответственно, стоящие в противоположных углах доски. Они передвигают своих королей (по правилам шахмат) поочередно так, чтобы расстояние между центрами клеток, на которых стоят короли, уменьшалось (королям разрешается занимать соседние клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Дополнительные задачи

9. В центре квадрата находится волк, а в углах — по собаке. Скорость собаки в $1,5$ раза больше скорости волка, но они могут перемещаться только по границе квадрата. Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Сможет ли волк выбежать за пределы квадрата?

10. Даны две кучки спичек. В одной 1997, в другой 1998 спичек. Двое играют в следующую игру: при своем ходе каждый выбрасывает одну из двух кучек, а другую делит на две не обязательно равные кучки. Проигравшим считается тот, кто не может разделить кучку на две части. Может ли первый игрок выиграть при правильной игре второго? Как он должен для этого играть?

11. Назовем натуральное число *разрешенным*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. Вначале имеется кучка из $2004!$ камней. Двое по очереди берут из кучки по разрешенному количеству камней, выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выигрывает при правильной игре — тот, кто берет камни первым, или его соперник?

12. На шахматной доске 1000×1000 стоит черный король и 499 белых ладей. Докажите, что черный король независимо от игры белых может стать под удар белой ладьи.

13. Есть чашечные весы и n гирь различного веса. Докажите, что можно выкладывать гири по одной на весы в таком порядке, чтобы порядок, в котором перевешивают левая и правая чаши был любым наперед заданным.

Зачетные задачи: 1, 3, 4, 5, 6, 8.

Контрольные вопросы

I. К какому результату приведет симметричная стратегия черных (зеркально-симметричное копирование ходов противника) в обычных шахматах при правильной игре белых?

а) К ничьей; б) к выигрышу белых; в) к выигрышу черных.

II. Правила *шахмат без цугцванга* отличаются от правил обычных шахмат только добавлением возможности пропустить свой ход для каждого из игроков. Могут ли черные выиграть при правильной игре белых? а) Могут; б) не могут.

III. Кто выигрывает в игре из задачи III, если в начальный момент ферзь стоит на клетке f4?

а) Первый игрок; б) второй игрок.

Решения

I. *Ответ*: выигрывает первый игрок.

Решение: первым ходом первый игрок кладет доминошку в центр доски (т. е. на две клетки, примыкающие к центру), а в дальнейшем симметрично копирует ходы второго игрока (используя центральную симметрию относительно центра доски).

II. Предположим, что выигрышная стратегия в этой игре есть у черных. Тогда сделаем белыми первый ход Kb1-c3-b1 (два последовательных прыжка конем, после которых он возвращается на исходную клетку), и в дальнейшем будем играть, пользуясь этой выигрышной стратегией для черных. Ясно, что действуя таким образом, белые заведомо не проиграют. Полученное противоречие показывает, что у белых *существует* беспроигрышная стратегия.

Замечание. Было бы неправильно говорить, что после хода Kb1-c3-b1 возникла начальная позиция, но с ходом черных. Дело в том, что *позиция* в шахматах определяется не только положением фигур на доске, но также и некоторой дополнительной информацией (ввиду правила о праве на рокировку, правила 3 ходов и правила 50 ходов). Тонкости данного доказательства можно найти в книге: *Карпов А. Е.*, *Гик Е. Я.* Шахматный калейдоскоп // Библиотечка «Кванта». 1981. Вып. 13. См. также Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. — Киров: АСА, 1994.

III[2] Наша цель — поставить в каждую клетку доски 8×8 знак «$+$» или знак «$-$», в зависимости от того, какой игрок выигрывает при начальном положении ферзя на данной клетке. Будем заполнять клетки шахматной доски последовательно, начиная с 8-й горизонтали, вертикали «h» и диагонали a1-h8. Ясно, что в любой клетке 8-й горизонтали, вертикали «h» и диагонали a1-h8 (кроме клетки h8) нужно поставить знак «$+$». Нетрудно усмотреть, что дальше клетки заполняются, исходя из следующих двух правил:

1) если из данной клетки можно сделать допустимый ход в клетку, в которой стоит знак «$-$», то в данной клетке нужно поставить знак «$+$»;

2) если при любом допустимом ходе из данной клетки мы попадаем в клетку со знаком «$+$», то в данной клетке нужно поставить число знак «$-$».

Пользуясь этими правилами, мы заполним все клетки шахматной доски. Знак, который окажется на клетке c1, покажет нам, кто выигрывает в рассматриваемой игре.

[2] См. книгу: *Генкин С. А.*, *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.*

Приведем результат заполнения клеток шахматной доски.

1) Ставим «+» в клетках a8, b8, c8, d8, e8, f8, g8, h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, a1, b2, c3, d4, e5, f6, g7.

2) Ставим знак «−» в клетках f7 и g6.

3) Ставим знак «+» в клетках a7, b7, c7, d7, e7, a6, b6, c6, d6, e6, f1, f2, f3, f4, f5, g1, g2, g3, g4, g5, a2, b3, c4, d5, b1, c2, d3, e4.

4) Ставим знак «−» в клетках c5 и e3.

5) Ставим «+» в клетках a5, b5, a3, b4, c1, d2, e1.

6) Ставим знак «−» в клетках a4 и d1.

Итак, в клетке d1 стоит знак «−». Значит, в нашей игре выигрывает второй игрок. Его выигрышная стратегия такова: после каждого хода первого игрока он должен вновь поставить ферзя на клетку, в которой стоит знак «−» (т. е. на одну из клеток e3, f7, g6).

2. *Дополняющая стратегия.* Докажем, что выигрывает первый игрок. Разобьем доску на «доминошки», т. е. пары соседних по стороне клеток. Каждым ходом первый игрок будет передвигать короля во вторую клетку той доминошки, где он перед этим ходом оказался. Тогда после каждого хода первого игрока король побывает для каждой доминошки либо в обеих ее клетках, либо ни в одной из них. Значит, после хода второго он сможет сделать очередной ход по нашей стратегии.

5. *Передача хода.* Первый игрок напишет число 3, второй — число 4. Далее первый может написать число 6, а может написать число 5, и тогда второй напишет число 6. После написания числа 6 выигрышная стратегия есть либо у ходящего, либо у его противника. Так как первый игрок после написания числа 6 может по своему желанию оказаться и ходящим, и противником ходящего, он может воспользоваться выигрышной стратегией. Таким образом, мы не показали, как именно должен играть первый игрок, но доказали, что у него есть выигрышная стратегия.

8. *Указание. Построение дерева позиций.* Поставим в клетку с координатами $(x; y)$ таблицы $m \times n$ знак «+», если при игре на доске $x \times y$ выигрывает первый игрок, и знак «−», если выигрывает второй игрок. Будем заполнять таблицу последовательно, начиная с клеток (1; 2) и (2; 1). В этих клетках поставим знак «−», а в дальнейшем будем пользоваться следующими правилами:

1) если из данной клетки можно сделать ход королем в клетку, в которой стоит знак «−», причем так, чтобы расстояние до центра клетки (1; 1) уменьшилось, то ставим в данной клетке знак «+»;

2) если при любом ходе королем из данной клетки (таком, что расстояние до центра клетки (1; 1) уменьшается) мы попадаем в клетку со знаком «+», то ставим в данной клетке знак «−».

Замечание. Нужно обратить внимание, что возможны ходы, при которых расстояние между центрами клеток, на которых стоят короли, уменьшается, но при этом разность координат этих центров по одной из осей увеличивается.

2. Игры-шутки, игра на опережение, накопление преимущества (8–9). *А. В. Шаповалов*

Кроме игр, допускающих симметричную стратегию, передачу хода или построение полного дерева игры, бывают еще игры-шутки, игры на опережение, игры на накопление преимущества.

Другие распространенные приемы, применяющиеся в теории игр (но которые в данной книге мы не рассматриваем) — «жадный алгоритм» и «заповедник».

IV. Игры-шутки

В таких играх побеждает всегда одна из сторон независимо от ее желания.

1. а) На столе лежат 2007 кучек по одному ореху. За один ход разрешается объединить две кучки в одну. Двое играющих делают ходы по очереди, кто не сможет сделать ход — проигрывает. Кто выиграет?

б) То же, но разрешается объединять кучки только с одинаковым числом орехов.

2. Дана клетчатая полоса $1 \times N$. Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать (как бы ни играл его соперник)?

V. Игра на опережение

Игра на опережение — распространенный прием в нематематических играх. Но и в математических играх бывает, что выигрыш достается тому, кто первый сумеет занять ключевое положение. После этого, как правило, работает дополняющая стратегия.

3. Есть 9 запечатанных коробок соответственно с $1, 2, 3, \ldots, 9$ фишками. Двое играющих по очереди берут по одной фишке из любой коробки, распечатывая, если необходимо, коробку. Проигрывает тот, кто последним распечатает коробку. Кто из них может всегда выиграть независимо от игры противника?

4. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном — квадрат 1×1. Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря — большой квадрат, а Миша — маленький. Боря выигрывает, если не позднее 100-го хода Мишин квадрат окажется на клетке, накрытой Бориным квадратом. Может ли Боря выиграть независимо от игры Миши, если

а) первым ходит Боря;

б) первым ходит Миша?

5. Вначале есть 100 прямоугольников 2×1. Каждым ходом надо выбрать из имеющихся два прямоугольника с равной стороной и склеить их по этой стороне в один больший прямоугольник. Двое ходят по очереди, кто не может сделать ход — проиграл. Кто из игроков может выиграть независимо от игры противника?

VI. Накопление преимущества. Тоже весьма распространенный прием в нематематических играх. В математических играх накопление обычно связано с каким-нибудь полуинвариантом. При этом надо придумать алгоритм, ведущий к накоплению независимо от сопротивления соперника.

6. Миша стоит в центре круглой лужайки радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он объявляет направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать?

7. На клетчатой доске $1 \times 100\,000$ (вначале пустой) двое ходят по очереди. Первый может за ход выставить два крестика в любые два свободных поля доски. Второй может стереть любое количество крестиков, идущих подряд — без пустых клеток между ними. Если после хода первого образуется 13 или более крестиков подряд, он выиграл. Может ли первый выиграть при правильной игре обеих сторон?

8. Двое играющих по очереди ломают палку: первый на две части, затем второй ломает любой из кусков на две части, затем первый — любой из кусков на две части, и т. д. Один из игроков выигрывает, если сможет после какого-то из своих ходов сложить из 6 кусков два равных треугольника. Может ли другой ему помешать?

Решения

1. *Указание.* В обоих случаях общее число ходов не зависит от хода партии.

2. *Указание.* После ответного хода на край победу второго никто не сможет предотвратить.

3. Выигрывает второй. Первыми четырьмя ходами он должен распечатать 4 коробки с четным числом фишек. Поскольку нечетных коробок больше, то по крайней мере одна коробка с нечетным числом фишек останется нераспечатанной. Следовательно, последней будет распечатана именно такая коробка. Но в остальных коробках в сумме — четное число фишек, поэтому они могут кончиться только после хода второго, т. е. последнюю коробку будет вынужден распечатать первый.

4. а), б) Нет. Пусть 2×2 накрывает клетки a1 и b2, 1×1 — клетку h8. Назовем узлом A верхнюю правую вершину клетки f6, узлом B — верхнюю правую вершину клетки d6. Миша должен двигать свой квадрат к соответствующему узлу (A в случае а), B в случае б), и бегать вокруг него, уклоняясь от накрывания.

5. *Указание.* Миша должен увеличивать расстояние до центра лужайки.

6. *Указание.* Вначале первый наращивает число групп из 13 полей с шестью дырками, затем — с пятью, и т. д.

7. *Ответ.* Нет.

8. *Набросок решения.* Первый ломает пополам, затем повторяет симметрично ходы второго, пока не образуется 5 пар равных кусков $a > b > c > d > e$. Если ни из какой тройки нельзя сложить треугольник, то первый отламывает от a кусок длины c. Второй обязан разломить c (иначе первый при своем ходе отломит кусок длины c от b и сможет сложить два равнобедренных треугольника либо со сторонами c, c, d, либо со сторонами c, c, e). Первый отламывает кусок длины c от другого a, затем — по c от $a - c$ и т. д., пока не станет возможным сложить треугольник из $a - kc$, b и c.

Сложность суммирования [3] (9–11)

Ю. Г. Кудряшов, А. Б. Скопенков

9–10 класс

1. Пусть имеется набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_{99}$. Разрешается складывать два из уже имеющихся чисел и запоминать полученный результат. За какое наименьшее количество сложений можно найти суммы

а) $x_1 + \ldots + x_{99}$;

[3] Этот цикл задач предлагался на ЛКТГ в 2003 г. Благодарим И. Никокошева за полезные обсуждения.

б) $x_1 + \ldots + x_{66}$ и $x_{34} + \ldots + x_{99}$?

Обозначим через $\mathbb{Z}_2$ множество $\{0, 1\}$. Введем на этом множестве операцию сложения (по модулю 2) формулами

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1.$$

Далее будут рассматриваться только переменные из $\mathbb{Z}_2$ (кроме задачи 3).

Пусть имеется набор переменных $x_1, \ldots, x_n$ из $\mathbb{Z}_2$. Разрешается складывать (по модулю 2) два из уже имеющихся выражений и запоминать полученный результат.

2. За какое наименьшее количество сложений можно найти суммы

а) $x_1 + \ldots + x_{99}$?

б) $x_1 + \ldots + x_{66}$ и $x_{34} + \ldots + x_{99}$?

3. Придумайте такой набор сумм, что число сложений, необходимое для его вычисления, если переменные действительные, больше, чем минимальное число сложений, необходимое для его вычисления, если переменные из $\mathbb{Z}_2$.

4. а) Докажите, что любую пару сумм $x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}$ и $x_{j_1} + \ldots + x_{j_q}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, можно найти за не более чем $n - 1$ суммирование.

б) Докажите, что любую тройку сумм $x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}$, $x_{j_1} + \ldots + x_{j_q}$ и $x_{k_1} + \ldots + x_{k_r}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, можно найти за не более чем $n + 1$ суммирование.

5. Докажите, что любой набор сумм вида $x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$, можно найти за не более чем $2^n - (n + 1)$ суммирование.

6. Пусть любой набор из m сумм от n переменных можно найти за l сложений.

а) Докажите, что любой набор из km сумм от тех же n переменных можно найти за не более чем kl сложений.

б) Докажите, что любой набор из m сумм от kn переменных $x_1, \ldots, x_{kn}$ можно найти за не более чем $k(l + m)$ суммирований.

7. а) Докажите, что при достаточно больших m, n любой набор из m сумм от n переменных можно найти не более чем за $\dfrac{mn}{100}$ суммирований.

б) Докажите, что любой набор из m сумм от n переменных можно найти за не более чем $2m\left\lceil \dfrac{n}{[\log_2 m]} \right\rceil$ суммирований. Здесь $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, $\lceil x \rceil$ — верхняя целая часть числа x, т. е. наименьшее целое число, не меньшее x.

Зачетные задачи: 1–6.

10–11 класс

Последовательность суммирований можно представлять себе следующим образом. У нас есть набор элементов («сумматоров») с двумя входами и одним выходом, равным сумме по модулю 2 входов (этот выход можно «размножать», т. е. использовать несколько раз). Необходимо собрать схему из сумматоров, реализующую данный набор сумм.

При этом количество суммирований равно числу использованных сумматоров. Это число называется *сложностью схемы.*

Минимальная сложность схемы, реализующей данный набор M сумм называется *сложностью этого набора сумм* и обозначается $\mathrm{L}(M)$.

В этих обозначениях в задаче 2 требовалось найти $\mathrm{L}(\{x_1 + \ldots + x_{99}\})$ и $\mathrm{L}(\{x_1 + \ldots + x_{66}, x_{34} + \ldots + x_{99}\}$.

Минимальное такое число l, что любой набор из m сумм от переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно найти за l суммирований называется *сложностью упорядоченной пары* (m, n) и обозначается $\mathrm{L}(m, n)$.

В этих обозначениях задача 4 утверждает, что $\mathrm{L}(2, n) \leqslant n - 1$ и $\mathrm{L}(3, n) \leqslant n + 1$, а задача 7б) утверждает, что

$$\mathrm{L}(m, n) \leqslant 2m \left\lceil \frac{n}{[\log_2 m]} \right\rceil.$$

Набор из m сумм от n переменных можно обозначать матрицей M размера $m \times n$, где на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если j-я переменная входит в i-ю сумму, и 0 — в противном случае. При этом i-я сумма будет записываться очень просто:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} x_j.$$

В этих обозначениях наборы сумм из задачи 2 выглядят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим набор из m сумм, составленных из переменных $x_0, \ldots$ $\ldots, x_{2^m - 1}$, в который все переменные входят «по-разному». Пусть B_m — соответствующая матрица. Столбцы этой матрицы — это двоичные представления целых чисел от 0 до $2^m - 1$. Формально, обозначим $j = b_{m-1,j}\ 2^{m-1} + \ldots + b_{0,j}\ 2^0$ двоичную запись числа $j < 2^m$. Тогда

$B_m = (b_{i,j})$. Например,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Докажите, что $\mathrm{L}(B_m) < 2^{m+1}$.

9. Докажите, что $\mathrm{L}(m, n) < n + 2^{m+1}$.

10. Докажите, что при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\mathrm{L}(n, n) < \frac{n^2}{0,9 \log_2 n}.$$

11. Докажите, что

а) существует не более чем $(n+k)^{m+2k}$ схем из k сумматоров с n входами и m выходами;

б) если $k = \mathrm{L}(m, n)$, то $mn \leqslant (m+2k)\log_2(n+k)$;

в) при достаточно больших n верно неравенство $\mathrm{L}(n, n) \geqslant \dfrac{n^2}{5\log_2 n}$;

г) для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\mathrm{L}(n, n) \geqslant \frac{n^2}{(4+\varepsilon)\log_2 n}.$$

Для формулировки последующих результатов нам потребуются некоторые асимптотические обозначения.

Говорят, что последовательность $a_n > 0$ асимптотически *не больше* последовательности $b_n > 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется лишь конечное множество таких индексов k, что $a_n > (1+\varepsilon)b_n$. Обозначение: $a_k \lesssim b_k$. В этих обозначениях задача 11(г) примет следующий вид: $\mathrm{L}(n, n) \gtrsim \dfrac{n^2}{4\log_2 n}$.

Говорят, что последовательности a_n и b_n эквивалентны ($a_n \sim b_n$), если $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ есть o-малое от $\{b_n\}$ ($a_n \ll b_n$), если $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

12. а) Докажите, что если $a_n \lesssim b_n$ и $b_n \lesssim c_n$, то $a_n \lesssim c_n$.

б) Докажите, что $a_n \sim b_n$ тогда и только тогда, когда $a_n \lesssim b_n$ и $b_n \lesssim a_n$.

13. Докажите, что если $\log_2 n \ll f(n) \ll 2^n$, то

$$\frac{nf(n)}{2\log_2(nf(n))} \lesssim \mathrm{L}(f(n), n).$$

14. Докажите, что при $\log_2 n \ll f(n) \ll 2^n$

$$\mathrm{L}(f(n), n) \lesssim \frac{nf(n)}{\log_2 f(n)}.$$

15. Докажите, что при $\log_2 n \ll f(n) \ll 2^n$

$$\mathrm{L}(f(n), n) \lesssim \frac{nf(n)}{\log_2 n}.$$

Из задач 13, 14 и 15 следует, что при $\log_2 n \ll f(n) \ll 2^n$ выполнено асимптотическое неравенство

$$\frac{nf(n)}{2\log_2(nf(n))} \lesssim \mathrm{L}(f(n), n) \lesssim \frac{nf(n)}{\max(\log_2 n, \log_2 f(n))}.$$

16. а) Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$, в которой нет нулевых строк и нет нулевых столбцов. Верно ли, что $\mathrm{L}(A) + m = \mathrm{L}(A^t) + n$, где A^t — транспонированная матрица?

б) Верно ли, что $\mathrm{L}(m, n) + m = \mathrm{L}(n, m) + n$?

в) Найдите $\mathrm{L}(B_m)$.

17 (нерешенная)*. Рассмотрим набор переменных $x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, занумерованных вершинами n-мерного единичного куба $\mathbb{Z}_2^n$. Требуется найти суммы во всех гранях, содержащих вершину $(0, \ldots, 0)$. Другими словами, для каждого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ требуется найти $\sum\limits_{\forall i:\beta_i \leqslant \alpha_i} x_{\beta_1\ldots\beta_n}$. За какое наименьшее число суммирований (mod 2) это можно сделать?

18*. Попробуйте получить аналогичные результаты для переменных из $\mathbb{R}$ в следующих случаях:

а) требуется найти набор сумм, есть только сумматоры;

б) требуется найти набор сумм, есть два вида элементов: сумматоры и разности;

в) требуется найти набор линейных комбинаций с целыми коэффициентами. Есть два вида элементов: сумматоры и умножатели на целую константу (быть может, разную для разных умножателей).

Зачетные задачи: 8–11, 13–16.

Решения

1. а) *Ответ*: 98. Очевидно, что сумму $x_1 + \ldots + x_{99}$ можно найти за 98 суммирований. Допустим, у нас есть схема из a сумматоров, реализующая нашу сумму. Рассмотрим граф, в котором 99 вершин $P_1, \ldots, P_{99}$ и для каждого сумматора с суммой на первом входе $x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}$ и суммой на втором входе $x_{j_1} + \ldots + x_{j_q}$ проводится ребро из вершины P_{i_1} в вершину P_{j_1}. Ясно, что в каждый момент вершины, соответствующие переменным, входящим в одну из уже вычисленных сумм, лежат в одной компоненте связности. Следовательно, конечный граф связен, а значит, в нем не менее 98 ребер, т. е. $a \geqslant 98$.

б) *Ответ*: 98. Доказательство аналогично п. а).

2. Решение дословно повторяет решение задачи 1.

3. Подходит, например, следующий набор:

$$\{x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_2 + x_3 + x_4\}.$$

Действительно, в случае $\mathbb{Z}_2$ мы можем вычислить эти суммы в указанном порядке без вычисления вспомогательных сумм, а в случае $\mathbb{R}$ нам придется вычислять хотя бы одну вспомогательную сумму.

4. а) Обозначим через $S(A)$ сумму всех переменных, индексированных элементами множества A. Пусть $S(A_1)$ и $S(A_2)$ — искомые суммы. Если все множества $B_1 := A_1 \setminus A_2$, $B_2 := A_1 \cap A_2$ и $B_3 := A_2 \setminus A_1$ непусты, то вычислим сумму в каждом из этих множеств, потратив на это не более

$$|B_1| - 1 + |B_2| - 1 + |B_3| - 1 = |A_1 \cup A_2| - 3 \leqslant n - 3$$

суммирований. Осталось найти

$$S(A_1) = S(B_1) + S(B_2) \quad \text{и} \quad S_2 = S(B_2) + S(B_3).$$

Для этого достаточно двух суммирований.

Можно несложно (например, перебором) убедиться, что в случае когда одно из множеств пусто, требуется не больше суммирований, чем в этом случае.

б) Аналогично п. а).

5. Несложно видеть, что $2^n - (n+1)$ — это число всех сумм от n переменных, имеющих хотя бы два слагаемых. Эти суммы мы можем последовательно вычислять: сначала суммы с двумя слагаемыми, потом суммы с тремя слагаемыми $\ldots$ потом сумму с n слагаемыми. В результате этого процесса мы вычислим все суммы от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

6. а) Набор из km сумм можно воспринимать как k наборов из m сумм. Реализуя каждый такой набор по отдельности, получаем требуемую оценку.

б) «Разрежем» вертикальными разрезами матрицу, соответствующую нашему набору из m сумм от kn переменных на k матриц размера

$m \times n$. Сначала при помощи kl сумматоров реализуем все полученные матрицы $m \times n$. Тогда каждая искомая сумма является суммой не более чем $k-1$ уже найденных сумм. Следовательно, искомый набор сумм можно реализовать не более чем за $kl + m(k-1) < k(l+m)$ суммирований.

7. а) Из задачи 5 при $n = 500$ получим, что любой набор из m сумм от 500 переменных можно вычислить не более чем за $l = 2^{500}$ суммирований. Следовательно, по задаче 6 б), любой набор из m сумм от $500k$ переменных можно вычислить не более чем за $k(l+m)$ сложений. Таким образом, любой набор из m сумм от n переменных можно вычислить не более чем за

$$\left\lceil \frac{n}{500} \right\rceil (l+m)$$

суммирований. Ясно, что при достаточно больших m и n это меньше, чем $mn/100$.

б) Из задачи 5 получим, что любой набор из m сумм от $[\log_2 m]$ переменных можно вычислить не более чем за $l = 2^{[\log_2 m]} \leqslant m$ суммирований. Следовательно, по задаче 6 б), любой набор из m сумм от $[\log_2 m]k$ переменных можно вычислить не более чем за $k(l+m) \leqslant 2km$ сложений. Таким образом, любой набор из m сумм от n переменных можно вычислить не более чем за

$$2m \left\lceil \frac{n}{[\log_2 m]} \right\rceil$$

суммирований.

9. Рассмотрим произвольную матрицу A размера $m \times n$. Если в этой матрице все столбцы различны, то сложность этой матрицы не превосходит $\mathrm{L}(B_m)$. Если же есть два совпадающих столбца, то, вычислив сначала сумму соответствующих этим столбцам переменных, мы сводим задачу к реализации матрицы $m \times (n-1)$. Следовательно, $\mathrm{L}(m,n) \leqslant \mathrm{L}(B_m) + n < n + 2^{m+1}$.

10. При достаточно больших n выполнена цепочка неравенств

$$\mathrm{L}(n,n) < \left\lceil \frac{n}{[0{,}95 \log_2 n]} \right\rceil \mathrm{L}([0{,}95 \log_2 n], n) < \frac{n}{0{,}94 \log_2 n} \mathrm{L}([0{,}95 \log_2 n], n) <$$
$$< \frac{n}{0{,}94 \log_2 n}\left(n + 2 \cdot 2^{[0{,}95 \log_2 n]}\right) < \frac{n}{0{,}94 \log_2 n}\left(n + 2n^{0{,}95}\right) < \frac{n}{0{,}9 \log_2 n}.$$

11. а) Назовем *началами проводов* входы схемы и выходы сумматоров (всего $n+k$), *концами проводов* выходы схемы и входы сумматоров (всего $m+2k$). Пронумеруем все начала и концы проводов. Сопоставим каждой схеме информацию о том, какие начала проводов подсоединены к каким концам проводов. Понятно, что эта информация однозначно определяет схему. Поэтому искомое число схем не больше, чем число различных вариантов подсоединить к каждому из $m+2k$ концов проводов какое-то из $n+k$ начал проводов, которое равно $(n+k)^{m+2k}$.

б) Так как число различных схем из $\mathrm{L}(m, n)$ элементов с n входами и m выходами не меньше числа матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$, то $2^{mn} \leqslant (n+k)^{m+2k}$. Логарифмируя это неравенство, получаем утверждение задачи.

в) Если $k = \mathrm{L}(n, n) < \dfrac{n^2}{5\log_2 n}$, то $n^2 \leqslant \left(n + \dfrac{2n^2}{5\log_2 n}\right)\log_2\left(n + \dfrac{n^2}{5\log_2 n}\right)$. Докажем, что это неравенство неверно при достаточно больших n. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(n + \frac{2n^2}{5\log_2 n}\right)\log_2\left(n + \frac{n^2}{5\log_2 n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n^2}\left(n + \frac{2n^2}{5\log_2 n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log_2 n}\log_2\left(n + \frac{n^2}{5\log_2 n}\right) = \frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{4}{5}.$$

Осталось воспользоваться определением предела.

Указание. Если $k = \mathrm{L}(n, n) < \dfrac{n^2}{5\log_2 n}$, то

$$n^2 \leqslant \left(n + \frac{2n^2}{5\log_2 n}\right)\log_2\left(n + \frac{n^2}{5\log_2 n}\right),$$

что неверно при достаточно больших n.

г) Этот пункт полностью аналогичен предыдущему.

12. а) Заметим, что если $a_n < b_n\sqrt{1+\varepsilon}$ и $b_n < c_n\sqrt{1+\varepsilon}$, то $a_n < (1+\varepsilon)c_n$. Осталось воспользоваться определением.

б) Утверждение задачи сразу следует из определения символов «$\sim$» и «$\lesssim$».

13. Будем обозначать $m = f(n)$. Если $k = \mathrm{L}(m, n) < \dfrac{mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}$, то

$$mn \leqslant \left(m + \frac{2mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}\right)\log_2\left(n + \frac{mn}{2\log_2(mn)}\right).$$

Докажем, что это неравенство неверно при достаточно больших n. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{mn}\left(m + \frac{2mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}\right)\log_2(n + \frac{mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(mn)}{mn}\left(n + \frac{2mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}\right)\times$$
$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log_2(mn)}\log_2\left(n + \frac{mn}{(2+\varepsilon)\log_2(mn)}\right) = \frac{2}{2+\varepsilon}\cdot 2 = \frac{4}{2+\varepsilon}.$$

Осталось воспользоваться определением предела.

14. Разобьем реализуемую матрицу A на подматрицы ширины $\left[\log_2 \frac{m}{k}\right]$. Каждую подматрицу можно реализовать за $\frac{m}{k}$ суммирований. Следовательно, все подматрицы вместе можно реализовать за $\left\lceil \frac{n}{[\log_2 \frac{m}{k}]} \right\rceil \cdot \frac{m}{k}$ сложений, а саму матрицу A — за

$$\left\lceil \frac{n}{[\log_2 \frac{m}{k}]} \right\rceil \cdot \frac{m}{k} + m\left\lceil \frac{n}{[\log_2 \frac{m}{k}]} \right\rceil \lesssim \frac{k+1}{k}\frac{nm}{\log_2 m}.$$

Поэтому для любого k выполнено асимптотическое неравенство

$$\mathrm{L}(m,n) \lesssim \frac{k+1}{k}\frac{mn}{\log_2 m}.$$

Следовательно, $\mathrm{L}(m,n) \lesssim \frac{mn}{\log_2 m}$, что и требовалось доказать.

15. Аналогично задаче 10 можно доказать, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\mathrm{L}(m,n) \leqslant \frac{mn}{\alpha \log_2 n},$$

что и требуется в задаче.

16. а) Представим схему в виде ориентированного графа, у которого есть вершины четырех видов:

— входы схемы (у них нет входов, один выход),

— сумматоры (у них два входа, один выход),

— размножатели (у них один вход, два выхода),

— выходы схемы (у них один вход, нет выходов).

Как несложно видеть, элемент a_{ij} равен числу путей из j-го входа в i-й выход (по модулю 2). Рассмотрим новый граф, в котором все ребра направлены в противоположную сторону, и соответствующую ему схему. Несложно видеть, что эта схема реализует матрицу A^t. Обозначим l_1 сложность первой схемы, а l_2 — второй. Найдем число ребер нашего графа двумя способами: как число начал ребер первого графа и как число начал ребер второго графа. В первом случае получим $n + l_1 + 2l_2$, а во втором случае получим $m + l_2 + 2l_1$. Следовательно, $n + l_2 = m + l_1$. Так как $l_1 = \mathrm{L}(A)$, то $\mathrm{L}(A^t) \leqslant m - n + \mathrm{L}(A)$. Осталось воспользоваться тем, что $(A^t)^t = A$.

б) Следует из а).

в) Выбросим из матрицы B_m нулевой столбец и обозначим полученную матрицу B'_m. Тогда $(B'_m)^t$ — это матрица, соответствующая набору всех сумм от m переменных. Сложность этого набора сумм мы уже знаем. Используя пункт а), получаем $\mathrm{L}(B_m) = 2^{m+1} - 2m - 2$.

Комбинаторная разминка (10–11)

И. Н. Шнурников

1. Дан правильный треугольник ABC со стороной 3. Треугольник называется «большим», если длины всех его сторон больше 1.

а) Докажите, что из треугольника ABC можно вырезать 100 больших треугольников.

б) Докажите, что треугольник ABC можно целиком разрезать на не менее чем 100 больших треугольников.

2. Хамелеон по очереди спит и ловит мух. Перед первой мухой он спит 1 минуту. Перед поимкой мухи номер $2n$ он спит столько же, сколько и перед поимкой мухи номер n. А перед поимкой мухи номер $2n+1$ спит на одну минуту больше, чем перед поимкой мухи номер $2n$.

а) Сколько мух хамелеон поймает перед своим первым сном в 9 минут?

б) Сколько минут хамелеон проспит перед поимкой мухи номер 98?

3. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

4. Множество A состоит из натуральных чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший равен 100. Каждый элемент A, кроме 1, равен сумме двух (возможно равных) чисел, принадлежащих A. Укажите среди всех множеств A, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

5. В правильном n-угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были покрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

6. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать такой прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади ровно m.

7. Можно ли разместить 2006 точек в единичном квадрате так, чтобы любой прямоугольник площади $\frac{1}{200}$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри себя хотя бы одну из этих точек?

8. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность чисел x_n, что для любых различных m и k выполнено неравенство:

$$|x_m - x_k| \cdot |m-k| \geqslant 1.$$

9. Рассмотрим деталь из 5 клеток в виде буквы мягкий знак (т. е. квадрат 2×2 и еще одна клетка). Прямоугольник $5 \times n$ замощен n такими деталями.

а) Докажите, что число n четно.

б) Докажите, что прямоугольник $5 \times 2n$ можно замостить не менее $2 \cdot 3^{n-1}$ способами.

10. Дан полный граф на 10 вершинах.

а) Покрасьте его ребра в 5 цветов так, чтобы в любом его полном подграфе на 5 вершинах встретились бы ребра всех 5 цветов.

б) Докажите, что ребра графа нельзя покрасить в 4 цвета так, чтобы в любом его подграфе на 4 вершинах встретились бы ребра всех 4 цветов.

Указания

2. Удобнее использовать двоичную систему счисления.

7. Расположим сначала серию из 200 точек: i-я точка имеет координаты $\left(\frac{i}{201}, \frac{1}{2}\right)$, где $i = 1, 2, \ldots, 200$. Теперь любой прямоугольник площади $\frac{1}{200}$, не содержащий точек этой серии, имеет высоту не более $\frac{1}{2}$. Вторая серия состоит из 100 точек с ординатой $\frac{1}{4}$ и 100 точек с ординатой $\frac{3}{4}$, и их абсциссы равны $\frac{i}{101}$, где $i = 1, 2, \ldots, 100$. Аналогично строим третью и четвертую серии. Теперь любой прямоугольник площади $\frac{1}{200}$, параллельный сторонам квадрата, не содержащий точек наших серий, имеет высоту не более $\frac{1}{16}$. Расположим теперь еще 800 точек (4 серии) параллельно другой стороне квадрата и получим нужное расположение точек.

9. Покрасьте клетки таблицы с четными абсциссами и четными ординатами (т. е. всего $2\left(\frac{n-1}{2}\right)$ клеток).

10. Множество ребер одного цвета есть 4 попарно непересекающихся полных подграфа на 3, 3, 3, 1 вершинах соответственно (или на 4, 2, 2, 2).

Немного индукции и перебора (10–11)

И. Н. Шнурников

1. Последовательность целых чисел $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *квадратной*, если

$$|a_1 - a_0| = 1^2, \quad |a_2 - a_1| = 2^2, \quad \ldots, \quad |a_n - a_{n-1}| = n^2.$$

а) Докажите, что для каждого натурального k существует квадратная последовательность, содержащая число k.

б) Найдите минимальное n, такое что существует квадратная последовательность с $a_n = 2007$.

2. В Дубне имеется n принимающих задачи и $2n - 1$ школьник, причем принимающий номер i знает только школьников $1, 2, \ldots, 2i - 1$, а остальных не знает. Докажите, что одновременный прием r задач, такой что каждый принимающий слушал бы только знакомого школьника, можно организовать $C_n^r \cdot \dfrac{n!}{(n-r)!}$ способами.

3. В связном графе есть n вершин, степень каждой не превосходит 3, количество ребер не меньше $\dfrac{5}{4}n$. Докажите, что существует такая не висячая вершина, что после ее удаления граф остается связным.

4. В обществе из 2005 человек есть представители шести стран. Все люди занумерованы числами от 1 до 2005. Докажите, что найдутся люди из одной страны с номерами a, b и c, такие что $a = b + c$, или с номерами a и b, такие что $a = 2b$.

5. Пусть бесконечная арифметическая прогрессия натуральных чисел содержит квадрат и куб натуральных чисел. Докажите, что она содержит и шестую степень натурального числа.

6. Постройте для каждого натурального $n > 2$ такое множество из 2^{n-1} точек плоскости, что никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие $2n$ не образуют выпуклый $2n$-угольник.

7. В конечном графе любые два треугольника имеют общую вершину и нет полного подграфа с 5 вершинами. Докажите, что можно удалить из графа 2 вершины вместе с выходящими из них ребрами так, что полученный граф не будет содержать треугольников.

8. В некоторой стране каждый город соединен дорогами не более чем с тремя другими. Из каждого города можно добраться до любого другого, проехав по не более чем двум дорогам. Для какого максимального числа городов это возможно?

9. В стране 25 городов. Из каждого города выходит не более 23 дорог, и между любыми двумя городами существует путь, проходящий не более чем по 2 дорогам.

а) Докажите, что дорог хотя бы 38.

б) Найдите минимально возможное число дорог.

10. Фундаменты нескольких башен расположены в ряд. На первом фундаменте стоит башня из n кирпичей, остальные фундаменты пока без кирпичей. Если некоторая башня содержит хотя бы на 2 кирпича больше, чем следующая, то один кирпич перекладывается (из большей в меньшую). Если есть несколько вариантов перекладки (несколько пар башен), то выбирается любой из них. Найдите конечное распределение кирпичей по башням.

Указания

1. Заметьте, что

$$m^2 - (m-1)^2 - (m-2)^2 + (m-3)^2 = 4.$$

2. Обозначим требуемое число способов за $a(n, r)$ и найдем рекуррентную зависимость. В приеме задач принимающий номер n может участвовать, а может и нет. Количество первых вариантов равно $(2n-r)a(n-1, r-1)$, так как остальные принимающие дают $a(n-1, r-1)$ способов, а после них остается еще $2n-r$ школьник. Число вторых вариантов равно $a(n-1, r)$. Итак

$$a(n, r) = a(n-1, r) + (2n-r)a(n-1, r-1).$$

3. Сведите утверждение задачи для исходного графа к аналогичному утверждению для его подграфа.

4. Сведите утверждение задачи к аналогичному утверждению для меньшего числа стран.

5. Воспользуемся индукцией по разности прогрессии.

8. Рассмотрите максимальный элемент.

Разные задачи (10–11)

И. Н. Шнурников

Подсчет числа пар

1. Комиссия собиралась 40 раз. На каждом заседании было ровно 10 человек, любые два не были вместе больше 1 раза. Докажите, что в комиссии хотя бы 60 человек.

2. На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков.

Подсчет двумя способами

3. В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (исключая их самих). Докажите, что суммарное количество пар знакомых между собой людей в этой компании делится на 3.

4. Даны натуральные числа $n \geqslant k$ и множество S из n точек на плоскости. Известно, что любые три точки из множества S не лежат на одной прямой и для любой точки $P \in S$ существуют хотя бы k различных точек из множества S, равноудаленных от P. Докажите неравенство: $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

5. Пусть $P_n(k)$ — число перестановок множества натуральных чисел от 1 до n, оставляющих ровно k чисел на своем месте. Докажите равенство: $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$.

6. Дан правильный 2005-угольник. Ровно m его вершин покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в черный. Рассматриваются одноцветные равнобедренные треугольники с вершинами в вершинах 2005-угольника. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или черные.) Докажите, что при фиксированном m число равнобедренных одноцветных треугольников не зависит от способа раскраски.

Принцип Дирихле

7. В системе из p уравнений с $q = 2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

все коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Докажите, что существует решение $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ этой системы в целых числах, такое что найдется $x_j \neq 0$, и все $|x_j| \leqslant q$, где $1 \leqslant j \leqslant q$.

8. Даны n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Докажите, что для любого целого $k \geqslant 2$ существуют целые числа

$a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные 0, такие что $|a_i| \leqslant k-1$, $i=1, 2, \ldots, n$ и

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqslant \frac{k\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

Винегрет (задачи 9–28)

9. На плоскости дан выпуклый n-угольник. Известно, что все углы многоугольника меньше 180° и никакие четыре его вершины не лежат на одной окружности. Через всевозможные тройки вершин многоугольника провели окружности. Для каждой вершины посчитали количество проведенных окружностей, внутрь которых попала данная вершина. Найдите сумму полученных n чисел.

10. Пусть A есть набор из n остатков по модулю n^2. Докажите, что найдется такой набор B из n остатков, что попарные суммы из наборов A и B содержат не менее половины от всех остатков по модулю n^2.

11. Найдите все конечные последовательности a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $a_m \in \mathbb{Z}$, в которых каждое число m встречается ровно a_m раз, где $m = 0, 1, \ldots, n$.

12. Дан связный граф с n вершинами, возможно, имеющий петли и кратные ребра. Степень каждой вершины графа равна 4. В данном графе выбрано несколько циклов, то есть замкнутых путей, возможно, имеющих самопересечения. Оказалось, что выполняются следующие свойства:

1) циклы не поворачивают вспять ни в одной точке графа;

2) каждое ребро графа принадлежит ровно трем циклам с учетом кратности (по определению, кратность вхождения ребра в данный цикл равна m, если цикл проходит через ребро ровно m раз);

3) для каждой вершины графа и каждой из 6 пар ребер, содержащих эту вершину, найдется единственный цикл, в котором эта пара ребер встретится подряд.

Докажите, что количество циклов не превосходит $2n+1$ при $n>2$ и не превосходит $2n+2$ при $n=1, 2$.

Постройте графы, для которых эти оценки достигаются.

13. Даны два прямоугольника со сторонами a, b и c, d, причем $a < c \leqslant d < b$ и $ab < cd$. Докажите, что первый можно поместить во второй тогда и только тогда, когда $(b^2-a^2)^2 \leqslant (bc-ad)^2 + (bd-ac)^2$.

14. Дано семейство $2m$-элементных множеств натуральных чисел. Для любого набора из $(m+1)^2$ числа все множества семейства, состоящие из чисел этого набора, имеют общий элемент (число). Докажите, что у всех множеств семейства есть общий элемент (число).

15. В связном графе 1000 вершин, из каждой выходит не более 9 ребер. Докажите, что можно выбрать 220 вершин так, чтобы между ними не было цикла нечетной длины.

16. Все целые числа покрашены в 4 цвета. Даны различные нечетные числа m, n, такие что $m+n \neq 0$. Докажите, что найдутся два числа одного цвета с разницей, равной какому-то из чисел m, n, $m+n$, $m-n$.

17. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Назовем подмножество натуральных чисел хорошим, если оно содержит 1 и вместе с числом k содержит также числа $k+a$ и $k+b$. Найдите количество хороших подмножеств.

18. На плоскости нарисованы n прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Плоскость разбилась на области, ограниченные многоугольниками. Выберем те из них, которые содержат хотя бы одну из вершин исходных прямоугольников. Для каждого выбранного многоугольника посчитаем количество его вершин и сложим. Докажите, что полученное число меньше $40n$.

19. Найдите минимально возможное количество ладей, поставленных на доске $n \times n$ так, что на любой полоске из k идущих подряд по горизонтали или по вертикали клеток доски стоит хотя бы одна ладья. Считаем $\frac{n}{2} < k \leqslant \frac{2n}{3}$.

20. Докажите, что существует множество из $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ последовательностей из $2n$ цифр, n нулей и n единиц, такое что любая последовательность из n нулей и n единиц может быть получена из элемента этого множества сдвигом одной цифры. Сдвиг одной цифры вытаскивает цифру из последовательности и вставляет ее в любое другое место.

21. Вершины связного графа покрашены в синий и красный цвета (есть хотя бы одна вершина красного цвета). Каждой вершине приписано положительное вещественное число. Известно, что каждой синей вершине приписано число, равное среднему арифметическому чисел, написанных в ее соседях. Известны числа в красных вершинах. Докажите, что и числа в синих вершинах можно найти.

22. Дано натуральное число k. Докажите, что существует бесконечно много точных квадратов вида $2^k n - 7$.

23. Граф имеет $12k$ вершин, степень каждой равна $3k+6$. Для каждой пары различных вершин есть ровно n вершин графа, соединенных с обеими вершинами пары. Найдите все возможные значения числа k, для которых при каком-нибудь n такой граф существует.

24. На плоскости дано семейство из n векторов. Набор нескольких векторов семейства называется максимальным, если длина суммы векторов набора максимальна среди всех наборов из векторов семейства.

а) Докажите, что количество максимальных наборов не превосходит $2n$.

б) Постройте примеры семейств с $n=4$, $n=5$ векторами и с 8 и 10 максимальными наборами соответственно.

25*. Теорема Кэли. Докажите, что число различных деревьев с n занумерованными вершинами равно n^{n-2}.

26. Пусть A — это перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ и B — это подмножество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Скажем, что A расщепляет B, если в перестановке A чи́сла из множества B идут не подряд (порядок следования не важен). Докажите, что для любого набора из $n-2$ подмножеств, в каждом из которых не менее двух и не более $n-1$ элементов, найдется перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, расщепляющая их всех.

27. а) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число $g(n)$ такое, что полный турнир с $g(n)$ участниками содержит транзитивный [4] подтурнир с n участниками. В полном турнире каждые два участника борются друг с другом ровно один раз и ничьих не бывает.

б) Докажите, что для некоторого $\alpha > 1$ минимальное число $g(n)$ с указанным свойством удовлетворяет неравенству $\alpha^n < g(n) < 2^n$

28. Дано простое число $p > 3$. Обозначим за M количество состоящих из чисел 0, 1 и 2 последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, таких что $a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$ делится на p. Обозначим за N число аналогичных последовательностей из 0, 1 и 3. Докажите, что $M \leqslant N$.

Следующая задача пока не решена.

29. Придумайте соединение некоторых концов жестких стержней между собой и закрепление остальных концов на плоскости так, чтобы выполнялись два условия:

а) при любых малых изменениях длин стержней весь механизм можно расположить на плоскости, сохранив длины стержней, но возможно с пересечениями и совмещениями концов стержней;

б) для данных длин и закрепленных точек существует ровно одно расположение механизма в плоскости.

Считайте, что стержней конечное число и их длины могут различаться.

[4] Такой, что если A выиграл у B и B выиграл у C, то A выиграл у C.

Указания

3. Выразим количество N троек попарно знакомых людей через количество Z пар знакомых людей. Каждая пара знакомых людей входит ровно в 5 троек, и каждая тройка оказывается посчитанной 3 раза, откуда $3N = 5Z$.

4. Каждую пару точек из множества S соединим отрезком, проведем к нему срединный перпендикуляр. Посчитаем количество точек из S, лежащих на этом перпендикуляре и сложим по всем перпендикулярам. На каждой прямой лежит не более двух точек множества S, поэтому сумма будет не больше $n(n-1)$. С другой стороны, каждая точка множества S лежит на хотя бы $\frac{k(k-1)}{2}$ перпендикулярах, проведенных к парам точек, равноудаленных от нее. Отсюда

$$n\frac{k(k-1)}{2} \leqslant n(n-1).$$

5. Занумеруем перестановки числами от 1 до $n!$. Рассмотрим таблицу размера $n \times n!$, состоящую из нулей и единиц. В таблице $n!$ строк и n столбцов, на (i, j)-м месте стоит единица, если и только если j-я перестановка оставляет число i на месте. Сумма чисел в j-й строке таблицы — это количество чисел, остающихся на месте при j-й перестановке, поэтому сумма чисел во всей таблице равна $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k)$. А сумма чисел в i-м столбце равна $(n-1)!$ — это количество перестановок множества из $n-1$ числа, значит, сумма всех чисел в таблице равна $n!$.

6. Обозначим количество равнобедренных одноцветных треугольников за od, а разноцветных за ra. Тогда всего равнобедренных треугольников $od + ra = \frac{2005 \cdot 2004}{2}$. Для каждой пары одноцветных вершин 2005-угольника отметим три равнобедренных треугольника, в которые они входят, при этом одноцветные треугольники будут посчитаны три раза, а разноцветные — один раз. То есть

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(2005-m)(2004-m)}{2} = 3 \cdot od + ra,$$

значит od зависит только от m.

7. Подставим в матрицу вместо x_i всевозможные целые числа $0 \leqslant y_i \leqslant q$. Получим $(q+1)^{2p}$ наборов правых частей. Каждая правая часть может принимать не более чем q^2+1 значение, поэтому существует не более чем $(q^2+1)^p < (q+1)^{2p}$ наборов правых частей, значит для двух разных наборов y_i' и y_i'', где $i = 1, 2, \ldots, q$, все p правых частей совпадут, тогда искомое решение $x_i = y_i' - y_i''$, где $i = 1, 2, \ldots, q$.

9. Для каждой четверки точек ровно две точки попадут внутрь кругов, построенных по оставшимся трем точкам, поэтому искомая сумма равна $2C_n^4$.

10. Переберем все такие множества B, в среднем среди всевозможных сумм остатков из множеств A и B будет не менее $n^2/2$ различных. Остается выбрать такое B, для которого это количество максимально.

11. Всего в последовательности $n+1$ число, из них a_0 нулей, a_1 единиц, $\ldots$, a_n чисел n, поэтому $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = n+1$. Рассмотрим сумму всех чисел в последовательности, она равна $0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + \ldots$ $\ldots + n \cdot a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Из этих двух равенств находим ответ.

12. Получим оценку. Рассмотрим остовное дерево графа, пересечем с оставшимся $n+1$ ребром все циклы нашего семейства и получим набор из $3n+3$ отрезков (разбитый на $n+1$ группу), покрасим отрезки набора. Назовем цикл одиноким, если он содержит только один покрашенный отрезок. В каждой группе только один покрашенный отрезок может образовать одинокий цикл, поэтому количество одиноких циклов $k \leqslant n+1$. Остальные циклы содержат хотя бы два покрашенных отрезка, поэтому их количество $l \leqslant \dfrac{3n+3-k}{2}$. Значит, всего циклов

$$k + l \leqslant \frac{3n+3-k}{2} + k = \frac{3n+3+k}{2} \leqslant 2n+2.$$

Для $n > 2$ осталось перебрать несколько случаев и убедиться, что найдется цикл, содержащий хотя бы три покрашенных отрезка.

Пример графа — правильный n-угольник с петлей в каждой вершине. Один цикл — это сам n-угольник, n циклов — это все петли, а оставшиеся n циклов состоят из двух соседних петель и стороны n-угольника, их соединяющей (с кратностью 2).

13. Введем угол φ между прямоугольниками. Тогда помещаемость первого прямоугольника эквивалентна системе двух уравнений:

$$\begin{gathered} b\cos(\varphi) + a\sin(\varphi) \leqslant c, \\ b\sin(\varphi) + a\cos(\varphi) \leqslant d. \end{gathered}$$

Обозначим $\cos(\varphi)$ за x, а $\sin(\varphi)$ за y. Нарисуем на координатной плоскости (x, y) окружность $x^2 + y^2 = 1$. Существование решения системы эквивалентна тому, что прямые $bx + ay = c$, $by + ax = d$ пересекаются внутри окружности, что дает требуемую оценку.

15. Воспользуйтесь теоремой Брукса из раздела «Раскраски графов», задача 6 в).

16. Сопоставим каждой паре целых чисел (x, y) (точке решетки) целое число $mx + ny$ и покрасим так точки решетки.

18. Угол при вершине прямоугольника может быть и 90° и 270°, а при точке пересечения сторон — только 90°.

19. Вырежем из квадрата размера $n \times n$ центральный квадрат размера $(2k - n) \times (2k - n)$ и разобьем оставшееся на 4 прямоугольника $k \times (n - k)$. В каждом прямоугольнике должны стоять хотя бы $n - k$ ладей, поэтому всего их хотя бы $4(n - k)$. Пример также симметричен относительно вращений квадрата.

20. Для каждой последовательности из n нулей и n единиц рассмотрим сумму номеров тех позиций, где стоят единицы и рассмотрим эту сумму по модулю $n + 1$. Все множество последовательностей разобьется на $n + 1$ класс (с одинаковым остатком по модулю $n + 1$), в каком-то классе элементов будет не больше, чем нужно, и из каждого класса сдвигами одной цифры можно получить все множество последовательностей.

28. Воспользуйтесь методом производящих функций и интерпретацией корней p-й степени из 1.

ГЛАВА 14

КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Принцип Дирихле и его применения в геометрии (10–11)

И. В. Аржанцев

Площадь фигуры

Будем называть плоскую фигуру *простой*, если ее можно разбить на конечное число треугольников. Для такой фигуры A ее площадь $S(A)$ определяется как сумма площадей соответствующих треугольников.

Напомним, что точка (x_0, y_0), принадлежащая фигуре A, называется *внутренней* точкой фигуры A, если найдется круг с центром (x_0, y_0), целиком лежащий в A.

Несложно проверить, что функция «площадь» на множестве простых фигур обладает следующими свойствами:

— если фигура A имеет внутренние точки, то $S(A) > 0$;

— если фигура A сложена из простых фигур A_1 и A_2, не имеющих общих внутренних точек, то $S(A) = S(A_1) + S(A_2)$;

— равные фигуры, т. е. фигуры, которые можно совместить наложением, имеют одинаковые площади;

— площадь квадрата со стороной единица равна единице.

Более общо: фигура B называется *квадрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие простые фигуры A_1 и A_2, что $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ и $S(A_2) - S(A_1) < \varepsilon$ (см. рис. 1). Для квадрируемых фигур также можно

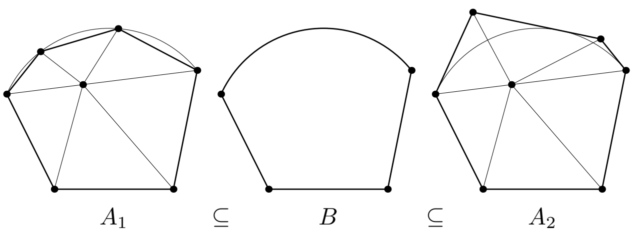


Рис. 1

определить понятие площади и доказать, что площадь — это единственная функция на множестве квадрируемых фигур, обладающая перечисленными выше четырьмя свойствами.

Отметим, что не каждая плоская фигура квадрируема (см., например, задачу 2). Желающим более детально познакомиться с понятием площади и его обобщениями можно рекомендовать книгу [1].

1. Докажите, что фигура, ограниченная конечным числом отрезков и дуг окружностей, является квадрируемой.

2. Напомним, что фигура называется *ограниченной*, если она содержится в некотором круге. Докажите, что любая квадрируемая фигура ограниченна.

Принцип Дирихле для площадей

Следующее геометрическое утверждение напоминает известный «принцип ящиков» Дирихле (P. Dirichlet), и поэтому обычно называется геометрическим принципом Дирихле или принципом Дирихле для площадей.

Теорема 1. *Пусть A — квадрируемая фигура, и $A_1, \ldots, A_m$ — квадрируемые фигуры, содержащиеся в A. Предположим, что*

$$S(A) < S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_m).$$

Тогда как минимум две из фигур $A_1, \ldots, A_m$ имеют общую внутреннюю точку.

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$S(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_m).$$

Условия $A_1, \ldots, A_m \subseteq A$ влекут

$$S(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \leqslant S(A).$$

Полученное противоречие с условием завершает доказательство. $\square$

По аналогии с «обобщенным принципом ящиков» можно рассмотреть следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть A — квадрируемая фигура, и $A_1, \ldots, A_m$ — квадрируемые фигуры, содержащиеся в A. Предположим, что*

$$nS(A) < S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_m)$$

для некоторого натурального $n < m$. Тогда как минимум $n + 1$ из фигур $A_1, \ldots, A_m$ имеют общую внутреннюю точку.

Доказательство. Если никакие $n+1$ из наших фигур не имеют общей внутренней точки, то открытая часть множества $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ учитывается в сумме

$$S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_m)$$

не более n раз, и поэтому

$$S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_m) \leqslant nS(A). \qquad \square$$

3. Внутри квадрата со стороной 1 помещена фигура, площадь которой больше $\frac{1}{2}$. Докажите, что эта фигура содержит две точки, симметричные относительно центра квадрата.

4. На сфере имеется пятно, площадь которого больше половины площади сферы. Докажите, что это пятно покрывает пару диаметрально противоположных точек сферы.

5. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,51. Докажите, что существует прямая, параллельная одной из сторон квадрата и пересекающая не менее двух окружностей.

6. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что существует прямая, пересекающая не менее четырех окружностей.

Теоремы Блихфельдта и Минковского

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и через каждую точку с целыми координатами проведем две прямые, параллельные координатным осям. Полученная система прямых называется *целочисленной решеткой*, а точки с целыми координатами — *узлами* целочисленной решетки. Целочисленная решетка разбивает плоскость на квадраты со стороной 1.

Рассмотрим целочисленную решетку и некоторую квадрируемую плоскую фигуру. Число покрытых фигурой узлов зависит не только от формы фигуры, но и от ее расположения. Например, имеются фигуры сколь угодно большой площади, не покрывающие ни одного узла (приведите пример!).

Теорема Блихфельдта. *Пусть A — квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой больше n. Тогда фигуру A можно параллельно перенести таким образом, что она покроет не менее $n+1$ узла целочисленной решетки.*

Доказательство. Целочисленная решетка разрезает фигуру A на конечное число кусков (A ограничена!). Условие $S(A) > n$ показывает,

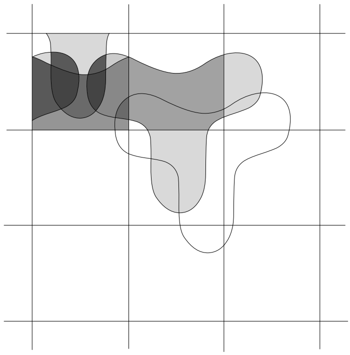


Рис. 2

что число кусков $\geqslant n + 1$. Сложим все квадратики, которые пересекает наша фигура, «в колоду» (см. рис. 2). Мы получим $\geqslant n + 1$ фигур внутри квадрата со стороной 1, суммарная площадь которых $> n$.

Согласно теореме 2, примененной к единичному квадрату, найдется точка P, которая принадлежит не менее чем $n + 1$ куску нашей фигуры. Остается применить к A параллельный перенос на вектор, соединяющий P с некоторым узлом целочисленной решетки. ☐

При $n = 1$ теорему Блихфельдта можно переформулировать так.

Теорема 3. *Пусть A — квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой больше 1. Тогда в A можно найти две несовпадающие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), такие что $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ — целые числа.*

Плоская фигура A называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит отрезок, их соединяющий.

Следующая теорема, принадлежащая немецкому математику Минковскому (H. Minkowski), возникла в рамках геометрической теории чисел.

Теорема Минковского. *Пусть A — симметричная относительно начала координат выпуклая квадрируемая фигура площади > 4. Тогда A содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.*

Доказательство. Применив к A гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{2}$, мы получим фигуру B площади > 1. По теореме 3 фигура B содержит несовпадающие точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), для которых числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ целые. В силу симметричности точка $(-x_1, -y_1)$ лежит в B, а в силу выпуклости в B лежит и середина O отрезка, соединяющего $(-x_1, -y_1)$ и (x_2, y_2). Точка O имеет координаты $\left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$. Значит, точка с координатами (x_2-x_1, y_2-y_1) лежит в A. $\square$

7. Покажите на примере, что в теореме Минковского условие $S(A) > 4$ нельзя заменить на условие $S(A) \geqslant 4$.

8. Пусть A — квадрируемая фигура на координатной плоскости, площадь которой $< n$. Докажите, что A можно параллельно перенести так, что она покроет не более $n-1$ узла целочисленной решетки.

9. Пусть A — симметричная относительно начала координат выпуклая квадрируемая фигура площади $> 4n$. Докажите, что A содержит не менее $2n+1$ точек с целыми координатами.

Теорема Дирихле об аппроксимации иррациональных чисел

Рассмотрим иррациональное число α, натуральное число s и множество

$$A = \left\{(x, y)\colon |\alpha x - y| < \frac{1}{s},\ |x| \leqslant s + \frac{1}{2}\right\}.$$

Это множество есть параллелограмм, площадь которого равна

$$\frac{2}{s} \cdot 2\left(s + \frac{1}{2}\right) = 4\left(1 + \frac{1}{2s}\right) > 4.$$

Эта фигура выпукла и симметрична относительно начала координат (см. рис. 3). Теорема Минковского утверждает, что в A есть точка с целыми координатами, отличная от $(0, 0)$. Можно считать, что первая координата этой точки положительна (объясните это!). Тем самым доказана следующая теорема.

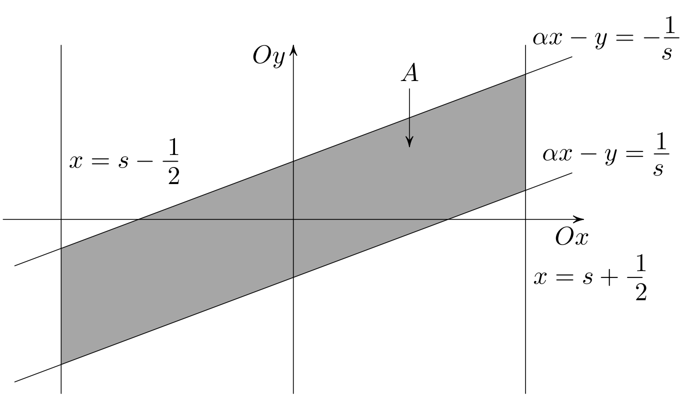


Рис. 3

Теорема Дирихле. *Для произвольных иррационального числа* α *и натурального числа* s *найдутся такие целые числа* x *и* y, *что* $0 < x \leqslant s$ *и*

$$|\alpha x - y| < \frac{1}{s}.$$

10. Докажите, что для произвольных иррационального числа α и натурального числа s существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$, что $0 < n \leqslant s$ и $|\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{ns}$.

11. Докажите, что для произвольного иррационального числа α существует бесконечно много таких рациональных чисел $\frac{m}{n}$, что

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Зачетные задачи: 7–10.

Указания

1. Прежде всего заметим, что разность площадей двух правильных n-угольников, один из которых вписан в данную окружность, а другой описан около нее, можно сделать сколь угодно малой, выбрав достаточно большое n. Следовательно, круг — квадрируемая фигура. Тогда квадрируемой фигурой является и любой сегмент круга, а значит, и фигура, удовлетворяющая условию задачи.

2. Любая простая фигура, очевидно, ограниченна. Так как квадрируемая фигура содержится в некоторой простой, она также ограниченна.

3. Пусть F — данная фигура, F' — фигура, симметричная ей относительно центра квадрата. Тогда $S(F) + S(F') > 1$ и по теореме 1 существует точка $X \in F \cap F'$. Очевидно, что X и симметричная ей точка X' образуют искомую пару.

4. Рассмотрим фигуру, симметричную данной относительно центра сферы, и повторим рассуждение предыдущей задачи.

5. Длина проекции любой окружности на любую прямую равна диаметру окружности. Следовательно, сумма длин проекций всех окружностей на любую сторону квадрата равна 1,02, т.е превышает длину этой стороны. По теореме 1 найдется точка X, принадлежащая проекциям хотя бы двух окружностей. Прямая, проходящая через X и перпендикулярная соответствующей стороне, — искомая.

6. Сумма диаметров окружностей равна $10/\pi > 3$. Поэтому, применив рассуждение предыдущей задачи и теорему 2, найдем искомую прямую.

7. Рассмотрите открытый квадрат $\{(x, y)\colon |x| < 1, |y| < 1\}$.

8. Заметим, что полуоткрытый квадрат $-k \leqslant x, y < k$ при переносе на любой вектор покрывает ровно $4k^2$ узлов. Выберем k достаточно большим, чтобы данная фигура содержалась в некотором таком квадрате K. По теореме Блихфельдта существует перенос, при котором фигура $K \backslash A$ покроет не менее $4k^2 - n + 1$ узлов. Поскольку все эти узлы лежат в образе K, образ A покроет не более $n - 1$ узла.

9. Применив к A гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{2}$, мы получим фигуру B площади $> n$. Из теоремы Блихфельдта следует, что B содержит попарно не совпадающие точки $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, для которых все разности $x_i - x_j$ и $y_i - y_j$ являются целыми. Можно считать, что $x_0 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и что среди точек (x_i, y_i), у которых $x_i = x_0$, максимальное значение второй координаты равно y_0. Тогда, как и в доказательстве теоремы Минковского, можно показать, что A содержит точки $(0, 0)$, $(x_0 - x_i, y_0 - y_i)$, $(x_i - x_0, y_i - y_0)$, и что эти точки попарно различны.

10. Достаточно в теореме Дирихле разделить обе части неравенства на x. Можно решить эту задачу и не используя геометрические соображения: рассмотрим дробные части чисел α, 2α, $\ldots$, $s\alpha$ и разделим отрезок $[0, 1]$ на s равных частей. Возможны два случая.

1. В каждом из s отрезков лежит ровно одно из чисел α, 2α, $\ldots$, $s\alpha$. Тогда для некоторого n выполнено неравенство $n \leqslant s$ $\{n\alpha\} < 1/s$, и число m/n, где $m = [n\alpha]$, — искомое.

2. Дробные части чисел $n_1\alpha$ и $n_2\alpha$ попали в один отрезок. Тогда искомым будет число m/n, где $m = |[n_1\alpha] - [n_2\alpha]|$, $n = |n_1 - n_2|$.

Литература

[1] *Лебег А.* Об измерении величин. М.: Учпедгиз, 1960.

[2] *Ядренко М. Й.* Принцип Діріхле та його застосування. Киев: Вища школа, 1985.

Теорема Хелли (10–11)

А. В. Акопян

Все системы, о которых идет речь ниже, считаются конечными.

1. Пусть каждые два отрезка, принадлежащие некоторой системе отрезков, расположенных на одной прямой имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все отрезки из этой системы имеют по крайней мере одну общую точку.

2. Пусть каждые два прямоугольника из некоторой системы прямоугольников с параллельными сторонами имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все прямоугольники системы имеют по крайней мере одну общую точку.

3*. Пусть на прямой дана система из $2n + 1$ отрезков, такая что каждый отрезок пересекается хотя бы с n отрезками из этой системы. Докажите, что тогда найдется отрезок, пересекающий все отрезки из этой системы.

4. Теорема Хана—Банаха. а) На плоскости даны два непересекающихся выпуклых многоугольника. Докажите, что существует такая не пересекающая их прямая, что многоугольники лежат по разные стороны от нее.

б) Обобщите эту теорему на случай n-мерного пространства.

5. Теорема Хелли. а) Пусть каждые три многоугольника из системы выпуклых многоугольников имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все многоугольники из этой системы имеют общую точку.

б) Обобщите эту теорему на случай n-мерного пространства.

6. а) Пусть некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую длины полуокружности, обладает тем свойством, что каждые три дуги этой системы имеют по крайней мере одну общую точку. Докажите, что тогда все дуги этой системы имеют по крайней мере одну общую точку.

б) Каков критерий на длины дуг, чтобы условие попарного пересечения дуг было достаточным для существования общей точки для всей системы?

7. а) Докажите, что если каждые три точки некоторого подмножества плоскости можно покрыть кругом радиуса R, то и все точки множества можно покрыть кругом этого радиуса.

б)* Докажите, что если каждые три прямые из некоторого множества прямых можно пересечь кругом радиуса r, то и все прямые из этого множества можно пересечь кругом радиуса r.

8. Можно ли обобщить теорему Хелли на случай двух и более точек? Иначе говоря, существует ли такое n, что если для любых n выпуклых множеств системы можно указать 2 точки, такие что каждое содержит хотя бы одну из них, то такие две точки можно указать для всех множеств системы?

9. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков.

Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)

10. На прямой даны $2k-1$ белый и $2k-1$ черный отрезок. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный — хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными.

11. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.

12. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любое подмножество X' множества X, состоящее из не более чем 9 точек, можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T. Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами треугольника T.

Контрольный вопрос

I. Какие из указанных теорем перестают быть верными, если отбросить условие выпуклости многоугольников, фигурирующих в условии теоремы?

а) Теорема Хана—Банаха. б) Теорема Хелли.

Зачетные задачи: 2; 4 а); 5 а); 6 а), б); 7 а); 9; 10.

Решения

1. Докажем утверждение задачи для системы из конечного числа отрезков. Пусть a_i — координаты левых концов отрезков нашей системы, а b_i — координаты их правых концов. Пусть a — наибольшее из чисел a_i, а b — наименьшее из чисел b_i. Достаточно доказать, что $a \leqslant b$ — тогда любая точка отрезка $[a; b]$ будет общей точкой для всех отрезков. Предположим, что это неверно, т. е. $a > b$. Рассмотрим следующую пару отрезков: отрезок, для которого a — левый конец, и отрезок, для которого b — правый конец. Так как $a > b$, то данная пара отрезков не пересекается, вопреки условию. Полученное противоречие показывает, что $a \leqslant b$, что нам и требовалось.

Замечание. Для бесконечной системы рассуждаем аналогично, только вместо наибольшего и наименьшего числа рассматриваем инфимум и супремум соответствующих числовых множеств.

Теория вероятностей и комбинаторная геометрия (10–11)

А. М. Райгородский

Хроматическим числом пространства $\mathbb{R}^n$ называется минимальное число $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1.

Диаметром множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup_{\mathbf{x},\,\mathbf{y}\in\Omega} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

где через $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ обозначено стандартное евклидово расстояние, а «sup» — это «супремум», или точная верхняя грань. Поскольку в дальнейшем речь пойдет о шарах и конечных множествах, можно для простоты считать, что супремум — это обычный максимум.

Числом Борсука для ограниченного тела $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется величина $f(\Omega)$, равная минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито Ω. Через $f(n)$ обозначается $\max\limits_{\Omega} f(\Omega)$.

1. Дано множество точек $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $d = \operatorname{diam}\mathcal{A}$. Докажите, что количество пар $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, для которых $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = d\}|$ не превосходит n.

2. Выведите из задачи 1, что $f(\mathcal{A}) \leqslant 3$.

3. Пусть B — трехмерный шар. Докажите, что $f(B) \leqslant 4$. Постарайтесь добиться того, чтобы диаметры всех частей были как можно меньше. Сделайте то же самое в n-мерном случае с заменой четырех на $n+1$.

4. Чему равно $\chi(\mathbb{R})$?

5. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 4$.

6. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$.

7. Конечны ли числа $f(n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$? Если да, то как они оцениваются сверху?

8. Докажите, что $f(n) \geqslant n+1$, а $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant n+2$ при $n \geqslant 2$.

9. Рассмотрим

$$V = \bigl\{\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)\colon x^i \in \{0,1\},\ x^1 + \ldots + x^n = 3\bigr\}.$$

Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 1$ для любых i и j. Здесь $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = x_i^1 x_j^1 + \ldots + x_i^n x_j^n$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}_\nu = (x_\nu^1, \ldots, x_\nu^n)$, $\nu \in \{i, j\}$. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q. Проверьте оптимальность этой оценки.

10*. Рассмотрим $V = \{\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \colon x^i \in \{0, 1\},\ x^1 + \ldots + x^n = 5\}$. Пусть $Q = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset V$ таково, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2$ для любых i и j. Докажите как можно лучшую верхнюю оценку на мощность Q. Проверьте оптимальность этой оценки.

11. Пользуясь результатом задачи 9, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant cn^2$ с некоторым $c > 0$.

12*. Пользуясь результатом задачи 10, докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant cn^3$ с некоторым $c > 0$.

13*. Как много можно выбрать попарно пересекающихся k-сочетаний из $\{1, \ldots, n\}$?

14*. Пусть множество $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ таково, что $\operatorname{diam} \mathcal{A} = 1$. Существует ли такое $\mathcal{A}$, что при любой раскраске его элементов в три цвета найдется пара одноцветных элементов на расстоянии 1 и что в то же время никакие три вершины в $\mathcal{A}$ не образуют равносторонних треугольников с длиной стороны 1?

Определение схемы испытаний Бернулли

Обозначим через Ω множество последовательностей из нулей и единиц длины n. Пусть даны числа $p \in (0, 1)$ и $q = 1 - p$. *Вероятность* последовательности $\omega \in \Omega$ — это число $P(\omega) = p^{|\omega|} q^{n-|\omega|}$, где $|\omega|$ — число единиц в последовательности. *Вероятностью* подмножества $B \subset \Omega$ называется число $P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\omega)$.

Мотивировка. Приведенное определение описывает следующую физическую ситуацию. Пусть дана монета «со смещенным центром тяжести»: при случайном бросании монета падает на стол «решкой» кверху с вероятностью p и «орлом» кверху с вероятностью $q = 1 - p$. Бросаем монету на стол n раз. При каждом бросании записываем единицу, если выпала «решка», и ноль в противном случае. Последовательность ω является *элементарным событием*, а любой набор последовательностей — *событием.*

Простейшие задачи на схему испытаний Бернулли

15. Найдите $P(\mu = k)$.

16. Докажите, что $P(\Omega) = 1$.

17. Докажите свойства вероятности:

а) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

б) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$;

в) $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$.

Задачи о сочетаниях

18. Рассмотрим множество $R=\{1, \ldots, n\}$ и будем производить последовательные испытания Бернулли. Если на ν-м шаге выпала решка — вынимаем элемент ν из R. Иначе — не вынимаем. В результате получается множество A_1. Точно так же строим $A_2, \ldots, A_m$. Найдите $P(A_i \cap A_j = \varnothing \forall i, j)$.

19. Найдите $P(|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = k)$.

20. Найдите $P(\forall\ i_1, \ldots, i_r\ \ A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \varnothing)$ ($r \leqslant m$ фиксировано).

21. Найдите $P(A_i \cap A_j \subseteq A_k \subseteq A_i \cup A_j)$ (i, j, k фиксированы).

Определение случайной величины и ее математического ожидания

Случайная величина — это произвольная функция $\xi\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Пусть $\xi\colon \Omega \mapsto \{y_1, \ldots, y_k\}$. Тогда *математическое ожидание* ξ — это ее «взвешенное среднее» $M\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(\xi = y_i)$.

Задачи о математическом ожидании

22. Найдите $M\mu$.

23. Докажите *линейность* математического ожидания: $M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1 M\xi_1 + c_2 M\xi_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, а ξ_i — случайные величины.

24. Докажите, что если $M\xi \leqslant x$, то существует $\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) \leqslant x$.

Задача комбинаторной геометрии

Как много можно взять точек в $\mathbb{R}^n$, чтобы углы, образованные любыми тремя из них, были меньше $\frac{\pi}{2}$? Пусть $f(n)$ — это интересующий нас максимум.

25. Докажите, что $f(n) \leqslant 2^n$.

26. Докажите, что $f(n) \geqslant 2n-1$.

27*. Докажите, что $f(n) \geqslant \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$.

Пошаговое решение задачи 27*

Пусть $A_1, \ldots, A_{2m}$ — такие же множества, как в задаче 18 ($p = 0{,}5$). Им отвечают последовательности испытаний Бернулли $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$, которые можно интерпретировать как точки в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, углы, образованные любыми тремя из них, *не превосходят* $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, если мы избавимся от прямых углов, удалив из множества векторов $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$ «не слишком много» элементов, то мы получим «достаточно хорошую» нижнюю оценку на $f(n)$. Действуем:

28. Докажите, что тройка $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ образует прямой угол с вершиной в ω_k (в том числе и «вырожденный», т. е. некоторые из ω_ν совпадают, что возможно по построению) тогда и только тогда, когда $A_i \cap \cap A_j \subseteq A_k \subseteq A_i \cup A_j$ (ср. задачу 21).

29. Пусть ξ — это число троек $\omega_i, \omega_j, \omega_k$, образующих прямой угол. Найдите $x = M\xi$, пользуясь результатами задач 21 и 23.

30. В силу утверждения задачи 24 найдутся такие $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$, что среди них не больше, чем x, прямых углов. Выведите отсюда неравенство 27* за счет оптимального выбора $m = m(n)$.

III. Количество горизонтальных ребер у графа Г
а) четно; б) нечетно; в) может быть как четным, так и нечетным.

Теорема о 12 (10–11)

В. В. Прасолов, М. Б. Скопенков

Многоугольники на клетчатой бумаге

Пусть на клетчатой плоскости нарисован выпуклый многоугольник $M = A_1A_2\ldots A_n$ с вершинами в узлах сетки (рис. 1 слева). Предположим, что внутри M расположен ровно один узел O. Отложим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_nA_1}$ от узла O и на каждом из полученных отрезков выберем ближайший к точке O узел. Соединяя последовательно выбранные n точек, получим некоторый многоугольник M^*, который называется *двойственным* к исходному многоугольнику (рис. 1 справа).

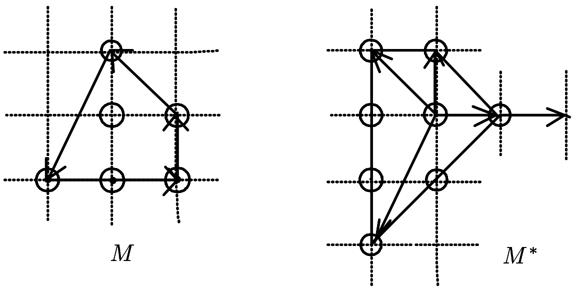


Рис. 1

Данный цикл задач посвящен элементарному доказательству открытой совсем недавно теоремы[1] (см. [7]).

[1] Несколько элементарных применений этой теоремы приводится в контрольных вопросах ниже.

Теорема о 12. *Пусть внутри выпуклого многоугольника M расположен ровно один узел O, на его границе — b узлов, а на границе многоугольника M^* — b^* узлов. Тогда*

$$b + b^* = 12.$$

0. Нарисуйте многоугольники, двойственные к изображенным на рис. 2. Сколько узлов расположено внутри M^* в каждом случае? Чему равны M^{**}? Как связаны площади M и M^*? Возможно ли равенство $M = M^*$? Сформулируйте ваши наблюдения и предположения, попытайтесь их доказать.

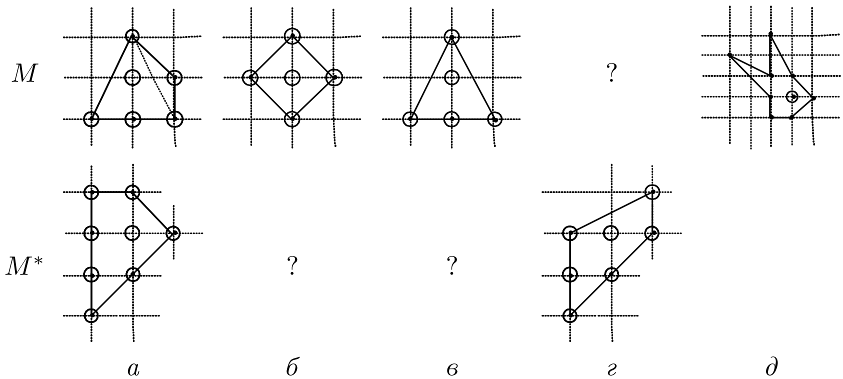


Рис. 2

1. Внутри треугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число узлов может быть на границе?

2. Докажите теорему о 12 для параллелограмма с $b = 4$.

Простым треугольником назовем треугольник, не содержащий других узлов, кроме вершин (как внутри, так и на сторонах). *Прыжок* (рис. 3) — это преобразование, при котором вершина A треугольника ABC заменяется на точку, симметричную ей относительно B.

3. Докажите, что

а) площадь треугольника при прыжке не меняется;

б) из простого треугольника при прыжке получается простой;

в) у простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$, который мы назовем *минимальным*);

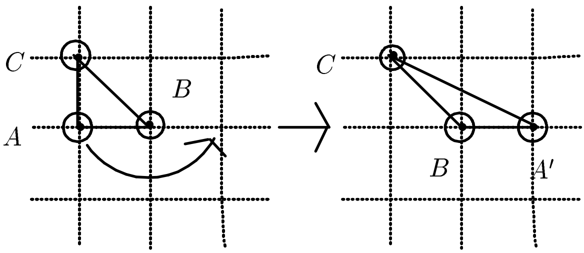


Рис. 3

г) из любого простого не минимального треугольника одним прыжком можно получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного;

д) любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный;

е) площадь простого треугольника равна $1/2$.

4. а) Докажите, что выпуклый четырехугольник, не содержащий узлов (кроме вершин), — параллелограмм.

б) Существует ли выпуклый пятиугольник, не содержащий внутри себя узлов?

в) Внутри выпуклого многоугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число вершин он может иметь?

5. а) Если на сторонах треугольника нет узлов (кроме вершин), а внутри него — ровно 1 узел, то это — точка пересечения медиан треугольника.

б) Докажите теорему о 12 для треугольника с $b=3$.

Пусть S — площадь многоугольника, внутри которого i узлов, а на границе b узлов.

6. а) Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами в данных $b+i$ узлах. Сколько в ней может быть треугольников?

б) Докажите *формулу Пика*:

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

7. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так будет, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

8. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно 1 раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

б) Какую наибольшую длину она может иметь?

Удалением треугольника назовем операцию отрезания от многоугольника M простого треугольника, имеющего с ним две общие стороны. Например, из многоугольника на рис. 2 *а* удалением треугольника получается многоугольник на рис. 2 *в*. Обратную операцию назовем *добавлением треугольника*.

9. Верно ли, что любые два многоугольника

а) на рис. 2;

б) без узлов внутри;

в) выпуклые, ровно с 1 узлом внутри

получаются друг из друга серией удалений и добавлений треугольников?

Контрольные вопросы

I. Внутри выпуклого многоугольника с вершинами в узлах решетки расположен ровно 1 узел решетки. Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник?

а) 6; б) 7; в) 8; г) 9; д) 12; е) сколь угодно много.

II. Внутри выпуклого многоугольника с вершинами в узлах решетки расположен ровно 1 узел решетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

а) 3; б) $3\sqrt{2}$; в) 4; г) 4.5; д) 6; е) сколь угодно большую.

III. Внутри выпуклого четырехугольника с вершинами в узлах решетки расположен ровно 1 узел решетки. Какое наибольшее число узлов решетки может быть на его границе?

а) 6; б) 7; в) 8; г) 9; д) 12; е) сколь угодно много.

IV. Какую наибольшую длину может иметь сторона простого треугольника?

а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 2; г) $\sqrt{5}$; д) сколь угодно большую.

V. Сколько существует попарно неравных треугольников с вершинами в узлах решетки и ровно 1 узлом решетки внутри?

а) 6; б) 7; в) 8; г) 9; д) 12; е) сколь угодно много.

VI. Могут ли многоугольники M и M^* быть симметричны друг другу и при этом не совпадать?

а) Могут; б) не могут.

Двойственность

Пусть O — начало декартовой системы координат. Сопоставим каждой точке $A(a, b) \neq O$ прямую A^*, задаваемую уравнением $ax + by = 1$. Эта прямая называется *двойственной* к данной точке. Наоборот, каждой прямой $ax + by = 1$ сопоставим *двойственную* точку (a, b).

10. Нарисуйте фигуры, двойственные к фигурам на рис. 4. Проверьте, что на рис. 4 *а* прямая $l^* \in A^*$ и что на рис. 4 *б* прямые A^*, B^*, C^* проходят через одну точку. Докажите, что для любой точки $C \neq O$ прямая C^* перпендикулярна OC и проходит через точку $C' \in OC$, такую что $OC \cdot OC' = 1$.

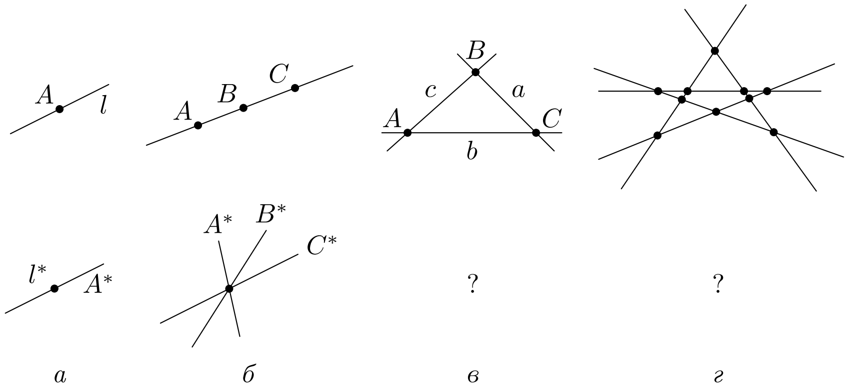


Рис. 4

В многоугольнике $M = A_1 \ldots A_n$ положим

$$M^* = (A_1A_2)^* \ldots (A_nA_1)^*.$$

11. Проверьте, что это определение двойственного многоугольника согласуется с предыдущим (с точностью до поворота на $90°$). Докажите равенство $M^{**} = M$.

12. Если внутри M расположен ровно 1 узел, то внутри M^* также расположен ровно 1 узел.

13. а) При удалении треугольника из M происходит добавление треугольника к M^*.

б) Из любого выпуклого многоугольника с ровно одним узлом внутри последовательностью удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм с $b = 4$.

в) Докажите теорему о 12.

14. Какая фигура будет двойственной к невыпуклому многоугольнику (рис. 2 *д*)? При каком условии на M два определения M^* равносильны? Как обобщить теорему о 12 на невыпуклые многоугольники?

Двойственная кривая γ^* — это ГМТ двойственных ко всем касательным к кривой γ.

15. Какая кривая двойственна единичной окружности? Завершите рис. 5. Верно ли, что $\gamma^{**} = \gamma$?

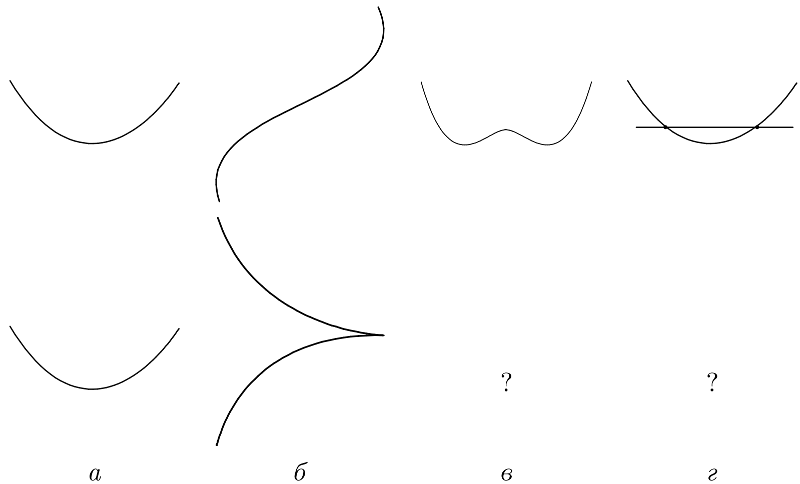


Рис. 5

16*. Как обобщить теорему о 12 на многоугольники с более чем одним узлом внутри?

Дополнительные задачи

17. На прямоугольном листе бумаги проведено несколько ломаных, идущих по сторонам клеток. Эти ломаные не имеют самопересечений и пересечений друг с другом. Ломаные лежат строго внутри прямоугольника, и лишь их концы находятся на его границе. Очевидно, что вершины прямоугольника не лежат на этих ломаных. Могут ли все остальные узлы клетчатой бумаги лежать на этих ломаных, если исходный прямоугольник имеет размеры а) 5×10; б) 6×12?

18. Проведите по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать?

19. а) Обозначим через kM многоугольник, который получается из M гомотетией с коэффициентом k с центром в начале координат. Докажите формулу $2S(M) = n(2M) - 2n(M) + 1$, где $n(M)$ — число узлов внутри и на границе M.

б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для объема многогранника в пространстве.

20. Придумайте оценку для максимального числа вершин выпуклого многоугольника через число узлов внутри него.

Аффинным преобразованием назовем преобразование плоскости, заданное равенствами $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$, сохраняющее целочисленную решетку (это означает, что числа a, b, c, d — целые и $ad - bc = \pm 1$).

21. Классифицируйте выпуклые многоугольники

а) без узлов внутри;

б) с ровно одним узлом внутри

с точностью до аффинных преобразований.

22. а) Найдите образ прямой $y = ax + b$ при преобразовании

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right).$$

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ $(x^3 + ax + b = 0)$ равно числу касательных, которые можно провести к кривой $x^2 = 4y$ $(4x^3 = -27y^2)$ из точки (a, b).

в) Сколько решений имеет уравнение $x^3 + ax + b = 0$ в зависимости от a и b?

г) Попытайтесь исследовать таким образом другие уравнения.

Контрольные вопросы

I. Какие из следующих утверждений верны для любых точек A и B, таких что прямая AB не проходит через начало координат?

а) $A^{**} = A$; б) $A^* \cap B^* = (AB)^*$; в) $A(AB)^* = (B^* \cap AB)^*$.

II. Какая кривая двойственна параболе $y = x^2$?

а) Прямая; б) парабола; в) единичная окружность.

III. Может ли для выпуклого многоугольника двойственный многоугольник быть невыпуклым?

а) Может; б) не может.

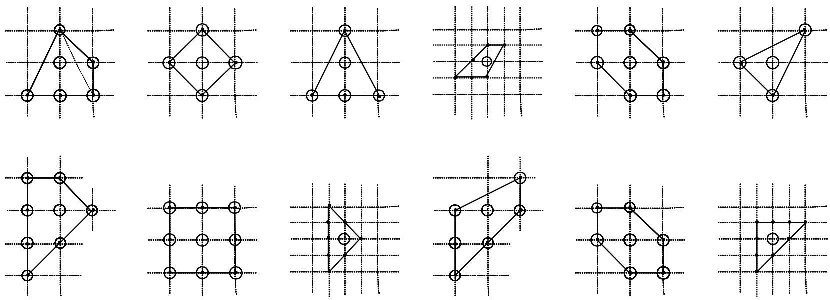
Решения

0. См. рис. 6 *а*–*г*. Для многоугольника на рис. 2 *д* не существует двойственного, поскольку он не выпуклый (см. также задачу 14). На рис. 6 *д* показан пример, когда $M = M^*$. Возможные наблюдения:

1) внутри M^* расположен ровно 1 узел (см. задачу 12);

2) $M^{**} = -M$ (см. задачу 11)

3) $S(M) + S(M^*) = 6$, что равносильно теореме о 12, так как по формуле Пика (задача 6 б) $S(M) = i + \frac{b}{2} - 1 = \frac{b}{2}$.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 6

1. *Ответ*: 9. Пример изображен на рис. 6 *е*. Идею построения примера подсказывает теорема о 12. Раз на границах треугольников T и T^* в сумме расположено 12 узлов, то, чтобы максимизировать число узлов на границе T, нужно минимизировать их число на границе T^*, и наоборот. Поэтому нужно взять треугольник с 3 узлами на границе, тогда двойственный треугольник и будет искомым примером.

Максимальность числа 9 следует, конечно, из теоремы о 12. Приведем независимое доказательство (рис. 7 *а*). Если на каждой стороне треугольника расположено не более 2 узлов (не считая вершин), то доказывать нечего. Рассмотрим случай, когда одна из сторон треугольника, назовем ее AB, содержит $\geqslant 3$ узлов (такая ситуация действительно возможна, см. рис. 6 *в*). Достаточно доказать, что на остальных сторонах расположено не более 1 узла. Пусть это не так, например, AC содержит $\geqslant 2$ узлов. Выберем из них узел D, ближайший к A. Проведем $DE \parallel AB$, где $E \in AC$. Выберем на стороне AB узел F, ближайший к A. Рассмотрим точки G и H на отрезке DE, такие что $DG = AF$ и $GH = AF$, они, очевидно, являются узлами решетки. Так как узлы решетки разбивают AB и AC на равные отрезки, то $CD : CA \geqslant \frac{2}{3}$ и $AF : AB \leqslant \frac{1}{4}$. Из подобия

$DE : AB \geqslant \dfrac{2}{3}$. Отсюда следует, что $DH < DE$, т. е. G и H лежат внутри треугольника, что противоречит условию. Максимальность доказана.

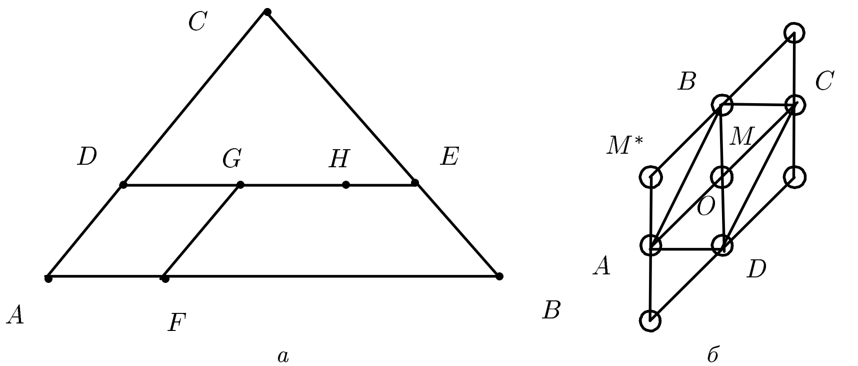


Рис. 7

2. Действительно, в этом случае $O = AC \cap BD$ (рис. 7 *б*). Это следует из того, что точка, симметричная точке O относительно $AC \cap BD$, — целая и лежит внутри $ABCD$, а поэтому совпадает с O. Легко видеть, что M^* — параллелограмм, стороны которого получаются из диагоналей AC и BD параллельными переносами на векторы $\pm\overrightarrow{OB}$ и $\pm\overrightarrow{OA}$ соответственно. Так как на этих диагоналях лежит единственная целая точка O, то на каждой стороне параллелограмма M^* лежит по одной целой точке, откуда $b + b^* = 4 + 8 = 12$.

3. а) Треугольники ABC и $A'BC$ имеют общее основание BC, а поскольку $AB = BA'$, то соответствующие высоты равны. Значит, площади этих треугольников равны.

б) Пусть D — середина BC. Заметим, что при центральной симметрии с центром D решетка переходит в себя. Поэтому если треугольник ABC — простой, то его образ при этой центральной симметрии $A''BC$ — тоже простой. Аналогично треугольник $A''BA'$ простой, поскольку получается центральной симметрией из $A''BC$. Значит, внутри параллелограмма $A''A'BC$ нет узлов, в частности, $A'BC$ — простой.

в) Рассмотрим минимальный прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, содержащий наш треугольник. Тогда на каждой его стороне лежит по вершине треугольника. Это возможно, только если хотя бы одна из вершин треугольника совпала с вершиной прямоугольника. Если таких совпадающих вершин три, то легко видеть, что наш треугольник — минимальный. Если их две и они являются противоположными (для прямоугольника), то, очевидно, угол при третьей вершине треугольника тупой. Остальные случаи для простого треугольника невозможны. Действительно, пусть треугольник и прямоугольник имеют общую вершину A, а больше совпадающих вершин либо нет, либо это одна из соседних с ней вершин прямоугольника. Обозначим через D вершину прямоугольника, противоположную к A, а через M — середину стороны треугольника, противоположной к A. Тогда легко видеть, что точка, симметричная точке D относительно M, — узел, лежащий внутри исходного треугольника или внутри его стороны.

г) Достаточно сделать прыжок через вершину B с тупым углом. Так как AC наибольшая сторона, то $AC > BC$ и $AC > AB = BA'$. Так как угол ABC тупой, то он больше угла $A'BC$, значит $AC > A'C$ (потому что две другие стороны треугольников ABC и $A'BC$ одинаковы).

д) Будем, пока это возможно, уменьшать длину наибольшей стороны простого треугольника. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так как квадрат длины этой стороны принимает лишь целые значения (по теореме Пифагора). Согласно пункту г) этот процесс остановится на минимальном треугольнике.

е) Следует из пунктов а) и д).

4. а) Пусть $ABCD$ — наш четырехугольник, $O = AC \cap BD$. Так как $ABCD$ не содержит узлов внутри и на сторонах, то треугольники ABC и ACD — простые. По задаче 3 е) их площади равны $1/2$. Отсюда $BO = OD$. Аналогично $AO = OC$, следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

б) Без ограничения общности можно считать, что на сторонах пятиугольника $ABCDE$ нет узлов (иначе рассмотрим меньший пятиугольник). Тогда по пункту а) $ABCD$ — параллелограмм, $BCDE$ — тоже параллелограмм. Отсюда $A = E$ — противоречие. Значит, искомого пятиугольника не существует.

в) *Ответ*: 6. Пример изображен на рис. 6 *д*. Докажем максимальность (она также следует, конечно, из теоремы о 12). Проведем через единственный узел O внутри многоугольника прямую, не проходящую через его вершины. Она разбивает плоскость на две части. Если число вершин $\geqslant 7$, то по принципу Дирихле в одной из частей находится хотя бы 4 вершины. Обозначим их A, B, C, D. Тогда внутри пятиугольника $OABCD$ нет узлов, что противоречит пункту б). Максимальность доказана.

Отсюда получаем, что число вершин многоугольника M может принимать значения $n = 3$, 4, 5, 6.

5. а) Пусть треугольник ABC содержит внутри единственный узел O. Тогда треугольники AOB, BOC и COA — простые, по задаче 3 е) их площади равны $1/2$. Это означает, в частности, что прямая AO равноудалена от вершин B и C. По признаку AO — медиана. Аналогично BO и CO — медианы.

б) Согласно пункту а) точка O — это точка пересечения медиан данного треугольника ABC. Тогда по известному свойству этой точки

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AO}, \\ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BO}, \\ \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CO}. \end{cases}$$

Но векторы в левой части — это векторы сторон двойственного треугольника. Значит, двойственный треугольник получается из треугольника, построенного на векторах AO, BO и CO, растяжением в 3 раза. Поскольку отрезки $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CO}$ не содержат узлов внутри, то отсюда получаем, что каждая сторона двойственного треугольника содержит ровно 2 узла (кроме вершин). Поэтому $b + b^* = 3 + 9 = 12$.

6. а) *Ответ*: $2i + b - 2$. Посчитаем сумму углов всех треугольников триангуляции двумя способами. С одной стороны, она равна $n\pi$, где n — число треугольников. С другой стороны, в эту сумму внутренние узлы дают вклад $2i\pi$, поскольку в каждом из них примыкающие треугольники образуют полный угол. Граничные узлы дают вклад, равный сумме углов b-угольника (у которого, возможно, некоторые углы равны π), т. е. $(b - 2)\pi$. Сравнивая полученные выражения для суммы углов, получаем ответ.

б) Формула Пика следует из задачи 3 и пункта а).

Более подробно данное доказательство обсуждается в статье [1]. Дадим указания к более простому доказательству (по сравнению с решением задачи 3; сама задача 3 является следствием формулы Пика). Обозначим через $\varphi(P, M)$ угол, под которым виден многоугольник M из узла P, т. е.

$$\varphi(P, M) = \begin{cases} \angle P, & \text{если } P \text{ — вершина,} \\ \pi, & \text{если } P \text{ лежит на стороне,} \\ 2\pi, & \text{если } P \text{ лежит внутри } M. \end{cases}$$

Рассмотрим величину

$$\varphi(M) = \sum_{P \in M} \varphi(P, M),$$

где сумма берется по всем узлам внутри и на границе M. Теперь достаточно доказать следующие утверждения.

1) $\varphi(M \cup N) = \varphi(M) + \varphi(N)$, если многоугольники M и N не имеют общих внутренних точек.

2) $\varphi(M) = 2\pi S(M)$,

а) если M — прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки;

б) если M — прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки;

в) если M — произвольный треугольник;

г) если M — произвольный многоугольник.

3) $\varphi(M) = (2i + b - 2)\pi$.

7. Если вершины многоугольника лежат в узлах, то квадрат стороны — число целое (по теореме Пифагора), а площадь — число полуцелое (по формуле Пика), поэтому их отношение рационально.

8. а) *Ответ*: 31. Из формулы Пика следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей; по условию все они лежат на границе многоугольника).

б) *Ответ*: $28 + 36\sqrt{2}$. Нетрудно придумать путь короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может. На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим как на диагонали квадрат 1×1. Одна половинка этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но общая площадь, занятая такими половинками, не превышает $49 - 31 = 18$, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги. Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

9. Ответ на все 3 вопроса утвердительный. Пункт а) следует из в).

б) Достаточно доказать, что из данного многоугольника, не содержащего внутри себя узлов, последовательностью добавлений и удалений вершин можно получить минимальный простой треугольник (см. задачу 3 в). Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами во всех его граничных узлах. В ней все треугольники простые. Среди них найдется «крайний» треугольник, т. е. треугольник, имеющий две общие стороны с исходным многоугольником. Удалим его. Будем продолжать действовать таким образом, пока не останется один простой треугольник. Остается воспользоваться задачей 3 д), поскольку прыжок простого треугольника есть результат добавления треугольника и последующего удаления исходного треугольника.

в) Докажем, что из любого параллелограмма с $b = 4$, $i = 1$ серией удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм на рис. 2 *б*. Тем самым мы сведем нашу задачу к задаче 13 б). Пусть

$ABCD$ наш параллелограмм. Треугольник AOB простой. Если он — минимальный, то наш параллелограмм совпадает с параллелограммом на рис. 2 *б*. Иначе рассмотрим последовательность прыжков треугольника AOB, переводящую его в минимальный (см. задачу 3 е)), и будем на каждом шаге достраивать треугольник AOB до параллелограмма. Легко видеть, что любые два соседних параллелограмма в построенной цепочке получаются друг из друга серией удалений/добавлений треугольников. Наше утверждение доказано.

10. См. рис. 8. Докажем, что картинки на рис. 8 *а*, *б* выглядят именно так. Пусть точка A на рис. 8 *а* имеет координаты (u, v), а прямая l задается уравнением $ax + by = 1$. Тогда $A \in l \Longleftrightarrow au + bv = 1 \Longleftrightarrow l^* \in A^*$, что и требовалось. Далее, пусть l — прямая, на которой лежат точки на рис. 8 *б*. Тогда из предыдущего рассуждения следует, что три прямые A^*, B^* и C^* имеют общую точку l^*.

Докажем теперь последнее утверждение задачи 10. Пусть точка C имеет координаты (a, b), тогда $ax + by = 1$ — уравнение прямой C^*. Докажем, что $C^* \perp OC$. Если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — две различные точки на прямой $ax + by = 1$, то $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$. Это означает, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равно нулю, т. е. $C^* \perp OC$. Остается проверить, что $\rho(O, C^*) \cdot OC = 1$, т. е. что *расстояние ρ от начала координат до прямой $ax + by = 1$ равно* $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Пусть X и Y — точки пересечения нашей прямой с осями Ox и Oy соответственно. Их координаты равны $X\left(\dfrac{1}{a}, 0\right)$ и $Y\left(0, \dfrac{1}{b}\right)$. Посчитаем двумя способами площадь S треугольника XOY. С одной стороны, $S = \dfrac{1}{2} OX \cdot OY = \dfrac{1}{2ab}$.

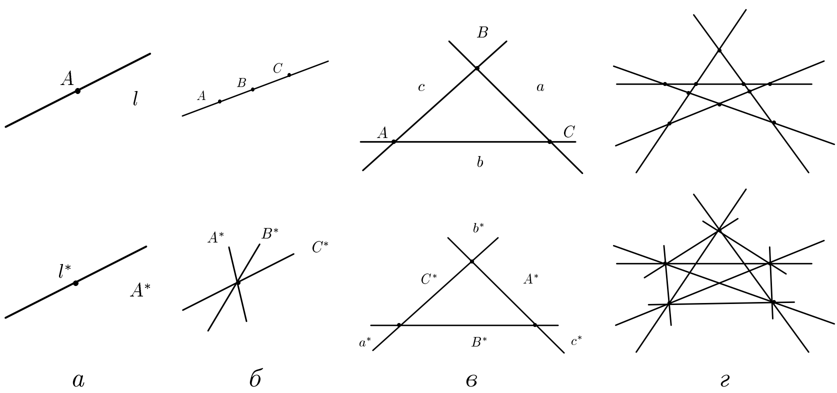


Рис. 8

С другой, $S = \frac{1}{2}\rho \cdot XY = \frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$. Сравнивая найденные выражения для S, получаем требуемое.

Заметим, что прямая, двойственная точке A, есть не что иное как *поляра* этой точки относительно единичной окружности.

11. Доказательство основано на следующем замечании (которое следует из задачи 3 е)):

O — единственный узел внутри $M \iff$ для любых двух соседних узлов A и B на границе M площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}$.

Для доказательства равносильности двух определений двойственного многоугольника достаточно проверить, что вектор $\overrightarrow{OC}$, где $C = (AB)^*$, получается из $\overrightarrow{AB}$ поворотом на 90° против часовой стрелки. Согласно задаче 10 $AB \perp OC$. По той же задаче $\rho(O, AB) \cdot OC = 1$. С другой стороны, согласно замечанию, сделанному выше, $\frac{1}{2} = S(AOB) = \frac{1}{2}\rho(O, AB) \cdot AB$. Значит, $AB = OC$. Тем самым установлено, что OC получается из AB поворотом на 90°. Легко видеть, что если граница M ориентирована по часовой стрелке, то этот поворот происходит против часовой стрелки.

Для доказательства равенства $M = M^{**}$ достаточно заметить, что стороны многоугольника M^* двойственны вершинам исходного. Действительно, поскольку $A_i \in A_{i-1}A_i$ и $A_i \in A_iA_{i+1}$, то $(A_{i-1}A_i)^* \in A_i^*$ и $(A_iA_{i+1})^* \in A_i^*$, т. е. прямая A_i^* содержит сторону двойственного многоугольника.

12. Предположим, что внутри M^* есть еще один узел Q, отличный от O. Тогда он расположен внутри некоторого треугольника AOB, где A и B — пара соседних вершин многоугольника M. Треугольники OQA и OQB — простые, по задаче 3 е) их площади равны $1/2$. Отсюда следует (смотри решение задачи 5 а)), что Q лежит на медиане OM. По определению M^* на границе M найдутся три узла D, E и F, такие что $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OB}$. Легко видеть, что $DF \parallel OM$, следовательно, $DF \parallel OQ$. Но $DF = 2OM > 2OQ$, поэтому внутри DF есть хотя бы 2 целые точки. Так как M — выпуклый, есть две возможности: либо DF лежит внутри M, либо DF — часть границы M. В первом случае получаем, что внутри M содержится хотя бы 2 узла. Во втором случае $M = DEF$ вообще не содержит внутри себя узлов. Получаем противоречие. Значит, такого узла Q не найдется.

13. а) Нам достаточно доказать, что, например, удаление простого треугольника $A_1A_2A_3$ из M приводит к добавлению простого треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$ к M^* (рис. 9). Здесь через A_{kl} обозначена такая точка,

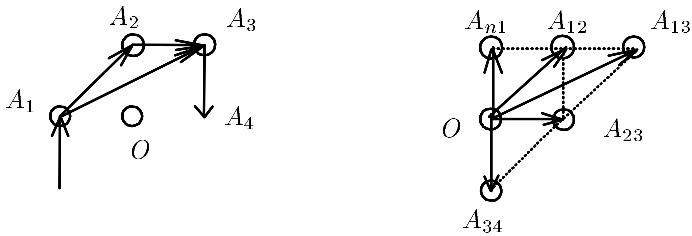


Рис. 9

что $\overrightarrow{OA_{kl}} = \overrightarrow{A_kA_l}$. В частности, если $l = k+1$, то A_{kl} — вершина многоугольника M^*. Удалим $A_1A_2A_3$. Тогда у многоугольника M^* исчезнут вершины A_{12} и A_{23}, зато добавится новая вершина A_{13}. Ее еще нужно соединить отрезками с A_{n1} и A_{34}. Покажем, что точки A_{12} и A_{23} лежат на этих отрезках. В самом деле, так как O — единственная целая точка внутри M, то треугольники A_1OA_3, A_2OA_3, A_4OA_3 простые. Из формулы Пика следует, что их площади равны $1/2$. Поскольку они имеют общее основание OA_3, то проекции векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ на перпендикуляр к OA_3 равны. Отсюда следует, что точки A_{13}, A_{23} и A_{34} лежат на одной прямой, а так как M — выпуклый, то A_{23} лежит между двумя остальными (это очевидно также из второго определения двойственного многоугольника). Аналогично доказывается, что A_{12} принадлежит отрезку $A_{n1}A_{13}$. Значит, преобразование M^* сводится к добавлению треугольника $A_{12}A_{13}A_{23}$. Заметим, что треугольник $OA_{12}A_{13}$ получается из простого треугольника $A_1A_2A_3$ параллельным переносом, а $OA_{23}A_{13}$ — центральной симметрией. Поэтому треугольник $A_{12}A_{13}A_{23}$ — простой, что и требовалось.

б) Действительно, предположим вначале, что у M есть диагональ, не проходящая через O. Разрежем M вдоль этой диагонали и рассмотрим ту из полученных частей, которая не содержит O. Эта часть обязательно содержит простой треугольник вида $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Удалим его, уменьшив тем самым число b. Будем действовать так, пока это возможно. Очевидно, есть только три случая, когда требуемой диагонали не найдется.

1) $b = 4$, $M = ABCD$, $O = AC \cap BD$. Так как отрезки OA, OB, OC и OD не содержат целых точек, то $OA = OC$ и $OB = OD$, т. е. $ABCD$ — искомый параллелограмм.

2) $b = 4$, $M = ABCD$, один из углов, скажем BCD, — развернутый. В этом случае обозначим через D' точку, симметричную точке D относительно O, через E — середину $D'B$. Искомая серия удале-

ний/добавлений треугольников имеет вид:

$$ABCD \to AEBCD \to AD'EBCD \to AD'ECD \to AD'CD$$

(рис. 10 слева).

3) $b = 3$, $M = ABC$. В этом случае обозначим через A' и C' точки, симметричные относительно O вершинам A и C соответственно. Тогда искомая серия имеет вид:

$$ABC \to AC'BC \to AC'BA'C \to AC'A'C$$

(рис. 10 справа).

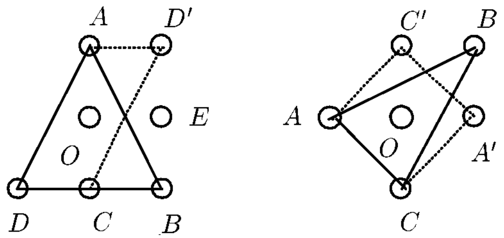


Рис. 10

Тем самым в каждом случае мы получили требуемый параллелограмм.

в) Из пункта а) получаем, что при удалении/добавлении треугольника величина $b + b^*$ сохраняется. Согласно пункту б) данный многоугольник можно перевести в параллелограмм с $b = 4$ серией удалений/добавлений треугольников. Для такого параллелограмма $b + b^* = 12$ (задача 2). Теорема о 12 доказана.

14. Пример на рис. 1 *д* показывает, что замкнутая ломаная, двойственная к невыпуклому многоугольнику, может иметь самопересечения. Поэтому теорему о 12 естественно пытаться обобщить сразу именно на этот случай. Итак, пусть M — замкнутая ломаная с вершинами в узлах, возможно самопересекающаяся. Замечание в начале решения задачи 11 подсказывает, каким условием нужно заменить в нашей ситуации условие того, что O — единственный узел внутри M. Нужно потребовать, чтобы *для каждого звена AB ломаной площадь треугольника AOB равнялась* $1/2$ (при этом мы считаем все узлы, попавшие на ломаную, ее вершинами, возможно с углом 180°). Именно при этом условии (плюс условие положительности всех сторон, приведенное ниже) два определения двойственного многоугольника равносильны.

Мы предлагаем в этом месте читателю прервать чтение и попытаться, рассмотрев несколько примеров, самому придумать обобщение теоремы о 12 на самопересекающиеся ломаные.

Ответ выглядит следующим образом. Назовем звено AB ломаной *положительным*, если при движении точки X по нему от A к B отрезок OX вращается по часовой стрелке, и *отрицательным* — иначе. Корректность данного определения следует из того, что площадь треугольника AOB равна $1/2$, в частности, точки A, O и B не лежат на одной прямой. Обозначим через b_+ и b_- количество положительных и отрицательных звеньев ломаной L соответственно, а через b_+^* и b_-^* — аналогичные числа для L^*. Теперь может быть сформулирована

Теорема о 12 для ломаных. *Пусть M — замкнутая ломаная с вершинами в узлах* (*причем все узлы, попавшие на M, мы считаем вершинами, возможно с углом* $180°$). *Пусть нашелся такой узел O, что для каждого звена AB ломаной M площадь треугольника AOB равна* $1/2$. *Предположим, что M делает r оборотов вокруг точки O. Тогда*

$$b_+ - b_- + b_+^* - b_-^* = 12r.$$

Эта теорема доказана в статье [7]. Ее элементарное доказательство неизвестно.

15. Кривая, двойственная к единичной окружности, — она сама, что следует из задачи 10. Рис. 11 завершает рис. 5.

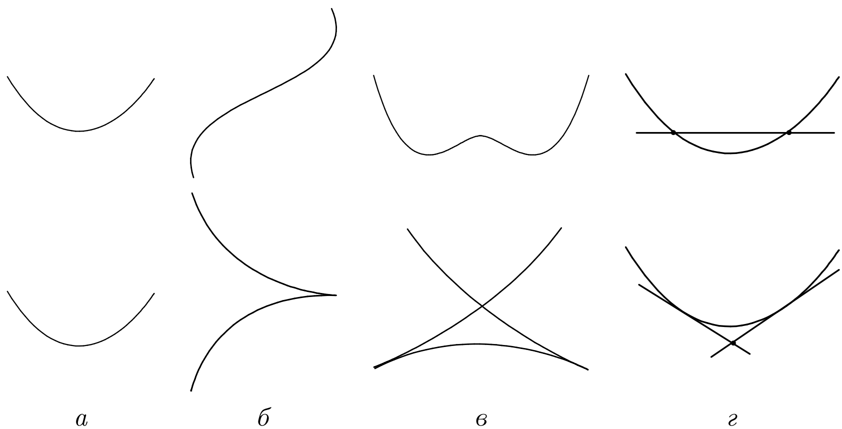


Рис. 11

Для любой гладкой кривой γ действительно $\gamma^{**} = \gamma$. Приведем неформальное доказательство этого утверждения. Рассмотрим кривую γ^*. Чтобы построить двойственную к ней кривую, нужно рассмотреть касательные к γ^*. Вместо касательной мы возьмем на γ^* две близкие точки и проведем через них прямую (верхняя часть рис. 11 *г*). Двойственная картинка будет выглядеть как на нижней части рис. 11 *г*. Если начать сближать выбранные точки на кривой γ^*, то наша прямая (секущая) будет стремиться к касательной, а двойственная ей точка будет стремиться к точке на кривой γ. Это и означает, что множество касательных прямых к γ^* определяет исходную кривую γ, т. е. $\gamma^{**} = \gamma$.

Более подробно о двойственных кривых написано в замечательной статье [5].

16. Ответ авторам неизвестен.

17. а) *Ответ*: можно.

б) *Ответ*: нельзя. Доказательство. Предположим, что требуемый набор ломаных существует. Раскрасим узлы клетчатой решетки в шахматном порядке. Тогда все вершины — одного цвета, пусть для определенности белого. Тогда во всей решетке, кроме вершин, черных узлов на 3 больше. Каждая ломаная соединяет два узла на границе. При этом ломаная, соединяющая два черных узла, содержит черных узлов на 1 больше, чем белых. Ломаная, соединяющая два белых узла — наоборот, а ломаная с концами разного цвета — поровну. Поэтому на границе прямоугольника черных узлов должно быть ровно на 6 больше, чем белых. А в действительности черных узлов там на 4 больше, чем белых. Получаем противоречие, т. е. требуемого набора ломаных не существует.

18. *Ответ*: а) при $p, q \geqslant 3$ и четном $(p-1)(q-1)$; б) $(p-1)(q-1)$; в) $\dfrac{(p-1)(q-1)}{2} - 1$. Решение легко следует из соображений четности и формулы Пика.

19. Пункт а) сразу получается из формулы Пика, а также может быть доказан аналогично этой формуле (см. замечание после решения задачи 6).

В пункте б) можно предложить несколько различных формул, например,

$$6V(M) = n(3M) - 3n(2M) + 3n(M) - 1$$

или

$$6V(M) = n(2M) - 2n(M) - b(M) + 3.$$

Эти формулы доказаны в интересной статье [2]. В ней также объясняется, как можно получить все такие формулы. Рекомендуем также статью [3] того же автора.

20. Обозначим через $n(i)$ максимальное число вершин выпуклого многоугольника с ровно i узлами внутри. Приведем значения $n(i)$ при малых i:

i	0	1	2	3	4	5	...
$n(i)$	4	6	6	6	8	7	...

Равенства $n(0)=4$ и $n(1)=6$ фактически доказаны в задаче 4 б), в). Для доказательства равенства $n(2)=6$ достаточно провести прямую через две внутренние точки и рассуждать далее аналогично решению 4 в). Для бо́льших i жюри известна следующая оценка для числа $n(i)$:

$$n(i) \leqslant 2i \text{ при } i \geqslant 3.$$

Для доказательства рассмотрим выпуклую оболочку i внутренних узлов. Это либо отрезок, либо многоугольник с не более чем i вершинами. В первом случае, рассуждая аналогично решению задачи 4с, легко получить оценку $n(i) \leqslant 6$. Во втором случае возьмем произвольную точку O (не обязательно узел) внутри выпуклой оболочки и проведем из нее лучи через все вершины выпуклой оболочки. Выбором точки O можно добиться, чтобы вершины исходного многоугольника не попали на наши лучи. Если число вершин $n(i) > 2i$, то по принципу Дирихле в одной из частей, на которые разбивают плоскость проведенные лучи, найдется хотя бы 3 вершины. Вместе с двумя вершинами выпуклой оболочки, принадлежащими той же части, они образуют выпуклый пятиугольник без узлов внутри, что противоречит задаче 4 б). Требуемая оценка доказана.

Известна также оценка

$$n(i) \leqslant Cn^{1/3}$$

с некоторой константой C, но доказательство довольно сложно.

Интересное замечание: $n(5) < n(4)$(!).

21. а) Классификация выпуклых многоугольников без узлов внутри приведена в статье [6].

б) Классификация выпуклых многоугольников с ровно 1 узлом внутри приведена в статье [7] (правда без доказательства). Оказывается, существует всего 16 таких многоугольников с точностью до аффинного преобразования. Доказательство основано на той же идее, что и в пункте а) (смотри статью [6]).

22. а) *Ответ*: прямая $ax + by = 1$.

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равно числу решений системы

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ y = ax + b. \end{cases}$$

Преобразованием $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ эта система сводится к системе (считаем $b \neq 0$)

$$\begin{cases} y = -x^2, \\ ax + by = 1. \end{cases}$$

Число решений этой системы равно количеству точек пересечения кривой $y = -x^2$ и прямой $ax + by = 1$. Но это тоже самое, что количество касательных, которые можно провести из точки (a, b) к двойственной кривой (см. рис. 11 *г*). Остается заметить, что кривая $x^2 = 4y$ двойственна к $x^2 = -y$ (в чем можно убедиться, например, с помощью дифференцирования). Для кубического уравнения рассуждения аналогичны.

в) *Ответ*:

$$\begin{cases} 3, & \text{если } D < 0, \\ 2, & \text{если } D = 0 \text{ и } ab \neq 0, \\ 1, & \text{если } D > 0 \text{ или } a = b = 0, \end{cases}$$

где $D = 4a^3 + 27b^2$ — дискриминант кубического уравнения. Решение поясняет рис. 11 *б*. Подробнее о двойственных кривых и их связи с решением уравнений можно прочитать в статье [5]. Любопытно, что при определении числа решений систем алгебраических уравнений естественным образом возникают многоугольники с вершинами в узлах клетчатой бумаги (так называемые многоугольники Ньютона). О многоугольниках Ньютона можно прочитать в интересных статьях [2], [3].

Литература

[1] *Васильев Н. Б.* Вокруг формулы Пика // Квант. 1974. № 12.

[2] *Кушниренко А.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. 1977. № 4.

[3] *Кушниренко А.* Многоугольник Ньютона // Квант. 1977. № 6.

[4] *Реповш Д.*, *Скопенков М.*, *Ценцель М. Б.* Элементарное доказательство теоремы о 12 целых точках // Матем. заметки. 2005. Т. 77, вып. 1. С. 117–120.

[5] *Табачников С. Л.* Геометрия уравнений // Квант. 1988. № 10.

[6] *Хованский А. Г.* Многоугольники Ньютона, кривые на торических поверхностях и обращение теоремы Вейля // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52, вып. 6. С. 113–142.

[7] *Poonen B.*, *Rodriguez-Villegas F.* Lattice polygons and the number 12 // Amer. Math. Mon. 2000. V. 107, № 3. P. 238–250.

Третья проблема Гильберта и разрезания прямоугольника[2] (10–11)

В. В. Прасолов, М. Б. Скопенков

Данная подборка посвящена решению следующих двух задач.

Задача A. Третья проблема Гильберта. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на конечное число многогранников, из которых складывается куб.

Задача B. Комната имеет форму прямоугольника с отношением сторон x. Пол в комнате выложен прямоугольными плитками с таким же отношением сторон, причем хотя бы одна плитка ориентирована поперек комнаты, а не вдоль нее (рис. 1). Докажите, что x является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

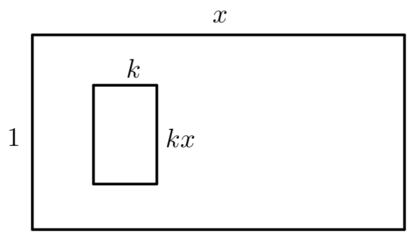


Рис. 1

Удивительно, что решить 3-ю проблему Гильберта можно, изучая только разрезания прямоугольников, а не многогранников! В данном цикле задач будет предложен новый вариант элементарного решения 3-й проблемы Гильберта, основанный на этой идее.

Что касается задачи B, то, оказывается, ее можно решить с помощью... физической интерпретации! А именно, каждому разрезанию прямоугольника мы сопоставляем электрическую схему, составленную из сопротивлений.

1. Разрежьте куб на 6 равных тетраэдров.

2. Выложите плитками комнаты с указанным отношением сторон, как это требуется в задаче B:

а) $x = \sqrt{2}$;
б) $x = \sqrt{p/q}$, p и q — целые;
в) $x = \sqrt[4]{2}$;

[2] Авторы благодарны С. Дориченко, А. Заславскому, К. Кохасю, Б. Френкину, Г. Челнокову и А. Шаповалову за полезные обсуждения.

г)* $x = \sqrt{r}$, где r — периодическая цепная дробь;

д)* $x = \sqrt{s}$, где s — корень кубического многочлена с целыми коэффициентами без рациональных корней (требуется построить замощение для какого-нибудь одного значения s, удовлетворяющего условию);

е) выложите произвольную комнату n плитками, ориентированными вдоль комнаты, $n \geqslant 4$, $n \neq 5$.

Третья проблема Гильберта: сведение к планиметрической задаче

Пусть M — многогранник. Занумеруем его ребра числами $1, 2, \ldots, n$. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины соответствующих ребер, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Сопоставим многограннику M набор прямоугольников $l_i \times \alpha_i$ на плоскости, у которых стороны l_i горизонтальны, а стороны α_i вертикальны (рис. 2).

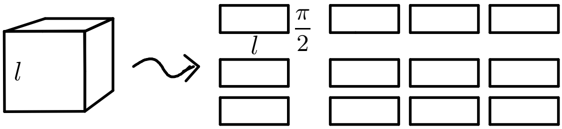


Рис. 2

Будем называть два таких набора *прямоугольно равносоставленными* (*□-равносоставленными*), если прямоугольники одного набора можно разрезать на несколько меньших прямоугольников, из которых можно сложить второй набор, используя только параллельные переносы частей (рис. 3). Назовем два многогранника *равносоставленными*, если один из них разрезается на несколько меньших многогранников, из которых можно сложить второй многогранник, как угодно поворачивая части.

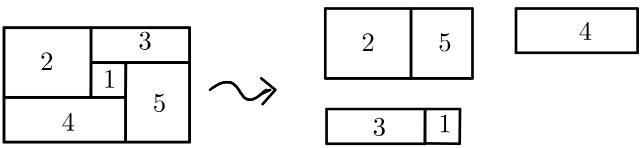


Рис. 3

Следующая лемма сводит вопрос о равносоставленности многогранников к задаче планиметрии.

Лемма 1. *Если два многогранника равносоставленны, то соответствующие им наборы прямоугольников будут □-равносоставленны после добавления к ним подходящих прямоугольников вида* $l \times \pi$.

Доказательство этой леммы содержится в задаче 3.

Предположим, что выпуклый многогранник M разрезан на многогранники $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

3. а) Пусть e — ребро многогранника M, l — его длина, а α — двугранный угол при этом ребре. Обозначим через $l_1, l_2, \ldots l_n$ длины всех ребер многогранников M_i, лежащих на ребре e, а через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда прямоугольник $l \times \alpha$ можно разрезать на n прямоугольников $l_1 \times \alpha_1, \ldots, l_n \times \alpha_n$.

б) Пусть ℓ — прямая в пространстве, не содержащая ребер многогранника M. Пусть $l_1, l_2, \ldots l_n$ — длины всех ребер многогранников M_i, лежащих на прямой ℓ, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при соответствующих ребрах. Тогда набор n прямоугольников $l_1 \times \alpha_1, \ldots, l_n \times \alpha_n$ $\square$-равносоставлен с некоторым прямоугольником вида $l \times \pi$.

в) Докажите лемму 1.

Чтобы доказать, что правильный тетраэдр и куб одинакового объема не равносоставленны, мы покажем, что соответствующие им наборы прямоугольников не равносоставленны. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

г) Докажите, что двугранный угол θ при ребре правильного тетраэдра несоизмерим с π.

Таким образом, решение задачи А сводится к следующему утверждению.

Лемма 2. *Если θ и π несоизмеримы (т. е. $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$), то при любых a и b прямоугольники $a \times \theta$ и $b \times \pi$ не $\square$-равносоставленные. Более того, они остаются не $\square$-равносоставленными после добавления к ним любых прямоугольников вида $l \times \pi$.*

Третья проблема Гильберта: решение планиметрической задачи

В этом разделе мы докажем лемму 2. Доказательство содержится в пунктах задачи 4.

Пусть дан некоторый набор прямоугольников. Можно получить новый набор, разрезав один из данных прямоугольников на два новых. Такую операцию назовем *элементарным преобразованием* набора.

4. а) Если два набора прямоугольников $\square$-равносоставленны, то один из них можно получить из другого последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним.

Пусть θ и π несоизмеримы. Предположим, что из прямоугольника $a \times \theta$ получили прямоугольник $b \times \pi$ последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним. Пусть θ, π, y_1, y_2, y_3, $\ldots$, y_N —

длины вертикальных сторон всех прямоугольников, которые возникали в данной последовательности элементарных преобразований. Обозначим

$$Y = \{\theta, \pi, y_1, \ldots, y_N\}.$$

б) Можно выбрать такие числа $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n \subset Y$, чтобы любое число $y \in Y$ единственным образом представлялось в виде

$$y = p\theta + q\pi + p_1 y'_1 + p_2 y'_2 + \ldots + p_n y'_n,$$

где числа p, q, p_1, p_2, $\ldots$, p_n — рациональные.

Зафиксируем набор таких чисел y'_1, $\ldots$, y'_n (как в задаче 4б)). Для числа $y \in Y$ обозначим $f(y) = p$, где p — коэффициент при θ в представлении

$$y = p\theta + q\pi + p_1 y'_1 + \ldots + p_n y'_n.$$

Если M — набор прямоугольников $x_1 \times y_1$, $x_2 \times y_2$, $\ldots$, $x_n \times y_n$, где все $y_i \in Y$, то положим

$$J(M) = x_1 f(y_1) + x_2 f(y_2) + \ldots + x_n f(y_n).$$

в) Величина $J(M)$ не меняется при элементарном преобразовании набора M.

г) Докажите лемму 2.

д) Докажите теорему Дена: правильный тетраэдр и куб не равносоставленны.

Наш метод позволяет установить и другие интересные факты о разрезаниях фигур.

5. а) Докажите другую теорему Дена: если прямоугольник $a \times b$ разрезан на квадраты, то $\frac{a}{b}$ рационально.

б) Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько (больше 1) правильных тетраэдров.

Разрезания прямоугольника и электрические схемы

Разрезанию прямоугольника на прямоугольники можно сопоставить электрическую схему, как показано на рис. 4. Каждому прямоугольнику соответствует резистор, а каждой вертикальной линии разреза (а также вертикальным сторонам исходного прямоугольника) — узел, в котором соединяются несколько резисторов. Сопротивление каждого резистора равно отношению горизонтальной стороны соответствующего прямоугольника к вертикальной. Можно показать, что общее сопротивление данной схемы равно отношению сторон разрезаемого прямоугольника.

Покажем, как искать общее сопротивление электрической схемы.

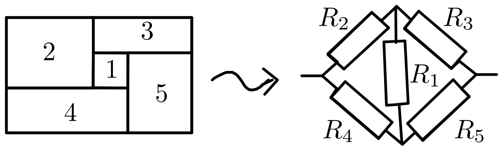


Рис. 4

Рассмотрим электрическую схему из резисторов. Пусть для каждого резистора задано его *сопротивление* R_k. Зафиксируем начало и конец схемы, а также число $U > 0$ (напряжение схемы). Каждому узлу сопоставим действительное число U_i, которое будем называть *напряжением* в данном узле, следующим образом. В начальном узле напряжение положим равным нулю, а в конечном — равным U. В остальных узлах выберем напряжения так, чтобы сумма величин $\dfrac{(\triangle U_k)^2}{R_k}$ по всем резисторам была минимальна, где $\triangle U_k$ — разность напряжений на концах k-го резистора. Обозначим эту сумму через P, она называется *общим выделением тепла* схемы.

Общим сопротивлением схемы называется величина $R = \dfrac{U^2}{P}$.

Будем считать известным, что распределение напряжений с минимальным выделением тепла существует.

Пример 1. Рассмотрим схему из двух резисторов R_1 и R_2, соединенных параллельно. По определению $P = \dfrac{U^2}{R_1} + \dfrac{U^2}{R_2}$, и общее сопротивление равно $R = \dfrac{U^2}{P} = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

Пример 2. Рассмотрим схему из двух резисторов R_1 и R_2, соединенных последовательно. Пусть U_1 — напряжение в их общем узле. Величина $\dfrac{U_1^2}{R_1} + \dfrac{(U - U_1)^2}{R_2}$ должна быть минимальной. Это квадратный трехчлен относительно U_1. Находя

$$U_1 = \frac{U}{R_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}, \quad \text{получим } R = R_1 + R_2.$$

Элементарным преобразованием электрической схемы называется одна из следующих операций:

1) замена одного резистора с сопротивлением $\dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ на два параллельно соединенных резистора R_1 и R_2;

2) замена одного резистора с сопротивлением $R_1 + R_2$ на два последовательно соединенных резистора R_1 и R_2;

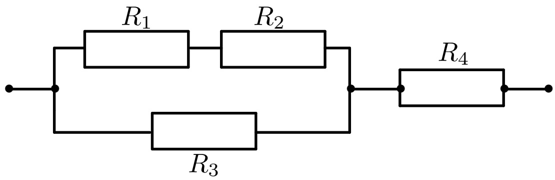


Рис. 5

3) объединение двух узлов с одинаковым напряжением.

6. Найдите общее сопротивление и соответствующее разбиение прямоугольника для схем

а) на рисунке 4 при $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5$;

б) на рис. 5.

7. а) Пусть квадрат разрезан на квадраты и прямоугольники, у которых отношение горизонтальной стороны к вертикальной равно R. Тогда соответствующая электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и R и имеет общее сопротивление 1.

б)* Электрическая схема состоит из резисторов сопротивлением 1 и R. Докажите, что сопротивление всей схемы выражается в виде $\dfrac{P(R)}{Q(R)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

в) Пусть напряжения в двух узлах, соединенных с некоторым резистором R, различны. Докажите, что общее сопротивление схемы растет с ростом сопротивления этого резистора R.

г) Решите задачу В.

д)* (Решение этой задачи авторам неизвестно.) Верно ли, что выложить комнату так, как это требуется в задаче В, можно тогда и только тогда, когда число x является корнем многочлена степени n с целыми коэффициентами, имеющего ровно $n-1$ отрицательный корень?

Замечание. Силой тока на резисторе называется величина $I_k = \dfrac{\triangle U_k}{R_k}$, где $\triangle U_k$ — разность напряжений между узлами, соединенными с резистором. Покажем, что сумма сил тока на резисторах, выходящих из неконцевого узла, равна нулю. Зафиксируем некоторый неконцевой узел. Перенумеруем узлы так, чтобы этот узел был первым, а сопротивления резисторов, выходящих из этого узла, были $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Посмотрим, как зависит общее выделение тепла схемы от U_1. Общее выделение тепла равно

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(U_i - U_1)^2}{R_i} + C,$$

где C — константа, не зависящая от U_1. Минимум достигается в вершине параболы, т. е. при

$$U_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{U_i}{R_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}},$$

или, что то же самое, при

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i - U_1}{R_i} = 0.$$

Из наших определений следуют *законы Кирхгофа*:

1) сумма сил токов на резисторах, выходящих из одного узла, равна нулю;

2) $I_1R_1 + I_2R_2 + \ldots + I_nR_n = U$ для любого пути $1, 2, \ldots, n$ от начала к концу, где U — общее напряжение, не зависящее от пути.

Обратно, из законов Кирхгофа следует, что токи распределяются так, чтобы общее выделение тепла было минимальным.

Зачетные задачи: 3 а), г); 4 в), г).

Контрольные вопросы

I. Рассмотрим набор прямоугольников, соответствующий правильному тетраэдру со стороной a и двугранными углами θ между гранями. Какому из следующих прямоугольников прямоугольно равносоставлен этот набор?

а) $4a \times \theta$; б) $4a \times 4\theta$; в) $6a \times \theta$; г) $6a \times 6\theta$.

II. На сколько равных правильных тетраэдров можно разрезать правильный тетраэдр?

а) На любое число тетраэдров;

б) только на 1, 8, 27, 64, ... тетраэдров (т. е. количество должно быть точным кубом);

в) ни на какое число тетраэдров, большее 1.

III. Какие из следующих многогранников равносоставленны с некоторым кубом?

а) Правильный тетраэдр;

б) прямоугольный параллелепипед размером $1 \times 2 \times 4$;

в) прямоугольный параллелепипед размером $1 \times 2 \times 3$.

Решения

1. Геометрическое решение. Куб $ABCDA'B'C'D'$ разрезается на 6 тетраэдров $AC'BB'$, $AC'B'A'$, $AC'A'D'$, $AC'D'D$, $AC'DC$, $AC'CB$

шестью плоскостями, проходящими через пару противоположных вершин A, C' куба и одну из оставшихся вершин. Равенство данных тетраэдров следует из соображений симметрии (например, тетраэдр $AC'BB'$ переходит в тетраэдр $AC'A'D'$ при повороте куба на $120°$ вокруг прямой AC').

Алгебраическое решение. Куб $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ можно разрезать на 6 тетраэдров

$$0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant z \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant z \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant y \leqslant z \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant y \leqslant x \leqslant 1.$$

В действительности, мы описали по-разному один и тот же способ разрезания, в первом случае — на геометрическом языке, а во втором — на алгебраическом.

2. а) Проведем линию, соединяющую середины больших сторон прямоугольника.

б) Разделим две большие стороны прямоугольника на q равных частей, а две меньшие — на p равных частей. Проведем через соответственные точки деления линии, параллельные сторонам прямоугольника.

в) Пусть дан прямоугольник $1 \times x$, $x = \sqrt[4]{2}$. Отрежем от него прямоугольник $1 \times \dfrac{1}{x}$. От полученной полоски $1 \times \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ отрежем два прямоугольника $(x^2 - 1) \times \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$. От новой полоски $(3 - 2x^2) \times \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$ отрежем прямоугольник $(3 - 2x^2) \times \left(\dfrac{3}{x} - 2x\right)$. У полученного прямоугольника $(3 - 2x^2) \times \left(3x - \dfrac{4}{x}\right)$ отношение сторон также равно x, поскольку $x^4 = 2$.

г) Пусть

$$r = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

— периодическая цепная дробь. Так как последовательность a_k периодическая, то для некоторого n

$$r = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{r}}}.$$

Отталкиваясь от данного равенства, нетрудно построить разрезание прямоугольника $1 \times r$ на несколько квадратов и один прямоугольник с отношением сторон r. Действительно, отрежем вначале от прямоугольника $1\times r$ квадраты 1×1 в количестве a_1 штук. Получим полоску $1\times(r-a_1)$ с отношением сторон

$$\frac{1}{r-a_1}=a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{r}}}.$$

От данной полоски отрежем a_2 квадратов $(r-a_1)\times(r-a_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим в итоге прямоугольник с отношением сторон r.

Из построенного разрезания прямоугольника $1\times r$ нетрудно получить требуемое разрезание прямоугольника $1\times\sqrt{r}$: нужно сжать прямоугольник $1\times r$ в $\sqrt{r}$ раз вдоль стороны r.

д) Прямоугольник с отношением сторон a разрезан на 3 вертикальных полоски. В первой полоске сверху вниз: прямоугольники с отношением сторон a, $\frac{1}{a}$; во второй: a, a, $\frac{1}{a}$; в третьей: a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a}$. Действительно:

$$\frac{1}{a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+a}+\frac{1}{\frac{1}{a}+a+a}=a;$$

$$(a^2+1)(2a^2+1)(a^2+2)=$$
$$=(a^2+1)(a^2+2)+(a^2+1)(2a^2+1)+(2a^2+1)(a^2+2);$$

$$2a^6+2a^4-4a^2-3=0.$$

Многочлен $2x^3+2x^2-4x-3$ не имеет рациональных корней. Действительно, если $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь и корень многочлена, то p делит свободный член, а q делит старший. Легко проверить перебором, что ± 3, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$ не являются корнями данного многочлена.

е) Легко построить примеры разрезаний на 4, 6 и 8 частей. По разрезанию на n частей строится разрезание на $n+3$ части.

3. а) Пусть e_i — ребро некоторого многогранника M_j, лежащее на ребре e. Рассмотрим цилиндр C с осью e и радиусом 1. Двугранный угол при ребре e высекает на поверхности цилиндра ленту L длиной α и шириной l. На поверхности меньшего цилиндра C_i с осью e_i и радиусом 1 двугранный угол при ребре e_i высекает ленту L_i ширины α_i и длины l_i. Так как многогранники разрезания не пересекаются и покрывают весь многогранник M, лента L разрезается на ленты $L_1, L_2, \dots, L_n$. Осталось установить естественное соответствие между точками ленты

L и прямоугольника $l \times \alpha$, и мы получим его разрезание на прямоугольники $l_i \times \alpha_i$.

б) Любая точка прямой ℓ, принадлежащая многограннику M, является либо внутренней точкой некоторого многогранника M_i, либо лежит на границе нескольких многогранников разрезания. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ все ребра многогранников разрезания, которые лежат на прямой ℓ (а их длины обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_n$). Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — всевозможные пересечения прямой ℓ с внутренностями граней многогранников M_i. Объединение всех ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образует семейство отрезков на прямой ℓ. Пусть, без ограничения общности, $e_1, e_2, \ldots, e_s$ — все ребра, лежащие на одном из отрезков I этого семейства.

Докажем, что набор прямоугольников $e_1 \times \alpha_1$, $e_2 \times \alpha_2$, $\ldots$, $e_s \times \alpha_s$ $\square$-равносоставлен некоторому прямоугольнику вида $l \times \pi$. После этого, прикладывая друг к другу прямоугольники ширины π, полученные для всех отрезков нашего семейства, получим требуемое утверждение. Пусть C — боковая поверхность цилиндра с осью I и радиусом 1. Двугранные углы при ребрах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в соответствующих многогранниках высекают на цилиндре C ленты $l_i \times \alpha_i$ (длины l_i в направлении оси цилиндра и ширины α_i в «направлении» окружности цилиндра). Так как рассматриваемые многогранники не пересекаются и покрывают весь многогранник M, цилиндр C оказывается разрезан на ленты $l_i \times \alpha_i$ и $f_i \times \pi$. Продолжим все разрезы, направленные «вдоль» окружности цилиндра. Тогда цилиндр C распадется на кольца. Выбросим из всех колец ленты ширины π (части «лишних» лент длиной f_i), а нетронутые кольца разрежем на 2 ленты ширины π. Из лент, которые получились в итоге, можно сложить ленту ширины π, которой соответствует прямоугольник ширины π, разрезанный на части прямоугольников $l_1 \times \alpha_1$, $l_2 \times \alpha_2$, $\ldots$, $l_s \times \alpha_s$, полученные параллельными переносами, вертикальными и горизонтальными разрезами.

в) Действительно, пусть многогранники M и M' равносоставленны. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — набор многогранников, из которых можно сложить как многогранник M, так и многогранник M'. Тогда набор прямоугольников, соответствующий многограннику M, объединенный с некоторым набором прямоугольников ширины π, согласно утверждениям задач 3a и 3b, $\square$-равносоставлен объединению наборов прямоугольников, соответствующих многогранникам $M_1, M_2, \ldots, M_n$. То же самое верно и для многогранника M'. Однако очевидно, что отношение $\square$-равносоставленности транзитивно и симметрично. Значит, наборы прямоугольников, соответствующие многогранникам M и M', становятся равносоставленными после добавления к ним подходящих прямоугольников со стороной π, что и требовалось.

г) Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Пусть M — середина CD. Отрезки AM и BM перпендикулярны CD, поэтому величина угла $\angle AMB$ есть величина двугранного угла при ребре CD тетраэдра. Пусть длина ребра тетраэдра равна a, тогда по формуле высоты правильного треугольника $AM = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. По теореме косинусов для треугольника AMB имеем

$$\cos\theta = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{1}{3}.$$

Докажем по индукции, что $\cos n\theta = \dfrac{a_n}{3^n}$, где a_n — целое и не делится на 3. База индукции для $n = 0$ и $n = 1$ очевидна.

Шаг индукции. Формула для суммы косинусов при $n \geqslant 1$:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta,$$

откуда

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta - \cos(n-1)\theta = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Так как по предположению индукции a_n не делится на 3, то и $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$ не делится на 3.

Значит, $\cos n\theta \neq 1$ ни при каком целом n, отсюда $n\theta \neq 2\pi m$ ни при каких целых n и m, т. е. $\theta \neq \dfrac{m}{n} \cdot 2\pi$. Утверждение доказано.

4. а) Пусть первый набор разрезали на прямоугольники, а затем перенесли их, сложив второй набор. Проведем дополнительные разрезы: продолжим все вертикальные разрезы в разрезании первого набора и все горизонтальные — в разрезании второго. Полученное разрезание можно выполнить последовательностью элементарных преобразований и обратных к ним: сначала разрезаем первый набор последовательно по всем вертикальным разрезам, затем разрезаем каждую из полученных вертикальных полос горизонтальными разрезами. Теперь соберем горизонтальные полосы разрезания второго набора, а затем объединим их в прямоугольники второго набора.

б) Введем следующую операцию для набора θ, π, y_{i_1}, y_{i_2}, $\ldots$, y_{i_k}: из данного набора убирается такой элемент с наибольшим номером i_s, что

$$p\theta + q\pi + \mu_1 y_{i_1} + \mu_2 y_{i_2} + \ldots + \mu_k y_{i_k} = 0,$$

где все коэффициенты рациональные и $\mu_s \neq 0$. Будем применять эту операцию к начальному набору, пока это возможно. Пусть в итоге мы получили набор θ, π, y_{j_1}, y_{j_2}, $\ldots y_{j_n}$, для которого данная операция уже не применима. Докажем, что набор чисел $y'_1 = y_{j_1}$, $y'_2 = y_{j_2}$, $\ldots$, $y'_n = y_{j_n}$ — искомый. Заметим, что для любого элемента x из Y существуют рациональные числа p, q, μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n, такие что

$$x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \ldots + \mu_n y_{j_n}.$$

Пусть

$$p_1\theta + q_1\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \ldots + \mu_n y_{j_n} = x = \\ = p_2\theta + q_2\pi + \xi_1 y_{j_1} + \xi_2 y_{j_2} + \ldots + \xi_n y_{j_n},$$

тогда

$$(p_1 - p_2)\theta + (q_1 - q_2)\pi + (\mu_1 - \xi_1)y_{j_1} + \ldots + (\mu_s - \xi_s)y_{j_s} = 0.$$

Если $\mu_t \neq \xi_t$, то для набора θ, π, y_{j_1}, y_{j_2}, $\ldots$, y_{j_n} можно еще раз применить описанную операцию — противоречие. Значит, $\mu_t = \xi_t$ для всех t. Однако θ и π несоизмеримы и не равны нулю, значит $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$, т. е. для любого элемента x из Y существует единственный набор рациональных чисел p, q, μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_r, такой что

$$x = p\theta + q\pi + \mu_1 y_{j_1} + \mu_2 y_{j_2} + \ldots + \mu_n y_{j_n}.$$

в) Пусть новый набор получен разрезанием прямоугольника $x \times y$.

Случай, когда рассматриваемый разрез вертикальный, очевиден: действительно, инвариант $J(M)$ изменился на величину

$$x_1 f(y) + x_2 f(y) - x f(y) = 0,$$

т. е. не изменился.

Пусть рассматриваемый разрез горизонтальный. Тогда инвариант изменился на величину $xf(y_1) + xf(y_2) - xf(y)$. Докажем, что эта величина равна нулю. Пусть

$$y_1 = f(y_1)\theta + q_1\pi + \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2 + \ldots + \mu_n y'_n,$$
$$y_2 = f(y_2)\theta + q_2\pi + \xi_1 y'_1 + \xi_2 y'_2 + \ldots + \xi_n y'_n.$$

Тогда

$$y = y_1 + y_2 = (f(y_1) + f(y_2))\theta + (q_1 + q_2)\pi + \\ + (\mu_1 + \xi_1)y'_1 + (\mu_2 + \xi_2)y'_2 + \ldots + (\mu_n + \xi_n)y'_n.$$

То есть $f(y) = f(y_1) + f(y_2)$, и наш инвариант не изменился.

г) Так как инвариант сохраняется при элементарном преобразовании набора (задача 4 в)), то по задаче 4 а) инварианты любых двух

$\square$-равносоставленных наборов равны. Однако инвариант для набора $(a \times \theta, l \times \pi)$ равен a, а для $b \times \pi$ — нулю. Следовательно, эти наборы не $\square$-равносоставленные.

д) Предположим обратное. Тогда по лемме 1 набор, состоящий из 6 прямоугольников $a \times \theta$ и одного прямоугольника $l_1 \times \pi$ $\square$-равносоставлен набору из 8 прямоугольников $b \times \dfrac{\pi}{2}$ и одного прямоугольника $l_2 \times \pi$. Однако первый набор $\square$-равносоставлен набору $6a \times \theta, l_1 \times \pi$, а второй — набору $\left(\dfrac{b}{2} + l_2\right) \times \pi$. Значит, последние 2 набора $\square$-равносоставленны. Но по лемме 2 и утверждению 3 г) они не $\square$-равносоставленны. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи А.

5. а) *Лобовое решение.* Покажем, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника рационально. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — длины вертикальных сторон квадратов. Стороны квадратов могут объединяться в отрезки. Либо такой отрезок — это сторона большого прямоугольника, и отсюда $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = a$ или $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = b$, либо к этому отрезку с двух сторон прилегают квадраты разрезания, для сторон которых мы можем записать

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_t}$$

или

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s} = x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_s},$$

здесь $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ — стороны квадратов с одной стороны и $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$ $\ldots, x_{j_t}$ — с другой.

Запишем все такие уравнения (переменными будут иксы, a и b). Будем выражать по очереди переменные, кроме b, и подставлять их в остальные уравнения. Начнем с a. После всех использованных возможностей получим, что каждая переменная первой группы (в ней a) выражается через переменные другой группы (в ней b) линейной комбинацией с рациональными коэффициентами:

$$a = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n + \xi b,$$
$$x_i = \mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \ldots + \mu_{in} x_n + \mu_i b \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Переменные в левой части задаются выражениями, в которых коэффициенты ненулевые только при переменных второй группы (для переменных второй группы добавлены уравнения $x_i = x_i$).

Докажем, что во второй группе только b. Пусть это не так. Пусть x_n во второй группе. Заметим, что если мы придадим значения переменным второй группы так, чтобы все равенства выполнялись и все переменные были положительные, то получим соответствующее разрезание прямоугольника (докажите). Возьмем первоначальное разрезание, увеличим x_n на ε так, чтобы все иксы и a остались положительными.

Получим большой прямоугольник со сторонами $a+\xi_n\varepsilon$ и b, разрезанный на квадраты со сторонами $x_1+\mu_{1n}\varepsilon$, $x_2+\mu_{2n}\varepsilon$, ..., $x_{n-1}+\mu_{n-1\,n}\varepsilon$, $x_n+\varepsilon$.

Запишем равенство площадей:

$$(a+\xi_n\varepsilon)b=(x_1+\mu_{1n}\varepsilon)^2+(x_2+\mu_{2n}\varepsilon)^2+\ldots+(x_{n-1}+\mu_{n-1\,n}\varepsilon)^2+ \\ +(x_n+\varepsilon)^2 \Rightarrow (\mu_{1n}^2+\mu_{2n}^2+\ldots+\mu_{n-1\,n}^2+1)\varepsilon^2+ \\ +(2x_1\mu_{1n}+2x_2\mu_{2n}+\ldots+2x_{n-1}\mu_{n-1n}+2x_n-\xi_n b)\varepsilon=0.$$

Мы видим, что не больше двух ε удовлетворяют этому равенству, однако первоначально мы могли взять любое ε из некоторой малой окрестности нуля. Значит, все-таки во второй группе нет иксов, только b. Ну а как уже было отмечено, все переменные первой группы выражаются линейно через переменные второй группы, т. е. $a=pb$, где p рационально.

Решение, основанное на сведении к лемме 2. Если прямоугольник $a\times b$ можно разрезать на квадраты, то он $\square$-равносоставлен прямоугольнику $b\times a$ (поскольку квадрат переходит в себя при повороте на $90°$). Тогда по лемме 2 отношение $\frac{a}{b}$ рационально.

«Физическое» решение. Данное утверждение следует также из задачи 7 б) для $R=1$.

б) Предположим противное. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — ребра тетраэдров, на которые разрезан тетраэдр с ребром a. Тогда по лемме 1 и задаче 3 а), б) набор $6a_1\times\theta$, $6a_2\times\theta$, ..., $6a_n\times\theta$ $\square$-равносоставлен набору $6a\times\theta$, $l\times\pi$. Следовательно, согласно задачам 4 а) и 4 в) имеем $a_1+a_2+\ldots+a_n=a$. Равенство объемов дает нам условие

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=a^3.$$

Возводим первое равенство в куб:

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3+A=a^3,$$

где $A>0$, и приходим к противоречию со вторым равенством.

Идея геометрического решения. Утверждение задачи можно доказать также, рассматривая ребро одного из меньших тетраэдров, целиком лежащее на грани большего тетраэдра. В этом ребре должно сходиться несколько двугранных углов, равных θ, а их сумма должна быть равна π. Это противоречит задаче 3 г).

6. а) Пусть U_1 и U_2 — напряжения в верхнем и нижнем неконцевых узлах. Если выделение тепла на 2-м и 3-м резисторе больше выделения тепла на 4-м и 5-м, заменим U_1 на U_2. Получим уменьшение общего выделения тепла. Если теплоты равны, то сделав то же самое, получим уменьшение общего выделения тепла. Значит, минимум выделения тепла достигается при $U_1 = U_2$. Далее схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.

б) Схема очевидно сводится элементарными преобразованиями к схеме из одного резистора.

7. а) *Геометрическое решение.* По задаче 4 а) данное разрезание прямоугольника можно получить последовательностью элементарных преобразований (и обратных к ним). Заметим, что общее сопротивление схемы при элементарном преобразовании не меняется.

«*Физическое решение*». Предположим, что прямоугольная пластинка сделана из однородного проводящего материала. Будем считать его удельное сопротивление равным 1. Соединим противоположные вертикальные стороны пластинки с полюсами источника постоянного тока. Сопротивление пластинки будет равно отношению горизонтальной стороны к вертикальной.

Пусть теперь прямоугольник разрезан на меньшие прямоугольники. Нанесем на пластинку все линии разреза. Заметим, что ток по пластинке идет в горизонтальном направлении. Поэтому если мы разрежем пластинку по всем горизонтальным линиям, то ее сопротивление не изменится.

Теперь можно разрезать пластинку по всем вертикальным линиям, соединив при этом проводами пары вертикальных сторон меньших прямоугольников, которые совмещались в исходном прямоугольнике. Ясно, что сопротивление всей цепи при этом не изменится.

Каждая из меньших прямоугольных пластинок в полученной цепи представляет собой резистор, сопротивление которого равно отношению горизонтальной стороны соответствующей пластинки к вертикальной.

Тем самым мы показали, что общее сопротивление цепи, построенной по разрезанию прямоугольника, равно отношению его сторон. Из этого следует утверждение задачи 7 а).

б) *Аналитическое решение.* Пусть $U = 1$. Пусть минимум выделения тепла достигается при $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Зафиксируем $U_2, U_3, \ldots, U_n$ и будем рассматривать выделение тепла как функцию от U_1. Поскольку эта функция является суммой квадратов линейных функций и не постоянна, после раскрытия скобок коэффициент при U_1^2 положителен. Минимум квадратичной функции достигается в вершине параболы, поэтому

$$U_1 = a_2(R)U_2 + a_3(R)U_3 + \ldots + a_n(R)U_n + a_1(R),$$

где $a_i(R)$ — отношение многочленов от R с целыми коэффициентами. Подставим выражение для U_1 в нашу квадратичную функцию. Получим функцию от $n-1$ переменной. Эта функция как функция от U_2 не может быть постоянной (рассмотрите, как ведет себя теплота при больших U_2). Рассуждая аналогично предыдущему, получим $U_n = \dfrac{P_n(R)}{Q_n(R)}$. Переходя обратно, находим $U_i = \dfrac{P_i(R)}{Q_i(R)}$. Отсюда общее сопротивление равно $\dfrac{U^2}{P} = \dfrac{P(R)}{Q(R)}$.

Более подробно данное решение изложено в статье [3].

Геометрическое решение. Аналогично решению задачи 5 а) можно показать, что отношение сторон разрезаемого прямоугольника есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от отношений сторон прямоугольников.

в) *Ответ*: нет, не может. Увеличим сопротивление этого резистора, оставив напряжение неизменным на всех узлах. Тогда выделение тепла уменьшится, а после перераспределения станет еще меньше, значит общее сопротивление увеличится.

г) Пусть прямоугольник с отношением сторон R разрезан на прямоугольники с отношением сторон R и $\dfrac{1}{R}$, причем есть хотя бы один прямоугольник второго вида. Сделав растяжение с коэффициентом R, получим квадрат, разрезанный на квадраты и прямоугольники с отношением сторон $\dfrac{1}{R^2}$. По задаче 7 а) имеем электрическую цепь с сопротивлением 1 из резисторов сопротивления 1 и $\dfrac{1}{R^2}$. По задаче 7 б) общее сопротивление есть отношение многочленов с целыми коэффициентами от R. Приравниваем к единице.

1) Если отношение многочленов не тождественно 1, то R является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

2) Если многочлены равны, то если увеличить R, общее сопротивление останется единицей. Тогда сопротивление резисторов с сопротивлением $\dfrac{1}{R^2}$ уменьшится. Если уменьшать их по очереди, то по решению задачи 7 в) получим, что общее сопротивление уменьшилось — противоречие.

Заключение: полные инварианты

Набор прямоугольников, который сопоставляют многограннику, называется его *инвариантом Дена* (это определение эквивалентно общепринятому алгебраическому определению [4]). Удивительно, что утверждение, в некотором смысле обратное лемме 1, также справедливо.

Теорема Сидлера [1]. *Если два многогранника имеют равные объемы и соответствующие им наборы прямоугольников становятся $\square$-равносоставленными после добавления к ним подходящих прямоугольников вида $l \times \pi$, то два исходных многогранника равносоставленны.*

Построенный нами инвариант $\square$-равносоставленности наборов прямоугольников на плоскости не является полным, но аналогичным образом можно построить полный инвариант (*инвариант Кеньена* [7]).

В заключение обсудим достаточность полученных нами условий на число x в задаче В. Мы не знаем, может ли число x в задаче В быть корнем *произвольного* многочлена с целыми коэффициентами. Однако в близкой задаче о разрезании квадрата на подобные прямоугольники ответ отрицательный.

Теорема Ласковича—Секереша—Фрайлинга—Ринна [6], [8]. *Для каждого $x > 0$ эквивалентны условия:*

1) *квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон x*;

2) *число x — алгебраическое, и все комплексные числа, алгебраически ему сопряженные, имеют положительную действительную часть*;

3) *существуют положительные рациональные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что*

$$c_1x + \cfrac{1}{c_2x + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{c_nx}}} = 1.$$

Таким образом, квадрат можно разрезать на подобные прямоугольники с отношением сторон $2 + \sqrt{2}$, но нельзя разделить на прямоугольники с отношением сторон $1 + \sqrt{2}$.

Литература

[1] *Болтянский В. Г.* Равновеликие и равносоставленные фигуры // Популярные лекции по математике. Вып. 22. М.: Гостехиздат, 1956.

[2] *Варламов А.* Правила Кирхгофа // Квант. 1985. № 1. С. 26–27.

[3] *Ляшко О. В.* Почему не уменьшится сопротивление // Квант. 1985. № 1. С. 10–15.

[4] *Фукс Д.* Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. 1990. № 11. С. 2–11.

[5] *Яглом И. М.* Как разрезать квадрат. М.: Наука, 1968.

[6] *Freiling C.*, *Rinne D.*, Tiling a square with similar rectangles // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. P. 547–558.

[7] *Kenyon R.* Tilings and discrete Dirichlet problems // Israel Journal of Mathematics. 1998. V. 105. P. 61–84.

[8] *Laszkovich M.*, *Szekeres G.* Tiling of the square with similar rectangles // Discr. Comp. Geometry. 1995. V. 13. P. 569–572.

Теория Рамсея для зацеплений[3] (10–11)

М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов

Данный цикл задач условно разделен на 6 частей.

Первая часть посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1 (Конвей—Гордон—Закс, 1981). *Пусть в пространстве даны 6 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.*

Последующие части посвящены ее обобщению на произвольные узлы и зацепления.

Теорема 2 (Негами, 1991). *Для любого узла найдется такое число N, что для любых N точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, существует замкнутая ломаная с вершинами в данных точках, образующая данный узел.*

Определение и примеры узлов и зацеплений даны во втором пункте. Доказательство теоремы 2 намечено в задачах четвертого и пятого пунктов. Полностью доказательство этой теоремы приводится в статье В. В. Прасолова и М. Б. Скопенкова «Рамсеевская теория зацеплений», опубликованной в книге «Летние конференции Турнира городов: Избранные материалы» (Вып. 1. — М.: МЦНМО, 2009).

Применению рамсеевской теории зацеплений посвящен пункт 6.

Различные части статьи практически независимы, поэтому можно начинать как с задачи 1.1, так и с задач 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1.

1. Зацепленные треугольники

1.1. Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

1.2. На плоскости даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то два отрезка с концами в этих точках пересекаются во внутренней точке.

Определение общего положения. Будем говорить, что набор точек в пространстве находится *в общем положении*, если никакие 4 точки из этого набора не лежат в одной плоскости.

Пример 1. Рассмотрим в горизонтальной плоскости правильный шестиугольник. Набор точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, расположенных

[3] Авторы цикла задач благодарны И. Дынникову, А. Райгородскому, А. Скопенкову и О. Скрябину за полезные обсуждения.

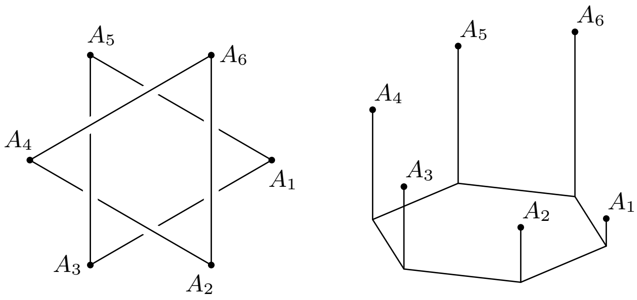


Рис. 1

в точности над его вершинами на высотах 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно, находится в общем положении (рис. 1).

Пример 2. Точки $(t; t^2; t^3)$ в декартовой системе координат, где $t \in$ $\in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, находятся в общем положении (предлагаем проверить это самостоятельно).

Определение зацепленных треугольников. Пусть Δ, Δ' — два треугольника в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении. Будем говорить, что эти треугольники *зацеплены*, если контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке.

Пример 3. Треугольники $A_1A_3A_5$, $A_2A_4A_6$ из примера 1 зацеплены.

1.3. Докажите, что если контур одного из треугольников Δ и Δ' не пересекается с плоскостью, в которой лежит другой треугольник, то Δ и Δ' не зацеплены.

1.4. Докажите, что если Δ зацеплен с Δ', то Δ' зацеплен с Δ.

1.5. Треугольники Δ и Δ' остаются зацепленными, если их вершины при движении в пространстве остаются в общем положении.

1.6. Пусть даны два треугольника в пространстве. Предположим, что проекции никаких 3 из их 6 вершин на некоторую плоскость не лежат на одной прямой. Будем считать рассматриваемую плоскость расположенной горизонтально. Изобразим на рисунке проекции треугольников и в каждой точке пересечения проекций (*перекрестке*) укажем, сторона какого треугольника проходит выше (рис. 1).

Докажите, что данные треугольники зацеплены, если и только если число перекрестков, в которых сторона первого треугольника проходит выше стороны второго, нечетно.

1.7. Пусть точка A_1 из примера 1 движется вверх с единичной скоростью. Найдите все интервалы времени, в течение которых треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ зацеплены.

Определение (зацепленности шестерки точек) Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разделенной парой* два треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин. *Зацепленностью* данной шестерки точек назовем количество зацепленных разделенных пар.

Контрольные вопросы I. Рассмотрим правильный треугольник ABC, лежащий на горизонтальной плоскости. Повернем его на угол φ вокруг центра и поднимем над плоскостью. Обозначим полученный треугольник $A'B'C'$ (плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны). При каких значениях φ шесть точек A, B, C, A', B' и C' находятся в общем положении?

а) При любых φ.
б) При любых φ, кроме $\varphi = 2\pi k/3$, где k — целое.
в) При любых φ, кроме $\varphi = \pi k/3$, где k — целое.
г) Ни при каких φ.

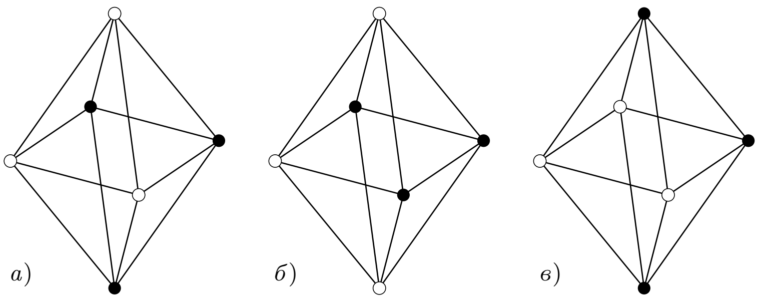


Рис. 2

II. Требуется так покрасить три вершины октаэдра в белый цвет, а три другие — в черный, чтобы после небольшого «шевеления» этих вершин треугольник с вершинами в белых точках был бы зацеплен с треугольником с вершинами в черных точках. Выберите все способы раскраски вершин на рис. 2 *а*, *б*, *в*, которые удовлетворяют данному условию.

III. Сколько существует зацепленных разделенных пар для шестерки точек из примера 1?

а) 0; б) 1; в) 2.

1.8. Докажите, что четность зацепленности не зависит от выбора шестерки точек.

1.9. Приведите пример шестерки точек, зацепленность которой равна 1.

1.10. Докажите теорему 1.

2. Вписанные узлы и зацепления

Основные понятия. *Узел* можно представлять себе как веревку, концы которой соединены. Веревку будем считать эластичной, и узлы, получающиеся друг из друга деформацией [4] веревки, различать не будем.

Примеры *различных* узлов: тривиальный K, правый и левый трилистники T, восьмерка E (рис. 3).

Если взять не одну веревку, а несколько, и у каждой из них соединить концы, то получим *зацепление.*

Примеры *различных* зацеплений: зацепление Хопфа H, двойное зацепление D, зацепление Уайтхеда W, кольца Борромео B (рис. 4).

2.1. В какие из узлов и зацеплений, изображенных на рис. 3 и 4, можно продеформировать узлы и зацепления на рис. 5?

Определение (вписанного узла и зацепления). Пусть в пространстве дано некоторое множество точек и узел. Если веревку продеформировать в ломаную, все вершины которой принадлежат данному множеству, то получится узел, *вписанный* в данное множество точек. (При этом часть точек множества может остаться незадействованной.) Будем говорить также, что полученная ломаная *образует* данный узел. Аналогично определяется *вписанное зацепление.*

Зацепление. Если каждую точку множества соединить прямолинейным отрезком с каждой из остальных точек, то вписанный узел является подмножеством полученной фигуры.

Сформулируйте теорему Негами (см. начало статьи) с помощью введенных понятий. Попробуйте доказать эту теорему для трилистника. Указания, а также связанные с этой теоремой открытые вопросы будут даны в последующих частях этой статьи.

Контрольный вопрос

I. Какой узел представляет ломаная, вписанная в множество из 5 точек, проекция которой изображена на рис. 6?

а) K; б) Тп; в) Тл ; г) E; д) такой ломаной не существует.

---

[4] В процессе деформации запрещается разрывать веревку (концы веревки также должны оставаться соединенными); веревка, разумеется, не может самопересекаться.

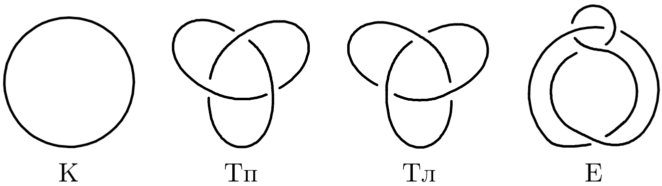


Рис. 3

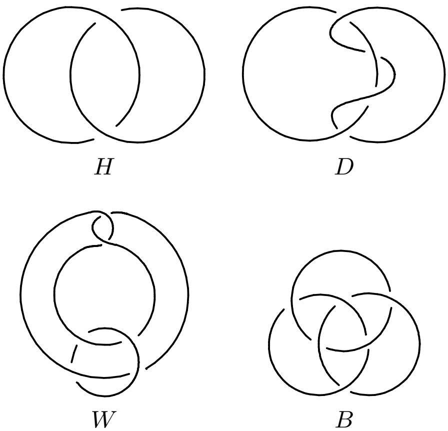


Рис. 4

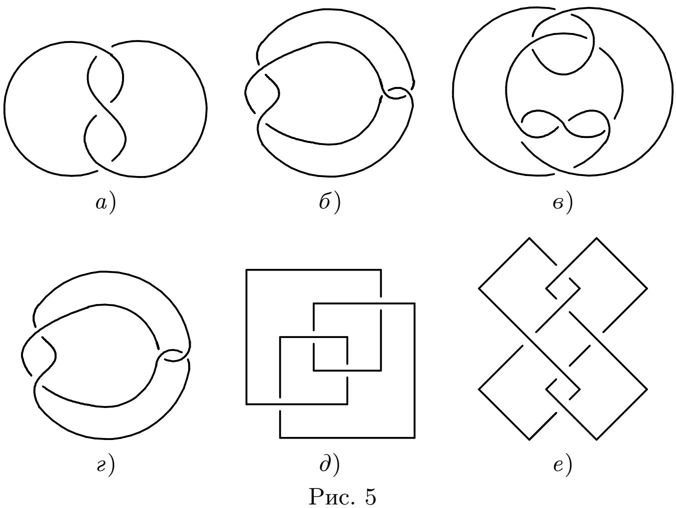


Рис. 5

2.2. Докажите, что всякий узел, вписанный в набор из $\leqslant 5$ точек, тривиален.

2.3. Приведите наборы с минимальным числом точек, в которые можно вписать:

а) зацепление Хопфа;

б) кольца Борромео;

в) трилистник;

г) двойное зацепление;

д) восьмерку;

е) зацепление Уайтхеда.

(Доказывать минимальность необязательно.)

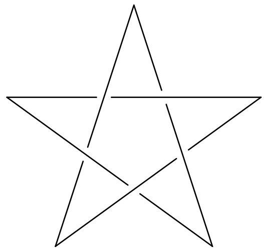


Рис. 6

2.4. Зацеплены ли

а) два треугольника, образующих зацепление Хопфа;

б) два из трех треугольников, образующих кольца Борромео?

3* Зацепленные четырехзвенные ломаные

Теорема 1′ (Закс, 1981). *Пусть в пространстве даны 4 красные и 4 синие точки, причем никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек. Тогда найдутся две зацепленные замкнутые четырехзвенные ломаные с вершинами в этих точках, звенья которых соединяют точки разных цветов.*

3.1. На плоскости даны три синие и три красные точки, причем никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два отрезка с разноцветными концами, пересекающиеся во внутренней точке.

Определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных. Пусть $\square$ и $\square'$ — две замкнутые четырехзвенные ломаные в пространстве, с вершинами A, B, C, D и A', B', C', D' соответственно, находящимися в общем положении. Их *коэффициентом зацепления* $\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D')$ назовем остаток при делении на 2 количества точек пересечения контура $ABCD$ с объединением треугольников $A'B'C'$ и $A'D'C'$.

3.2. Докажите, что

$$\mathrm{lk}(ABCD, A'B'C'D') = \mathrm{lk}(ABCD, B'C'D'A').$$

3.3. Решите аналоги задач 1.4–1.6 для четырехзвенных ломаных.

3.4. Заменим требование общего положения более слабым требованием $\square \cap \square' = \varnothing$. Дайте для этого случая определение коэффициента зацепления четырехзвенных ломаных так, чтобы сохранились предыдущие свойства.

Определение (общего положения в случае двух цветов). Набор точек в пространстве, окрашенных в два цвета, называется набором *общего положения*, если никакие два отрезка с разноцветными концами не имеют общих внутренних точек.

Определение (разделенной пары четырехзвенных ломаных).

Пусть в пространстве дан набор 4 красных и 4 синих точек общего положения. Назовем *разделенной парой* две замкнутые четырехзвенные ломаные со следующими свойствами: (1) их вершины расположены в данных точках; (2) они не имеют общих вершин; (3) их звенья соединяют точки разных цветов.

Контрольные вопросы I. Имеется набор точек, в котором есть хотя бы 3 синие и хотя бы 3 красные точки. Пусть все синие точки лежат на прямой a, а все красные — на прямой b. В каких случаях данный набор будет набором общего положения?

а) Никогда.

б) Если прямые a и b скрещиваются.

в) Если прямые a и b не параллельны.

г) Всегда.

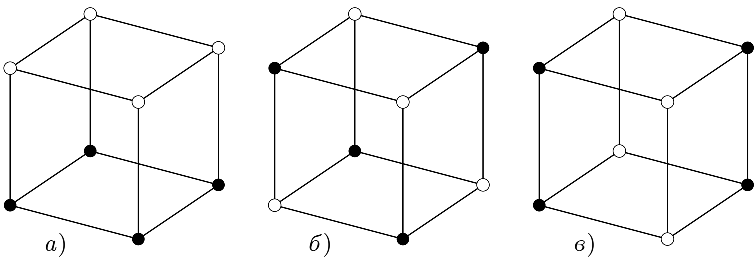


Рис. 7

II. Требуется так покрасить четыре вершины куба в белый цвет, а четыре другие — в черный, чтобы после небольшого «шевеления» этих вершин можно было выбрать замкнутую четырехзвенную ломаную с вершинами в белых точках и замкнутую четырехзвенную ломаную с вершинами в черных точках, зацепленную с ней. Выберите все способы раскраски вершин на рис. 7, *а*, *б*, *в*, которые удовлетворяют данному условию.

III. Найдите коэффициент зацепления двух четырехзвенных ломаных, образующих двойное зацепление (рис. 8):

а) 0; б) 1; в) 2; г) зависит от способа, каким двойное зацепление вписано в набор из 8 точек.

3.5. Пусть 4 красные точки лежат на одной прямой, а 4 синие — на другой прямой, скрещивающейся с ней. Найдите в этом случае все разделенные пары $(\square, \square')$, для которых $\mathrm{lk}(\square, \square') = 1$.

3.6. Дайте определение зацепленности для четверки синих и четверки красных точек и докажите, что она четна.

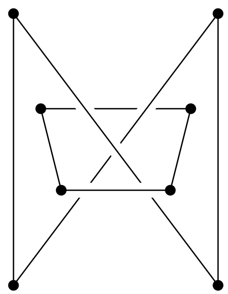


Рис. 8

3.7. Докажите теорему $1'$.

3.8. Докажите, что в предположениях теоремы $1'$ найдутся хотя бы две пары зацепленных замкнутых четырехзвенных ломаных.

4. Доказательство теоремы Негами для трилистника

Определение (узла (зацепления), вписанного в раскрашенное множество). Пусть в пространстве дано множество точек, окрашенных в два цвета. Тогда под *вписанным узлом* будем понимать ломаную, образующую данный узел, звенья которой соединяют точки разных цветов. *Вписанное зацепление* определяется аналогично (ср., например, с теоремой $1'$).

Теорема 2′ (Миёчи, 1994). *Для любого узла (зацепления) найдется такое число N, что в любое множество N синих и N красных точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, можно вписать данный узел (зацепление).*

Очевидно, теорема Негами следует из теоремы Миёчи.

Определение (положительного набора). Пусть в пространстве дан набор N синих и N красных точек, находящийся в общем положении (смотри определение выше). Проведем все отрезки, соединяющие точки разного цвета. Зафиксируем некоторую плоскость, которую будем считать расположенной горизонтально. Нарисуем на ней проекцию полученной фигуры. В дальнейшем нас будет интересовать только эта плоская картинка и мы будем говорить «точка набора» и «отрезок», подразумевая соответственно «проекция точки набора» и «проекция проведенного нами отрезка».

Пусть точки набора не попадают внутрь отрезков. В каждой точке пересечения отрезков (*перекрестке*) укажем, какой из отрезков проходит выше (как в задаче 1.6). Назовем перекресток *положительным* (рис. 9 слева), если при движении по отрезку, который проходит выше, от синего конца к красному синий конец другого отрезка остается слева. Иначе перекресток назовем *отрицательным* (рис. 9 справа).

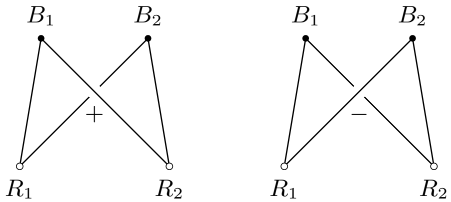


Рис. 9

Исходный набор точек назовем *положительным*, если для любых двух синих точек B_1, B_2 и любых двух красных точек R_1, R_2 одна из пар отрезков B_1R_1, B_2R_2 и B_1R_2, B_2R_1 пересекается во внутренней точке, причем полученный перекресток положителен. Аналогично определяется *отрицательный* набор.

Пример 4. Пример положительного набора изображен на рис. 10 (сравните с задачей 3.5).

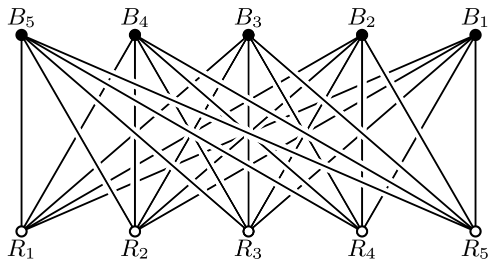


Рис. 10

4.1. Раскрасьте точки из примера 1 в два цвета так, чтобы получился отрицательный набор.

В задачах 4.2–4.5 предполагается, что дан некоторый положительный набор, причем $N \geqslant 2$.

4.2. Докажите, что все синие точки лежат по одну сторону от любой прямой, соединяющей две красные точки.

Определение порядка «>». Пусть дан положительный набор. Пусть R_1 и R_2 — две красные точки. Скажем, что $R_1 > R_2$, если при движении по прямой R_1R_2 от R_1 к R_2 все синие точки остаются справа.

4.3. Докажите, что если $R_1 > R_2$ и $R_2 > R_3$, то $R_1 > R_3$.

4.4. Докажите, что если отрезок R_1B_1 проходит выше R_2B_2, то $R_1 > R_2$.

4.5. Докажите, что красные и синие точки можно занумеровать так, что при любых $i < j$ и $k \neq l$ отрезок R_iB_k проходит выше R_jB_l.

Контрольные вопросы

I. Каково минимальное число точек в раскрашенном в 2 цвета множестве, в которое можно вписать зацепление Хопфа?

а) 6; б) 8; в) 9; г) 10; д) 12; е) бесконечно много.

II. Если в положительном наборе изменить цвет каждой точки на противоположный, то набор станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

III. Положительный набор при отражении относительно любой вертикальной плоскости станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

IV. Положительный набор при отражении относительно любой горизонтальной плоскости станет:

а) положительным; б) отрицательным; в) ни положительным, ни отрицательным.

V. При неограниченном движении вертикально вверх наибольшей красной точки (относительно введенного порядка «$>$») положительного набора

а) он все время остается положительным;

б) он через некоторое время становится отрицательным;

в) он через некоторое время становится ни положительным, ни отрицательным.

4.6. Впишите трилистник в набор точек из примера 4.

4.7. В любой положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно вписать трилистник.

4.8 (Теоремы Рамсея). а) Докажите, что для любых m и n найдется такое $R(m, n)$, что при любой раскраске ребер полного графа с $R(m, n)$ вершинами в два цвета найдется либо полный подграф первого цвета с m вершинами, либо полный подграф второго цвета с n вершинами.

б) Сформулируйте и докажите обобщение пункта а) на случай трех цветов.

в) Сформулируйте и докажите обобщение пунктов а) и б) на полные двудольные графы.

г) Назовем набор точек общего положения в пространстве, окрашенных в два цвета, *нейтральным*, если проекции на плоскость любых двух отрезков с разноцветными концами не пересекаются (во внутренних точках). Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный, либо нейтральный набор n синих и n красных точек.

д) Докажите, что для любого n найдется такое $R(n)$, что любой набор $R(n)$ синих и $R(n)$ красных точек общего положения в пространстве содержит либо положительный, либо отрицательный набор n синих и n красных точек.

4.9. Докажите теоремы Миёчи и Негами для трилистника.

4.10. Впишите узлы и зацепления, изображенные на рис. 3 и 4, в какие-нибудь положительные наборы точек и докажите для них теоремы Миёчи и Негами.

5.* Доказательство теоремы Негами для произвольного зацепления

Лемма (о двух спицах). *Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые. Для любого узла найдется такое N, что данный узел можно вписать в множество, состоящее из N красных точек на первой прямой и N синих точек на второй прямой.*

(*Иными словами, любой узел можно натянуть на две спицы.*)

Определение (прямоугольного представления узла, рис. 11, слева). Будем говорить, что задано *прямоугольное представление* узла, если проекция веревки на плоскость обладает следующими свойствами:

$\sqsubset$) проекция состоит из некоторого числа вертикальных и горизонтальных отрезков;

$-$) никакие два вертикальных отрезка не лежат на одной вертикальной прямой и никакие два горизонтальных отрезка не лежат на одной горизонтальной прямой;

$\div$) если вертикальный и горизонтальный отрезок пересекаются, то горизонтальная часть веревки проходит выше вертикальной.

Определение *прямоугольного представления* зацепления аналогично.

Определение (двойственного узла, рис. 11). Пусть дано прямоугольное представление некоторого узла. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты вертикальных, а $y_1, y_2, \ldots, y_M$ — координаты горизонтальных отрезков его проекции (рис. 11). Рассмотрим две прямые, параллельные плоскости рисунка, одна из которых расположена под этой плоскостью и проходит горизонтально, а вторая расположена над этой плоскостью и проходит вертикально. Отметим на горизонтальной прямой точки с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а на вертикальной — точки с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_M$. Обозначим через R_i точку на первой прямой с координатой x_i, а через B_j — точку на второй прямой с координатой y_j. Соединим отрезками все пары отмеченных точек R_i, B_j, для которых точка (x_i, y_j) на плоскости рисунка является концом некоторого отрезка проекции узла. В результате получим некоторую замкнутую ломаную. Узел, который представляется этой ломаной, назовем узлом, *двойственным* к исходному. Определение *двойственного зацепления* аналогично.

Пример 5. На рис. 11 изображены трилистник и двойственный к нему узел (трилистник).

Контрольные вопросы I. Можно ли назвать картинки *д*), *е*) на рис. 5 прямоугольным представлением узла?

а) Да; б) нет.

II. Каково минимальное число отрезков в прямоугольном представлении простого зацепления?

а) 6; б) 8; в) 9; г) 10; д) 12.

III. Набор N красных точек $R_1, R_2, \ldots, R_N$ и M синих точек $B_1, B_2, \ldots, B_M$ из определения двойственного узла является положительным, если и только если:

а) все числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $y_1, y_2, \ldots, y_M$ положительны;

б) все числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $y_1, y_2, \ldots, y_M$ отрицательны;

в) все числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $y_1, y_2, \ldots, y_M$ одного знака;

г) числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$ имеют один и тот же знак, а числа $y_1, y_2, \ldots, y_M$ имеют противоположный знак.

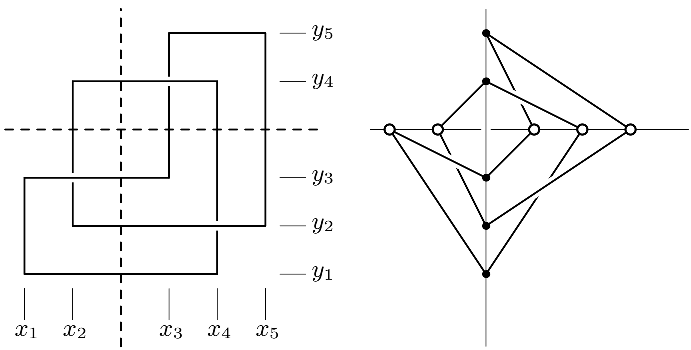


Рис. 11

5.1. Постройте прямоугольные представления узлов и зацеплений с рис. 3 и 4.

5.2. Нарисуйте двойственные узлы и зацепления для построенных вами в задаче 5.1 прямоугольных узлов и зацеплений. Что это за узлы?

5.3. а) Докажите, что для любого узла существует прямоугольное представление.

б) Докажите, что любой узел можно продеформировать в двойственный к нему.

5.4. Докажите лемму о двух спицах.

5.5. Выведите из леммы о двух спицах теоремы Миёчи и Негами.

Дополнительные задачи

5.6 (очень трудная). Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве найдется пара зацепленных циклов.

5.7 (известная открытая проблема). Опишите все графы, при любом расположении которых в пространстве некоторый цикл оказывается заузленным.

6*. Доказательство гипотезы Менгера

Этот раздел посвящен одному применению рамсеевской теории зацеплений, а именно доказательству следующего утверждения:

Теорема Уммеля (гипотеза Менгера). Двумерную фигуру, являющуюся произведением двух полных графов на 5 вершинах, нельзя расположить [5] без самопересечений в 4-мерном евклидовом пространстве.

Это утверждение было сформулировано Менгером в 1929 г. в качестве гипотезы, а доказано Уммелем в 1978 г. Мы приведем простое доказательство гипотезы Менгера, полученное одним из авторов статьи. Для его понимания и для решения некоторых задач данного раздела требуется знакомство с понятием 4-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. Однако для того, чтобы увидеть основную идею доказательства, это совсем не обязательно. Большинство последующих задач будет относится к случаю плоскости или трехмерного пространства.

Определение (произведения графов). *Графом* мы называем фигуру, состоящую из точек (*вершин*), причем некоторые из них соединены отрезками (*ребрами*), пересекающимися между собой только в вершинах. Соответственно, *точка* графа — это либо одна из его вершин, либо точка на одном из его ребер.

[5] Мы рассматриваем только достаточно «хорошие», то есть *кусочно линейные* расположения. Мы не приводим их формального определения.

Произведением двух множеств A, B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(a; b)$, где a — точка множества A, а b — точка множества B.

Таким образом, произведение двух графов — это двумерная фигура, склеенная из квадратиков, отрезков и точек (вершин).

Квадратики соответствуют всевозможным парам (α, β), где α — ребро первого графа, β — ребро второго. Аналогично отрезки соответствуют всевозможным парам (ребро 1-го графа, вершина 2-го графа) и (вершина 1-го графа, ребро 2-го графа), а вершины — всевозможным парам (вершина 1-го графа, вершина 2-го графа).

Примеры. Произведение двух отрезков — квадрат. Произведение отрезка и окружности — боковая поверхность цилиндра. Произведение двух окружностей — тор. Произведение отрезка на букву Y — «книжка с тремя страницами».

6.1. Из скольких квадратиков, отрезков и вершин склеено произведение $Y \times Y$?

Обозначим через K_n полный граф на n вершинах, а через $K_{n,m}$ полный двудольный граф с n синими и m красными вершинами (т. е. граф, образованный всеми ребрами, соединяющими вершины разных цветов).

6.2. а) Произведение отрезка на окружность можно расположить на плоскости без самопересечений.

б) Произведение графа K_5 на отрезок можно расположить в (трехмерном) пространстве без самопересечений.

в) Произведение графа K_4 на окружность можно расположить в (трехмерном) пространстве без самопересечений.

г) Граф K_5 можно расположить без самопересечений на двумерном торе.

Проиллюстрируем основную идею раздела на следующем примере.

Пример. Докажем от противного, что полный граф на 5 вершинах (граф K_5) нельзя расположить на плоскости без самопересечений. Предположим, что нам удалось это сделать. Пусть O — некоторая вершина этого графа. Рассмотрим на плоскости маленькую окружность с центром O. Она пересекает наш граф в 4 точках. Обозначим данные точки через A, B, C, D в том порядке, в котором они расположены на окружности. Выбросим из нашего графа K_5 отрезки OA, OB, OC, OD — то есть ту его часть, которая попала внутрь рассматриваемой окружности.

В оставшейся части графа пары точек A, C и B, D можно соединить непересекающимися путями. Действительно, пусть A — точка пересечения окружности и ребра OA' графа K_5. Аналогично определим точки B', C', D'. Тогда пути $AA'C'C$ и $BB'D'D$ идут по различным ребрам графа, стало быть, не пересекаются.

Добавим к построенным путям хорды AC и BD нашей окружности. В результате мы получим два замкнутых пути, пересекающихся в единственной точке — точке пересечения хорд AC и BD.

Теперь нетрудно прийти к противоречию. Действительно, точки A и C находятся по разные стороны от отрезка BD, а следовательно, и по разные стороны от замкнутого пути $BDD'B'B$. С другой стороны, эти две точки можно соединить путем $AA'C'C$, следовательно, они лежат по одну сторону от замкнутого пути $BDD'B'B$.

Полученное противоречие показывает, что граф K_5 нельзя расположить на плоскости без самопересечений.

6.3. Полный двудольный граф $K_{3,3}$ нельзя расположить на плоскости без самопересечений.

Следующая задача посвящена доказательству того, что произведение $Y \times Y$, где Y — буква 'Y', нельзя расположить в трехмерном пространстве без самопересечений.

6.4. Предположим, что произведение $Y \times Y$ расположено без самопересечений в пространстве. Рассмотрим маленькую сферу S^2 вокруг точки $O \times O \subset Y \times Y$, где O — вершина степени 3 графа Y.

а) Сколько ребер произведения $Y \times Y$ выходят из вершин $O \times O$?

б) Сколько квадратиков произведения $Y \times Y$ содержат вершину $O \times \times O$?

в) Как выглядит пересечение данной сферы S^2 с произведением $Y \times \times Y$?

г) Произведение $Y \times Y$, где Y — буква 'Y', нельзя расположить в трехмерном пространстве без самопересечений.

Следующая задача посвящена доказательству того, что произведение графа K_5 на окружность нельзя реализовать в (трехмерном) пространстве без самопересечений.

6.5. Предположим, что произведение $K_5 \times K_3$ расположено без самопересечений в пространстве. Рассмотрим маленькую сферу S^2 вокруг точки $O_1 \times O_2 \subset K_5 \times K_3$, где O_1, O_2 — вершины графов K_5 и K_3 соответственно.

а) Как выглядит пересечение K данной сферы S^2 и произведения $K_5 \times K_3$?

б) При любом расположении графа K (из пункта а)) на сфере в нем найдется цикл и пара вершин, расположенных по разные стороны от данного цикла.

в) Выведите невозможность расположения $K_5 \times K_3$ без самопересечений в пространстве из следующего утверждения (доказательства которого мы не требуем): *число точек пересечения замкнутой двумерной поверхности и замкнутого пути в пространстве, пересекающихся трансверсально, всегда четно.*

6.6. Предположим, что произведение $K_5 \times K_5$ расположено без самопересечений в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим маленькую сферу S^3 вокруг точки $O \times O \subset K_5 \times K_5$, где O — вершина графа K_5.

а) Докажите, что пересечение сферы S^3 и произведения $K_5 \times K_5$ — полный двудольный граф $K_{4,4}$.

б) (*Теорема Закса.*) При любом расположении графа $K_{4,4}$ в сфере S^3 в нем найдется пара циклов с нечетным коэффициентом зацепления.

в) Любую пару циклов в $S^3 \cap K_5 \times K_5$ можно заклеить парой непересекающихся двумерных поверхностей, лежащих в произведении $K_5 \times$ $\times K_5$, но вне шара, ограниченного сферой S^3.

г) Выведите теоремуУммеля из следующего утверждения (доказательства которого мы не требуем): *число точек пересечения двух замкнутых двумерных поверхностей в* $\mathbb{R}^4$*, пересекающихся трансверсально, всегда четно.*

6.7. Как по данному набору графов определить такую минимальную размерность n, что их произведение можно реализовать без самопересечений в $\mathbb{R}^n$?

Ответы на контрольные вопросы

К разделу «Зацепленные треугольники»: I в, II бв, III б.

К разделу «Вписанные узлы и зацепления»: I д.

К разделу «Зацепленные четырехзвенные ломаные»: I б, II бв, III а.

К разделу «Доказательство теоремы Негами для трилистника»: I б, II а, III б, IV б, V а.

К разделу «Доказательство теоремы Негами для произвольного зацепления»: I а, II б, III в.

Решения задач

1.1. Рассмотрим граф, состоящий из шести вершин и всех ребер, соединяющих их. Каждому человеку сопоставим вершину этого графа. Если двое людей знакомы, то ребро, соединяющее соответствующие им вершины, покрасим в красный цвет, иначе — в синий цвет. Рассмотрим некоторую вершину A. По принципу Дирихле найдутся такие три вершины X_1, X_2 и X_3, что ребра AX_1, AX_2, AX_3 одного цвета. Для определенности считаем, что это — красный цвет. Если какое-то из ребер X_iX_j $(i,\ j \in \{1; 2; 3\})$ красного цвета, то все стороны треугольника AX_iX_j имеют красный цвет, и, тем самым, задача решена. В противном случае все стороны треугольника $X_1X_2X_3$ имеют синий цвет. И в этом случае задача тоже решена.

1.2. *Первое решение.* Если выпуклая оболочка рассматриваемых точек — это четырех- или пятиугольник, то утверждение задачи очевидно: пересекутся две диагонали. Рассмотрим случай, когда выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Две оставшиеся точки D и E из данных пяти лежат внутри треугольника ABC. Точка E лежит внутри одного из треугольников DAB, DAC или DBC; допустим, в DAC. Тогда BE пересекается с одним из отрезков DA или DC.

Второе решение. Утверждение этой задачи является двумерным аналогом теоремы 1 и может быть доказано аналогичным образом. Набор точек на плоскости назовем набором *общего положения*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Назовем *зацепленностью* пятерки точек общего положения число пар отрезков с концами в этих точках, пересекающихся во внутренней точке. Легко привести пример пятерки, зацепленность которой равна 1. После этого для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что четность зацепленности не зависит от выбора 5 точек. Пусть даны две пятерки. Одну из них можно перевести в другую, по очереди двигая точки (причем движение можно считать равномерным). Пока точки движутся так, что пятерка остается в общем положении, зацепленность, очевидно, не меняется. Как только одна из точек (скажем, A) попадает на отрезок с концами в двух других точках (скажем, B и C), зацепленность либо не меняется, либо меняется на ± 2. Действительно, в такой момент меняется «состояние» (т. е. пересекающиеся отрезки становятся непересекающимися, и наоборот) ровно двух пар отрезков: AD, BC и AE, BC (где D и E — две оставшиеся точки пятерки).

1.3. Достаточно доказать, что если Δ зацеплен с Δ' или Δ' зацеплен с Δ, то контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Первый случай очевиден. Во втором случае контур треугольника Δ' пересекает внутренность треугольника Δ. Поэтому внутренность треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'. Однако в таком случае и контур треугольника Δ пересекает плоскость треугольника Δ'.

1.4. *Указание.* Утверждение задачи непосредственно следует из доказанного ниже. Дадим сначала следующее определение.

Определение (зацепленных пар точек). Пусть на горизонтальной прямой отмечено 2 красных и 2 синих точки (точки попарно различны). Будем говорить, что эти пары *зацеплены*, если они расположены на прямой в порядке (красная, синяя, красная, синяя) или (синяя, красная, синяя, красная), считая справа.

Утверждение. *Треугольники Δ и Δ' зацеплены $\Leftrightarrow$ выполнены следующие 3 условия*:

1) *плоскости треугольников* Δ *и* Δ' *пересекаются по некоторой прямой* l;

2) *каждое из множеств* $\Delta \cap l$ *и* $\Delta' \cap l$ *состоит из двух точек* (*здесь и далее* Δ *и* Δ' *обозначают контуры треугольников*);

3) *пары точек* $\Delta \cap l$ *и* $\Delta' \cap l$ *зацеплены на прямой* l.

Доказательство. (И, следовательно, решение задачи 1.4). Пусть треугольник Δ зацеплен с треугольником Δ'. Тогда выполнение условия 1) очевидно. Выполнение условия 2) следует из задачи 1.3. Действительно, так как треугольник Δ пересекает плоскость треугольника Δ', то множество $\Delta \cap l$ непусто. Из соображений общего положения следует, что оно не может состоять из одной точки. Докажем теперь выполнение условия 3). Пусть множество $\Delta \cap l$ состоит из двух точек A и B, а множество $\Delta' \cap l$ состоит из двух точек A' и B'. Все общие точки контура треугольника Δ и внутренности треугольника Δ' лежат на отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B принадлежит отрезку $A'B'$. А это означает, что пары A, B и A', B' зацеплены на l.

Обратно, пусть пары A, B и A', B' зацеплены на l. Тогда согласно сказанному выше контур треугольника Δ пересекает внутренность треугольника Δ' в единственной точке, то есть Δ зацеплен с Δ'. ☐

1.5. Из Утверждения, доказанного в решении задачи 1.4, следует, что треугольники Δ и Δ' зацеплены тогда и только тогда, когда выполняются условия 1)–3) (см. выше). Никакое из этих условий не может нарушиться при допустимом движении. В проверке нуждается лишь сохранение условия 1), которое может нарушиться, только когда плоскости треугольников Δ и Δ' становятся параллельны. Но из задачи 1.3 следует, что в этот момент, а также непосредственно до и после него треугольники Δ и Δ' не зацеплены.

1.6. *Решение Д. Коробицына.* Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат выше горизонтальной плоскости. Пусть $A'B'C'$ — проекция треугольника ABC на плоскость. Рассмотрим простой многогранник τ, ограниченный многоугольниками ABC, $A'B'C'$, $ABA'B'$, $BCB'C'$ и $CAC'A'$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ зацеплены, если и только если число L точек пересечения контура треугольника ABC с внутренностью треугольника $A_1B_1C_1$ нечетно. Пусть U — число точек пересечения контура треугольника ABC с боковыми гранями многогранника τ. Число точек пересечения контура с многогранником четно. Поэтому по модулю 2 имеем $L + U = 0 \Rightarrow L = U \Rightarrow L$ равно числу точек пересечения контуров проекций треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых сторона треугольника $A_1B_1C_1$ проходит ниже стороны треугольника ABC.

Утверждение задачи может оказаться полезным при решении других задач из первой части.

1.7. *Указание.* Для решения может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма. *Пусть вершина A треугольника Δ движется равномерно по отрезку в пространстве, а остальные две вершины и треугольник Δ' неподвижны. Обозначим через Δ_t положение треугольника в момент времени t, где $0 \leqslant t \leqslant 2$. Предположим, что набор 6 вершин треугольников Δ_t и Δ' находится в общем положении при всех t, кроме $t=1$. Тогда:*

а) *если $\Delta_1 \cap \Delta' = \varnothing$, то пары треугольников (Δ_0, Δ') и (Δ_2, Δ') зацеплены или не зацеплены одновременно*;

б) *если Δ_1 и Δ' пересекаются в единственной точке, не совпадающей ни с одной из их вершин, то ровно одна из пар треугольников (Δ_0, Δ') и (Δ_2, Δ') зацеплена.*

Все интервалы времени, в течение которых рассматриваемые треугольники зацеплены, это

$$(-\infty;\ 2), \quad (3,5;\ 4,5), \quad (6;\ +\infty).$$

Вид этих интервалов следует из примера 3 и леммы, сформулированной выше. Сама лемма легко следует, например, из утверждения, доказанного в решении задачи 1.4.

1.8. Пусть наборы точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5, а также N', X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 находятся в общем положении. Соединим точки N и N' ломаной, не проходящей через отрезки X_iX_j. Будем равномерно двигать точку N вдоль этой ломаной, через N_t обозначим ее положение в момент времени t. В соответствии с леммой из указания к задаче 1.7 зацепленность шестерки точек N, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 может измениться лишь в те моменты времени, когда $N_t \in X_iX_jX_k$ для некоторых $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$. Поэтому достаточно доказать, что при прохождении точки N через плоскость $X_iX_jX_k$ четность зацепленности нашей шестерки не меняется (считаем, что $i=1$, $j=2$, $k=3$). Среди всех возможных отрезков с концами в точках N, X_i, X_j, X_k или вообще нет двух пересекающихся отрезков, или имеется только одна пара пересекающихся отрезков. В первом случае контуры любых двух пар треугольников с концами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4, и X_5 не пересекаются; в соответствии с указанной леммой зацепленность шестерки точек измениться не может. Рассмотрим второй случай. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — такая перестановка точек N, X_1, X_2, X_3, что отрезок A_1A_2 пересекается с отрезком A_3A_4. Существуют две пары треугольников с вершинами в точках N, X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, контуры которых пересекаются:

$X_4A_1A_2$ и $X_5A_3A_4$, $X_5A_1A_2$ и $X_4A_3A_4$. Из нашей леммы следует, что коэффициент зацепления каждой из этих пар треугольников поменяется, а коэффициент зацепления остальных пар треугольников останется неизменным. Утверждение задачи доказано.

1.9. Подходит набор точек из примера 1. Другой пример можно получить, чуть пошевелив набор точек из решения задачи 2.3 а).

1.10. Утверждение задачи следует из двух предыдущих задач.

2.1. *Указание.* Самый правильный способ решить эту задачу — это взять веревку, завязать на ней узел с рис. 5 и попытаться продеформировать его в один из узлов на рис. 3, 4. То же относится к зацеплениям. Деформацию веревки удобно изображать на бумаге в виде серии картинок, в которой соседние картинки получаются друг из друга небольшой деформацией и отличаются мало.

Ответ. а), б) Правый трилистник; в) восьмерка; г) тривиальный узел; д) восьмерка; е) зацепление Уайтхеда.

2.2. Достаточно показать, что замкнутая ломаная с не более чем 5 звеньями незаузлена (то есть представляет тривиальный узел). Ясно, что треугольник незаузлен. Ясно, что если в n-угольнике (то есть n-звенной замкнутой ломаной) натянутый на пару соседних звеньев треугольник не пересечен никаким другим звеном, то эту пару звеньев можно стянуть по диагонали, то есть получить представление того же узла $(n-1)$-угольником. Поскольку в 4-угольнике препятствий для стягивания нет, то он стягивается в треугольник, и, значит, незаузлен. Пусть в 5-угольнике $ABCDE$ есть препятствие для стягивания пары звеньев AB и BC. Тогда звено DE пересекает треугольник ABC. Но тогда звено AE не пересекает треугольник BCD, так как они лежат по разные стороны от плоскости ABC.

2.3. *Ответ.* а) 6; б) 9; в) 6; г) 7; д) 8.

Примеры. Пример к пункту а) изображен на рис. 12 *а*. Другой пример: правильный треугольник ABC в горизонтальной плоскости, второй треугольник DEF с вершиной F, лежащей вне треугольника ABC в его плоскости, и вершинами D и E, расположенными в точности над и под центром треугольника ABC соответственно.

На рисунках приведены проекции узлов и зацеплений, вписанных в наименьший набор точек. Для каждой проекции нужно еще проверить, что она реализуема, т. е. действительно существует конфигурация в пространстве, которая проецируется в данную картинку. (О реализуемости таких картинок пространственными ломаными можно почитать в [6], [7].)

Минимальность. В пунктах а) и б) — очевидна. В пункте в) следует из задачи 2.2. Докажем минимальность набора в пункте г). Для это-

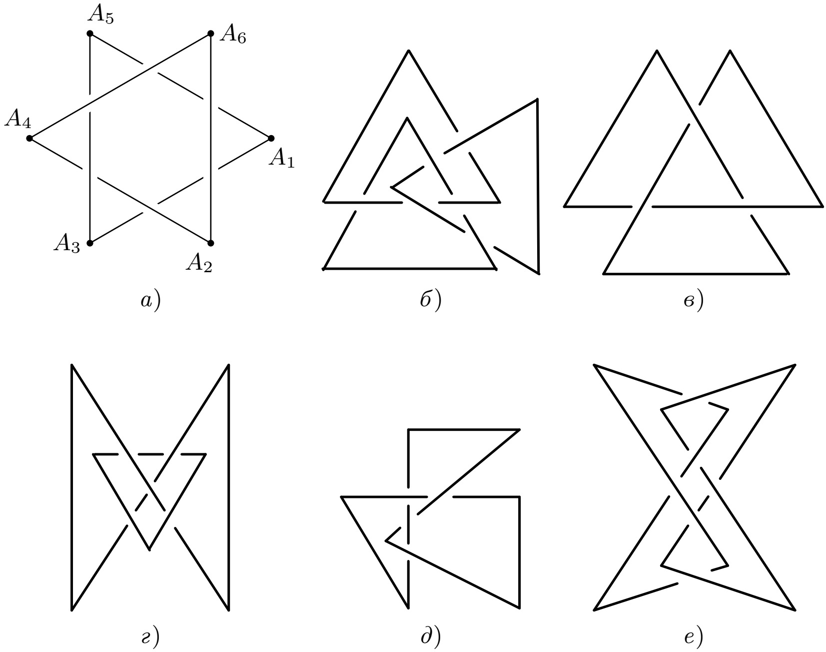


Рис. 12

го достаточно показать, что любая пара треугольников в пространстве либо представляет простое зацепление, либо их можно расцепить. Если контур одного из треугольников не пересекает внутренность другого, то препятствий для расцепления нет. Иначе каждый из контуров треугольников должен пересекать внутренность другого в единственной точке. Рассмотрим плоскость одного из треугольников (скажем, ABC). Будем считать ее горизонтальной. Пусть сторона DE треугольника пересекает треугольник ABC, а F — его третья вершина. Двигая F вертикально (и вместе с ней — стороны FD и FE), мы можем поместить ее на плоскость ABC. После этого мы можем подвинуть вершины D и E (вместе с соответствующими сторонами) и получить описанный выше пример к пункту а)).

В пунктах д) и е) авторы задачи не умеют доказывать минимальность.

2.4. Ответ. а) Да. Следует из примера 3. б) Нет.

3.1. *Первое решение.* Допустим, утверждение задачи неверно. Синие точки обозначим C_1, C_2 и C_3, а красные — K_1, K_2 и K_3. Тогда стороны четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$ не пересекаются во внутренних точках. Отрезок C_3K_3 не пересекается с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому точки C_3 и K_3 или обе лежат внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$, или обе вне его.

В первом случае точка C_3 лежит внутри одного из четырехугольников $C_1K_1C_2K_3$ или $C_1K_2C_2K_3$. Если, например, точка C_3 лежит внутри четырехугольника $C_1K_1C_2K_3$, то отрезок C_3K_2 пересекает контур четырехугольника $C_1K_2C_2K_3$, что приводит нас к противоречию. Во втором подслучае противоречие получаем аналогичным способом.

Второй случай. Отрезки K_3C_1 и K_3C_2 не пересекаются с контуром четырехугольника $C_1K_1C_2K_2$. Поэтому или точка K_2 лежит внутри четырехугольника $K_1C_1K_3C_2$, или точка K_1 лежит внутри четырехугольника $K_2C_1K_3C_2$. Задача свелась к первому случаю.

Другое решение этой задачи почти дословно повторяет рассуждение из второго решения задачи 1.2.

3.2. Пусть τ — число точек пересечения контура $ABCD$ с гранями тетраэдра $A'B'C'D'$. Тетраэдр $A'B'C'D'$ делит пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. Так как точки A, B, C, D, A', B', C', D' находятся в общем положении, то число τ четно. Так как

$$\tau \equiv \operatorname{lk}(ABCD,\, A'B'C'D') + \operatorname{lk}(ABCD,\, B'C'D'A') \pmod 2,$$

то

$$\operatorname{lk}(ABCD,\, A'B'C'D') = \operatorname{lk}(ABCD,\, B'C'D'A').$$

3.3. Определение (коэффициента зацепления двух треугольников). *Коэффициентом зацепления* двух треугольников Δ и Δ' назовем число

$$\operatorname{lk}(\Delta,\, \Delta') = 1, \text{ если } \Delta \text{ и } \Delta' \text{ зацеплены}, \qquad \operatorname{lk}(\Delta,\, \Delta') = 0, \text{ — иначе.}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\operatorname{lk}(ABCD,\, A'B'C'D') \equiv \operatorname{lk}(ABC,\, A'B'C') + \operatorname{lk}(ABC,\, A'D'C') &+ \\ + \operatorname{lk}(ADC,\, A'B'C') + \operatorname{lk}(ADC,\, A'D'C') &\pmod 2.\end{aligned}$$

Из этого, а также из свойств 1.4–1.5 следуют такие утверждения:

1. $\operatorname{lk}(ABCD,\, A'B'C'D') = \operatorname{lk}(A'B'C'D',\, ABCD)$.

2. При непрерывном движении точек A, B, C, D, A', B', C', D', оставляющем их в каждый момент в общем положении, число $\operatorname{lk}(ABCD,\, A'B'C'D')$ остается постоянным.

3.4. Пусть даны две замкнутые четырехзвенные ломаные $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, которые не имеют общих точек.

Первый способ. Пошевелим немного вершины этих ломаных таким образом, чтобы новый набор вершин — A', B', C', D', A_1', B_1', C_1', D_1' — находился в общем положении. Положим по определению

$$\mathrm{lk}(ABCD, A_1B_1C_1D_1) = \mathrm{lk}(A'B'C'D', A_1'B_1'C_1'D_1').$$

Второй способ. Пусть α — полуплоскость, ограниченная прямой A_1C_1 и содержащая треугольник $A_1B_1C_1$. А β — полуплоскость, ограниченная прямой A_1C_1 и содержащая треугольник $A_1D_1C_1$. Объединив эти полуплоскости, мы разделим пространство на две части. Каждой точке пересечения контура $ABCD$ с контурами или внутренностями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ поставим в соответствие 0, если существует такая окрестность этой точки, пересечение которой с контуром $ABCD$ лежит в одной части пространства. В противном случае поставим в соответствие этой точке 1. Коэффициентом зацепления четырехзвенных ломаных $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ называется сумма всех этих чисел по модулю 2.

3.5. Указанные ломаные будут зацеплены тогда и только тогда, когда пары их вершин на каждой из скрещивающихся прямых будут зацеплены. Поэтому количество зацепленных разделенных пар четырехзвенных ломаных равно 2.

3.6. Пусть даны четыре синие и четыре красные точки, находящиеся в общем положении. Их зацепленностью называется количество зацепленных разделенных пар с вершинами в этих точках.

Пусть B, B', B_1, B_2, B_3 — синие точки, а R_1, R_2, R_3, R_4 — красные точки, причем наборы точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4, а также B', B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 находятся в общем положении.

Соединим точки B и B' ломаной так, чтобы никакое ее звено не лежало ни в одной из плоскостей $R_iR_jB_k$. При движении точки B по ломаной зацепленность набора точек B, B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3, R_4 может измениться лишь в те моменты, когда отрезок BR_i пересекается с отрезком B_kR_j $(i \neq j)$. Пусть, например, отрезок BR_2 пересекается с отрезком B_1R_1. Среди всех разделенных пар ломаных с вершинами в нашем наборе точек коэффициент зацепления изменится у следующих: $BR_2B_2R_3$ и $B_1R_1B_3R_4$, $BR_2B_2R_4$ и $B_1R_1B_3R_3$, $BR_2B_3R_3$ и $B_1R_1B_2R_4$, $BR_2B_3R_4$ и $B_1R_1B_2R_3$. Поэтому четность зацепленности при этом не изменится.

Из приведенного рассуждения ясно, что у любых двух наборов из четырех синих и четырех красных точек зацепленность имеет одинаковую четность. Тогда из предыдущей задачи следует, что зацепленность всегда является четной.

3.7. Для набора общего положения синих точек B_1, B_2, B_3, B_4 и красных точек R_1, R_2, R_3, R_4 рассмотрим число I таких зацепленных разделенных пар $(\square, \square')$, что ломаная $\square$ содержит отрезок B_1R_1. Аналогично рассуждению задачи 3.6 доказывается, что четность числа I не зависит от набора точек. В примере из задачи 3.5 имеем $I = 1$. Значит, в каждом наборе число I нечетно, и поэтому в каждом наборе существует зацепленная разделенная пара замкнутых четырехзвенных ломаных.

3.8. Утверждение задачи следует из задач 3.6 и 3.7.

4.1. Можно например раскрасить точки A_1, A_2, A_3 в синий цвет, а A_4, A_5, A_6 — в красный. Непосредственно проверяется, что полученный набор отрицателен.

4.2. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда некоторые две синие точки B_1, B_2 расположены по разные стороны от прямой, проходящей через некоторые две красные точки R_1, R_2. Тогда отрезок B_1R_1 не пересекает B_2R_2 и B_1R_2 не пересекает B_2R_1, что противоречит определению положительного набора.

4.3. Пусть, от противного, $R_1 > R_2 > R_3 > R_1$. Тогда при обходе треугольника $R_1R_2R_3$ все синие точки все время остаются справа. Это возможно, только если обход происходит по часовой стрелке, и все синие точки расположены внутри треугольника. В задачах 4.2–4.5 предполагается $N \geqslant 2$, поэтому есть хотя бы две синие точки. Проведем через них прямую. Какие-то две вершины треугольника расположены по разные стороны от этой прямой. Но тогда исходный набор не может быть положительным (доказывается аналогично задаче 4.2).

4.4. Так как исходный набор точек положителен, то по определению пересечение R_1B_1 и R_2B_2 положительно. Значит, при движении от B_1 к R_1 точка B_2 остается слева. Но тогда и при движении от R_1 к B_2 точка B_2 остается справа. Значит, по определению $R_1 > R_2$.

4.5. Из задачи 4.3 следует, что красные точки можно занумеровать так, чтобы

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_N.$$

Из задачи 4.4 следует, что эта нумерация — искомая.

4.6 (решение В. Челнокова). Занумеруем красные и синие точки слева направо. Тогда трилистник представляется ломаной

$$R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1.$$

4.7. Пусть дан положительный набор 5 красных и 5 синих точек. Занумеруем красные точки, как в задаче 4.5. Занумеруем синие точки аналогичным образом. А именно, можно определить порядок «$>$» синих точек аналогично порядку красных точек и занумеровать синие точки в порядке возрастания (в смысле «$>$»). Рассмотрим ломаную $R_1B_4R_4B_1R_2B_3R_5B_5R_3B_2R_1$ (см. решение задачи 4.6). Она представляет трилистник, что вытекает из следующей леммы.

Лемма. Положительный набор 5 синих и 5 красных точек можно перевести в набор точек из примера 6 непрерывным движением так, чтобы в процессе движения набор оставался в общем положении.

Идея доказательства. Рассмотрим точку B_1. Из нашей нумерации точек следует, что отрезки с началом B_1 расположены выше всех остальных. Поэтому мы можем переместить (допустимым образом) точку B_1 так, чтобы ее проекция попала в самую левую синюю точку на рис. 10, а сама точка B_1 располагалась очень высоко над плоскостью рисунка. Тогда и все отрезки с началом B_1 будут располагаться очень высоко. То же самое можно сделать и с точкой B_2 — так расположить ее очень высоко, но ниже точки B_2, чтобы ее проекция совпала со второй слева синей точкой. Действуя таким образом со всеми синими точками, а потом и с красными, мы переведем исходный набор точек в требуемый набор. Лемма, а вместе с ней и утверждение задачи 4.7, доказана. $\square$

4.8. (Небольшой экскурс в *рамсеевскую теорию графов.*)

а) Утверждение легко доказать индукцией по $n+m$. Докажем базу ($n+m=6$). Всюду в дальнейшем через $R(m,n)$ будем обозначать *минимальное* число вершин в полном графе с требуемым свойством. Из задачи 1.1 следует, что $R(3,3)=6$. Очевидно, $R(4,2)=4$. База доказана. Индукционный переход в случае $n=2$ или $m=2$ очевиден. При $m,n>2$ индукционный переход получается из оценки

$$R(n,m) \leqslant R(n-1,m)+R(n,m-1).$$

Действительно, рассмотрим полный граф с $R(n-1,m)+R(n,m-1)$ вершинами. Рассмотрим его вершину A. По принципу Дирихле найдется либо $R(n-1,m)$ выходящих из нее ребер первого цвета, либо $R(n,m-1)$ выходящих из нее ребер второго цвета. Рассматривая полные подграфы с вершинами в отличных от A концах указанных ребер, получаем требуемое. Утверждение доказано.

б) Формулировка очевидна, доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R(l,m,n) \leqslant R(l-1,m,n)+R(l,m-1,n)+R(l,m,n-1).$$

в) **Теорема.** *Для любых $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ найдется такое*

$$R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3),$$

что при любой раскраске в три цвета двудольного графа с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле) для некоторого $1 \leqslant i \leqslant 3$ найдется полный двудольный подграф i-го цвета с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй.

Доказательство аналогично пункту а) и использует оценку

$$R \leqslant R(m_1-1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3) + R(m_1, m_2-1, m_3, n_1, n_2, n_3) + \\ + R(m_1, m_2, m_3-1, n_1, n_2, n_3).$$

г) (*Идея доказательства.*) Сначала нужно доказать следующее вспомогательное

Утверждение. Пусть дан полный двудольный граф с $2R$ вершинами (поровну в каждой доле). Назовем *треугольником* три вершины, одна из которых лежит в первой доле, а две другие — во второй. Тогда для любых n_1, n_2, n_3 и m_1, m_2, m_3 найдется такое

$$R = R(m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3),$$

что при любой раскраске всех треугольников в три цвета найдется полный двудольный подграф с m_i вершинами в первой доле и n_i вершинами во второй, все треугольники которого имеют цвет i.

Доказательство производится индукцией по $\sum n_i + \sum m_i$. База индукции состоит в утверждениях задач 4.7 б) и 4.7 в). Индукционный переход получается из оценки

$$R \leqslant R\bigl(R(m_1-1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3), R(m_1, m_2-1, m_3, n_1, n_2, n_3), \\ R(m_1, m_2, m_3-1, n_1, n_2, n_3)\bigr).$$

Здесь $R(x, y, z)$ — число из пункта 4.7 б). Для доказательства приведенной формулы нужно рассмотреть одну из вершин в первой доле, скажем A. Без ограничения общности, согласно пункту 4.7 б) можно отметить $R(m_1-1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3)$ вершин во второй доле так, чтобы все треугольники с вершинами в A и двух отмеченных точках были первого цвета. Теперь наша формула получается из предположения индукции.

Для доказательства утверждения 4.7 г) нужно рассмотреть одну синюю вершину B_1. Каждую тройку B_2, R_1, R_2 раскрасим в один из трех цветов в зависимости от того, положительна, отрицательна или нейтральна четверка B_1, B_2, R_1, R_2. Теперь проходит индукционный переход, использующий предыдущее утверждение и аналогичный доказательству этого утверждения. Тем самым утверждение задачи 4.7 г) может быть доказано по индукции.

д) Согласно задаче 3.1, нейтральных наборов при $n \geqslant 3$ не бывает. Поэтому пункт д) следует из пункта г).

4.9. Теоремы Миёчи и Негами для трилистника следуют из задачи 4.7, ее аналога для отрицательного набора и задачи 4.8 д) для $n = 5$.

4.10. Лучший способ решить эту задачу — воспользоваться задачами 5.1 и 5.2 из раздела «Доказательство теоремы Негами». Как и в решении задачи 2.1, для проверки лучше всего использовать веревку или нить.

Литература

[1] *Conway J., Gordon C.* Knots and links in spatial graphs // J. of Graph Theory. 1983. Vol. 7. P. 445–453.

[2] *Negami S.* Ramsey-type theorem for spatial graphs // Graphs and Combinatorics. 1998. Vol. 14. P. 75–80.

[3] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // Fundamenta Mathematicae. 2003. Vol. 179. P. 191–197. `http://arxiv.org/abs/0808.1199`

[4] *Прасолов В., Скопенков М.* Рамсеевская теория зацеплений // Математическое просвещение. Третья серия. 2005. Т. 9. С. 108–115.

[5] *Скопенков М., Скрябин О., Шаповалов А.* Вписанные зацепления // Материалы XV Летней конференции международного математического Турнира городов, `http://www.turgor.ru/lktg/2003/zacepl.ru/index.htm`

[6] *Богданов И., Каибханов А., Кудряшов Ю., Скопенков А., Сосинский А., Челноков Г.* Новые способы плетения корзин // Материалы XVI Летней конференции международного математического Турнира городов, `http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm`

[7] *Гайфуллин А., Скопенков А., Скопенков М., Шаповалов А.* Проекции скрещивающихся прямых. Материалы XIII Летней конференции международного математического Турнира городов, `http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php`

Треугольники и катастрофы [6] (10–11)

А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи

В «Кванте» № 2 за 1992 г. была опубликована задача М1330:

На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше
а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в)* $n-2$ *треугольников.*

[6] Данный материал представляет собой переработанный вариант статьи в журнале «Квант», 1992, № 11.

Нас будет интересовать точная оценка числа треугольников. Эта задача, простая и увлекательная по формулировке, была поставлена еще в 1870 году и стала проблемой на сто с лишним лет. Она затягивает, и кажется, — решение вот-вот получится. Но много лет каждая «Эврика!» лишь пополняла нашу коллекцию тонких ошибок.

Первое решение получили в 1979 г. известные геометры Грюнбаум и Шеппард. Здесь мы излагаем более короткое элементарное решение, найденное А. Я. Канелем-Беловым. По существу его можно записать на половине страницы, однако формальный текст мало что даст для понимания. Поэтому мы проследим путь, на котором получено решение, и выявим ключевые идеи на интуитивном уровне.

Ослабленная формулировка

На Московской математической олимпиаде в 1972 году была предложена следующая задача.

Задача 1. На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезали на куски. Докажите, что среди кусков найдется не менее

а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников.

Решение. Пункт а) совпадает с пунктом а) задачи М1330, при $n = 3000$, а пункт б) является усилением ее пункта б), поскольку $2000 > (3000-1)/2$.

Начнем с ключевой идеи. К каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник (треугольный кусок с основанием на прямой). Если это доказать, то получится решение пункта а), поскольку каждый треугольник примыкает к трем прямым.

Попробуем найти для каждой прямой примыкающий к ней треугольник, не пересеченный другими прямыми. Здесь красивая идея: выберем ближайшую к этой прямой точку пересечения других прямых (рис. 1). Покажите, что эта точка — вершина искомого треугольника.

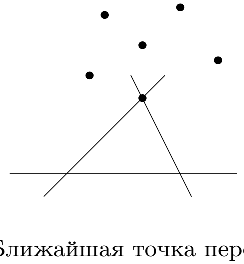


Рис. 1. Ближайшая точка пересечения

Чтобы доказать пункт б), достаточно для каждой прямой найти еще один примыкающий к ней треугольник. Это кажется просто: ведь у прямой две стороны. Беда лишь в том, что все точки пересечения могут лежать по одну сторону от прямой... Но... не является ли этот плохой случай редкостью? Давайте посмотрим, сколько «плохих» прямых может быть.

Очевидно, возможен случай, когда плохих прямых ровно три (когда прямых всего три). К счастью, это самый плохой случай (больше не бывает). Если же прямых $n > 3$, то плохих прямых не больше двух. Докажем это.

Допустим, что есть тройка плохих прямых. Нарисуем только их и еще одну прямую. В любом случае появятся точки пересечения по обе стороны от одной из плохих прямых (поскольку на четвертой прямой лежат три точки пересечения, а прямая, проходящая через среднюю точку, не может быть плохой). Противоречие.

Итак, при $n > 3$ найдется не больше двух прямых, к которым примыкает ровно один треугольник, а к остальным примыкает не меньше двух. Оценим число треугольников. Их будет не меньше $(2n-2)/3$. В нашем случае это 1999 и 1/3. Но число треугольников целое, значит, их не меньше 2000.

Попутно доказано усиление пункта б) задачи М1330, поскольку

$$2(n-1)/3 > (n-1)/2.$$

Предлагаем вам несколько упражнений, идейно близких к только что решенной задаче.

Упражнения

1. В пространстве провели n плоскостей общего положения (любые четыре образуют тетраэдр). Докажите, что среди частей разбиения пространства найдется не меньше

а) $n/4$ тетраэдров ($n \geqslant 4$), б) $(2n-3)/4$ тетраэдров ($n \geqslant 5$).

2. На плоскости отмечено n прямых ($n \geqslant 3$). Любые две из них пересекаются, и через каждую точку пересечения проходит не меньше трех прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

3. В пространстве отмечено n плоскостей. Любые три из них имеют общую точку, и через каждую такую точку проходит не меньше четырех плоскостей. Докажите, что все плоскости проходят через одну точку.

4. (На идею ближайшей прямой.) На плоскости отмечено n точек. Через каждые две из них проведена прямая. На каждой такой прямой лежит не менее трех отмеченных точек. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной прямой.

Точная оценка — тонкие ошибки

Теперь приступим к нашей главной задаче.

На плоскости провели n прямых общего положения (любые три образуют треугольник). Докажите, что среди частей разбиения плоскости найдется по крайней мере $n-2$ треугольника, причем эта оценка точная.

5. Расположите n прямых общего положения так, чтобы треугольных кусков было ровно $n-2$. (*Указание.* Проведите несколько касательных к дуге окружности.)

В основе всех первоначальных попыток доказательства точной оценки лежало наблюдение, что треугольник «неуничтожим», т. е. секущая прямая делит его на две части, одна из которых — треугольник. (Кстати, верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра и секущей плоскости?)

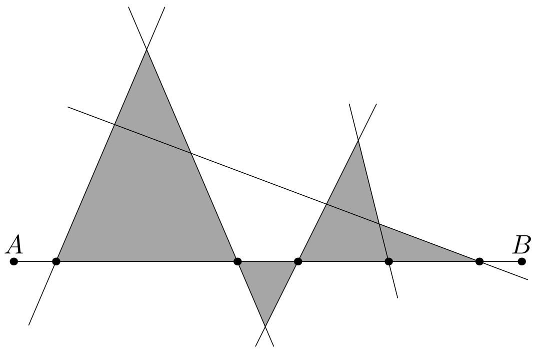


Рис. 2. От каждого треугольника с основанием на AB остался треугольник

Вот одно из красивых ошибочных решений.

Если найти любые $n-2$ треугольника, то после их пересечения прямыми от них останется $n-2$ треугольных кусочка, и задача будет решена. Для этого выделим одну прямую AB. Остальные прямые пересекают ее в $n-1$ точке. Эти точки делят прямую на $n-2$ отрезка. Прямые, проходящие через концы отрезков, образуют с ними $n-2$ треугольника (рис. 2). Эти треугольники неуничтожимы. Вот и всё!

6*. Найдите ошибку в этом «решении». (*Указание.* Вершина одного треугольника попадает внутрь другого треугольника.)

Попытка применить индукцию

Поскольку треугольник неуничтожим, естественно попытаться применить индукцию: например, доказать, что добавление прямой увеличит число треугольников. Именно на этом пути получено большинство

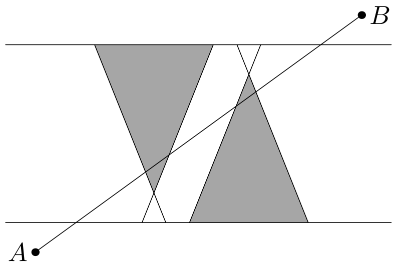


Рис. 3. Удаление прямой AB не уменьшает число треугольников

ошибочных решений. А дело в том, что это утверждение неверно: добавление прямой может не прибавить треугольников!

Нарисуем несколько прямых общего положения так, чтобы при удалении прямой AB число треугольников не уменьшилось (рис. 3).

Были попытки доказать, что всегда найдется прямая, удаление которой уменьшит число треугольников (тогда бы прошла индукция). Но вопрос остался открытым: верно ли, что такая прямая найдется? Решение было получено из других соображений.

Итак, добавление и удаление прямых нам не помогло, поищем другой путь.

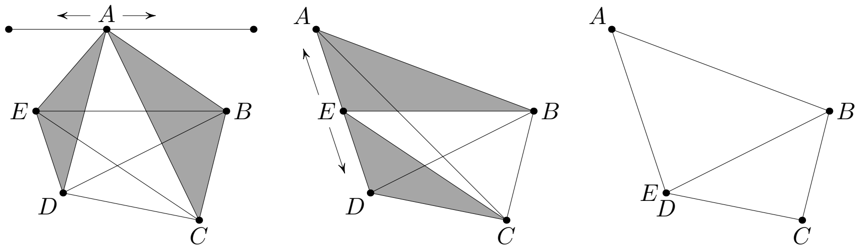
Избегать крайностей — тоже крайность

В понятии общего положения прямых заметно стремление уйти от вырожденных случаев. Уже само слово «вырожденный» создает ощущение патологии, чего-то такого, чего надо избегать. И школа приучает к этому, запрещая, например, три точки, лежащие на одной прямой, считать треугольником. Однако именно идея вырождения (упрощения) оказалась краеугольным камнем решения задачи о треугольниках. Начнем с примера.

Задача 2. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.

Решение. Иметь дело с произвольным пятиугольником довольно трудно. А нельзя ли его «упростить»? Но не ради разбора частного случая (хотя и это полезно), а для того чтобы свести общий случай к частному.

Давайте двигать вершину A пятиугольника параллельно его диагонали — основанию треугольника (рис. 4 *a*). Тогда площадь треугольника ABE и площадь пятиугольника не будут меняться, но будут меняться площади треугольников ABC и ADE.



а *б* *б*

Рис. 4. Вырождение (упрощение) пятиугольника. Закрашены треугольники, площадь которых меняется

Ключевая идея: если двигать вершину треугольника вдоль прямой (сохраняя основание), то его площадь будет либо возрастать, либо убывать, либо не меняться (высота либо растет, либо убывает, либо не меняется). Иными словами: если двигать вершину вдоль прямой с постоянной скоростью, то площадь треугольника тоже меняется с постоянной скоростью. Значит, сумма площадей всех треугольников тоже меняется с постоянной скоростью. Хорошо, если она не растет, потому что мы надеемся доказать неравенство для нового пятиугольника так, чтобы для старого оно было верно и подавно.

Но если суммарная площадь треугольников растет, что тогда делать? Очень просто: надо двигать вершину в противоположную сторону, и площадь будет убывать.

До каких же пор двигать вершину? Очевидно, пока пятиугольник остается выпуклым. Но в этом предельном положении (рис. 4 *б*) один из углов пятиугольника равен 180 градусов... Ну и пусть, ведь пятиугольник стал проще! (Стал похож на четырехугольник.)

Теперь повторим это рассуждение для вершины E с развернутым углом. Что получится? Она совпадет с одной из соседних вершин, например с D (рис. 4 *в*).

Можно двигать вершины и дальше, до предела, когда пятиугольник превратится в треугольник (с двумя двойными вершинами или одной тройной), но можно остановиться и раньше, поскольку треугольники ABE и BCD уже покрывают пятиугольник.

Итак, доказательство для исходного пятиугольника свелось к одному частному (вырожденному!) случаю, который очевиден. Точнее, мы сохраняли площадь пятиугольника, меняя его форму так, чтобы суммарная площадь треугольников убывала. В результате треугольники покрыли пятиугольник, значит, их площадь была больше.

Замечание. Можно двигать вершины пятиугольника вдоль произвольной прямой, тогда все площади будут меняться линейно (с постоянной скоростью), и нам достаточно следить за тем, чтобы разность площадей треугольников и пятиугольника (которая тоже меняется линейно) убывала.

Такими же средствами решается и ряд других задач.

Упражнения

7. В выпуклом шестиугольнике каждые три соседние вершины образуют треугольник. Всегда ли сумма площадей этих треугольников больше площади шестиугольника?

8. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

9. Докажите, что у выпуклого многоугольника найдутся три вершины, которые образуют треугольник максимальной площади среди треугольников, вписанных в него.

10. В кубе «сидит» выпуклое тело, чья проекция на любую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем тела не меньше трети объема куба.

11. На отрезке отмечено n точек. Какова максимально возможная сумма попарных расстояний между ними?

12. Покажите, что максимум линейной функции от координат точек $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ внутри выпуклого многогранника достигается в одной из его вершин.

13. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, а полный алмазов – 40 кг. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов—60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести не больше 100 кг? (*Указание.* 1 г алмазов дороже 1 г золота, но 1 мл алмазов дешевле 1 мл золота. Докажите, что сундук должен быть полон и при этом весить 100 кг.)

Во всех этих задачах хорошо работают три идеи: 1) сведение общей ситуации к частному случаю посредством движения, 2) выбор линейного движения, которое в одном из направлений улучшает ситуацию, 3) рассмотрение граничных (краеугольных) случаев, которые часто бывают вырожденными.

Сама возможность не вникать в процесс движения, а сразу смотреть во главу угла принципиально важна: мы встретим ситуацию, когда варианты движения необозримы, но можно воспользоваться информацией о финальном состоянии.

Поэтому в дальнейшем мы будем: 1) двигать прямые, приводя их расположение к удобному виду, 2) использовать линейное движение, т. е. параллельный перенос с постоянной скоростью, 3) изучать предельные положения прямых.

План действий

Ближайшие рассуждения не войдут в окончательное решение, однако их стоит рассмотреть, поскольку, во-первых, они привели к решению, во-вторых, похожими средствами решаются многие трудные задачи, и в-третьих, полезно проследить «чистку» решения. В результате мы получим решение на интуитивном уровне. Затем сделаем рассуждения строгими и, наконец, приведем короткое формальное доказательство.

Где живут треугольники?

> Еще, быть может, каждый атом —
> Вселенная, где сто планет;
> Там все, что здесь, в объеме сжатом,
> А также то, чего здесь нет.
>
> *В. Брюсов*

Из-за обилия случаев расположения прямых все попытки в них разобраться потерпели неудачу. Попробуем двигать прямые. Ради линейности будем двигать их параллельно самим себе. Что может произойти?

Пока прямые не проходят через точки пересечения других прямых, картина в принципе не меняется. Но если несколько точек пересечения совпадут — произойдет «катастрофа», — исчезнет один или несколько треугольников. После катастрофы произойдет «перестройка», результат которой непредсказуем (рис. 5).

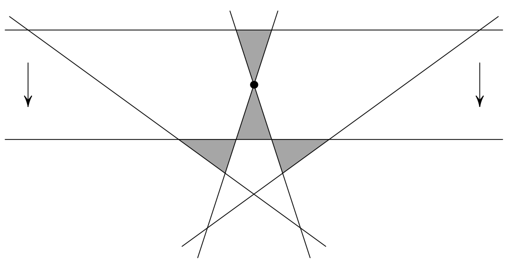


Рис. 5. Гибель одного треугольника и рождение трех при движении горизонтальной прямой

Поэтому доводить дело до катастрофы мы не будем, а остановимся за одно мгновение до нее, тогда треугольники не исчезнут и не появятся, а лишь «сильно» уменьшатся. То, что получится, назовем фокусом прямых. Фокус, таким образом, это несколько прямых, все точки взаимного пересечения которых лежат в малой области, почти точке, причем эта область не пересекается с другими прямыми (рис. 6).

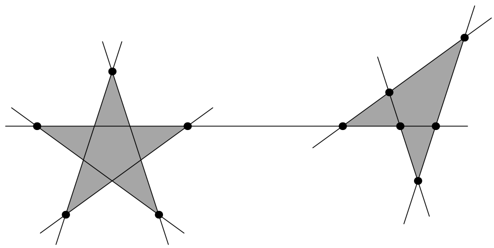


Рис. 6. Два фокуса

Для нас особенно важно, что в фокусе наблюдается разбиение плоскости в миниатюре, но с меньшим числом прямых. Иначе говоря, фокусы — это обособленные «миры», в которых живут свои собственные крошечные треугольники. Поэтому если удастся «развалить» картинку на фокусы, то треугольники станет легче считать (поскольку для меньшего числа прямых задачу можно считать решенной по предположению индукции).

Вернемся к индукции

Итак, предположение индукции состоит в том, что любые k прямых при $k < n$ разбивают плоскость на части, среди которых не меньше, чем $k-2$ треугольника. Значит, в фокусе из $k < n$ прямых найдутся $k-2$ треугольника.

Пусть, к примеру, двигая прямые, нам удалось их все собрать в два фокуса: в один — с 1-й по k-ю, в другой — с k-й по n-ю, причем k-я прямая — общая. Тогда в фокусах наберется

$$(k-2)+(n-k+1-2)=n-3$$

треугольника, и для индукционного перехода надо найти еще один треугольник вне фокусов. Однако удастся ли нам все прямые собрать ровно в два фокуса? К сожалению, нет. А когда фокусов много, возникает разнообразие случаев. Что делать?

Где границы возможного?

Исследуем процесс образования фокусов. Вначале прямые могут двигаться независимо, но если образовался фокус, то его надо сохранять, т. е. прямые фокуса двигать как одно целое в виде «ежа» (мы запрещаем прямым фокуса двигаться относительно друг друга для того, чтобы, во-первых, предотвратить катастрофу, а во-вторых, сохранить разбиение плоскости в миниатюре). Фокусы (почти точки) могут дополняться новыми прямыми или объединяться (в одну почти точку), а их сохранение будет все сильнее ограничивать свободу движения и, наконец, все возможности двигать прямые будут исчерпаны. При этом надо избежать стягивания всей картинки в один фокус (чтобы применить индукцию по числу прямых). Достаточно, например, зафиксировать две точки пересечения (чтобы они не попали в один фокус).

Теперь поймем, как связаны скорости прямых в одном фокусе. Две прямые можно двигать произвольно, а остальные должны под них подстраиваться (рассмотрите случай трех прямых). Иначе говоря, сохранение фокуса из k прямых требует $k-2$ соотношений между их скоростями. Но в этом же фокусе, по нашему предположению, найдутся $k-2$ треугольника, — столько, сколько соотношений. Не здесь ли ключ к решению?

Попробуем оценить число треугольников через число соотношений в конечном состоянии (когда прямые потеряют подвижность). Вначале мы закрепили одну прямую и две точки пересечения на ней, т. е., фактически, три прямые. У нас остались $n-3$ свободные прямые. Будем фокусировать их до упора. Для сохранения фокусов потребуется $n-3$ соотношения. По предположению индукции число треугольников в каждом фокусе не меньше числа соотношений, значит всего треугольников не меньше, чем $n-3$.

Осталось найти еще один треугольник. Всего один, где-то между фокусами. Но как его искать — неясно...

Заключительный аккорд

Подумаем: если нам нужен еще один треугольник, то зачем его искать? Нельзя ли сделать так, чтобы он был с самого начала? Нам-то ведь все равно, какие три прямые зафиксировать вначале. Давайте зафиксируем те, которые уже образуют треугольник! Задача решена!

Чистка решения

Наша работа еще далеко не окончена: чтобы записать решение, надо наши рассуждения очистить, усовершенствовать и сделать строгими. Важно понять связь между треугольниками и фокусами, в частности, почему число треугольников в фокусе не меньше числа соотношений, нужных для его сохранения.

14. Докажите с помощью движения одной прямой, что к ней примыкает треугольник.

Итак, мы сначала закрепили один произвольно выбранный треугольник — это спасло нас от общего «коллапса» и дало треугольник вне фокусов. А не сохранить ли нам, ради равноправия, сразу все треугольники? Тогда при движении прямых фокусы вообще не появятся (поскольку в фокусе существует треугольник, который до этого сжимался, т. е. не сохранялся).

Однако если картинка окажется нежесткой, то при некотором движении фокус все же появится. Это будет противоречием. Значит, сохранение всех треугольников гарантирует жесткость картинки, и нам достаточно показать, что, сохраняя меньше, чем $n-2$ треугольника, нельзя добиться жесткости.

Вспомним, как мы сохраняли фокус: разрешали ему двигаться как целому. Простейший фокус — это треугольник. Поступим с обычным треугольником так же: разрешим перемещаться, но сохраним размер. (Проверьте, что полное фиксирование $n/3$ треугольников может привести к потере подвижности прямых.)

Но теперь мы не зафиксировали полностью и начальный треугольник, поэтому, чтобы избавиться от неинтересных параллельных переносов всей картинки, закрепим две прямые. (Кстати, положение фокуса тоже определялось двумя прямыми.)

Каждый треугольник дает одно соотношение для скоростей прямых. Следовательно, сколько мы сохраним треугольников — столько получим соотношений.

Итак, надо выбрать $n-2$ скорости, которые мы назовем параметрами. Если треугольников меньше числа параметров, то сохранение их размеров не обеспечит жесткости (рис. 7).

Но почему, если нет жесткости, можно получить фокус? А вот почему. У нас, как и в задаче про пятиугольник, есть возможность двигать

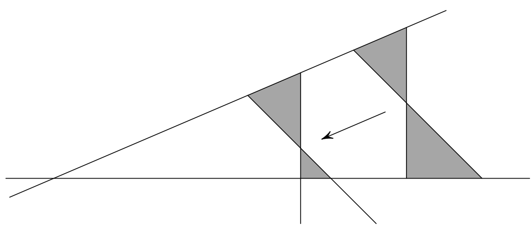


Рис. 7. Сохраняя верхний треугольник, можно сжимать нижний

прямые в обратную сторону, т. е. менять знаки всех скоростей на противоположные, поэтому можно направить одну из прямых к точке пересечения закрепленных прямых, и тогда фокус неминуем. (Забавно, что при «чистке» решения индукция исчезла, как исчезают строительные леса при возведении зданий.)

Суммируем...

Сначала мы закрепили две прямые, а остальным разрешили двигаться с постоянными скоростями так, чтобы размеры всех треугольников сохранялись. Тогда если треугольников окажется меньше, чем $n-2$, то скорости некоторых прямых можно выбрать ненулевыми (будет доказано). Меняя, если надо, направления всех скоростей, можно создать фокус, где и обнаружится неучтенный треугольник. Противоречие.

Уточним рассуждения

Чтобы получить строгое доказательство, необходимо уточнить наши интуитивные рассуждения, и прежде всего — о жесткости. Переведем их на язык алгебры, где скорости — неизвестные, а соотношения — уравнения для них. Подвижность прямых означает, что существует ненулевое решение системы уравнений.

Каждый, кто возился с системами, знает, что, как правило, если число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет конечное множество решений; если уравнений больше, чем неизвестных (переопределенная система), то решений нет; если уравнений меньше, чем неизвестных (недоопределенная система), то решений бесконечно много. Последним соображением мы и воспользовались. К сожалению, эти соображения верны только «как правило». Например, система

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

решений не имеет, хотя число уравнений в ней меньше числа неизвестных. Однако в частном случае, когда все уравнения линейные и однородные, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Недоопределенная система m линейных однородных уравнений с n неизвестными ($m<n$)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений (а значит, имеет ненулевое).

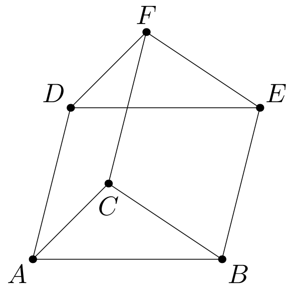


Рис. 8. Три параллелограмма. $S_{ADFC} + S_{BCFE} = S_{ABED}$

Докажите эту теорему по индукции, последовательно избавляясь от неизвестных методом подстановки. (Доказательство можно найти в любом курсе линейной алгебры.)

Переведем разговоры о соотношениях для скоростей прямых на язык линейных уравнений (скорость прямой — это скорость ее удаления от начального положения).

Можно убедиться (выражая координаты или векторы), что точка пересечения двух прямых, движущихся с постоянными скоростями, тоже движется с постоянной скоростью и стороны треугольника меняются с постоянными скоростями, откуда вывести, что условие сохранения размера треугольника выражается линейным однородным уравнением для скоростей прямых.

Докажем последнее утверждение геометрически. При параллельном переносе треугольника образуются три параллелограмма (рис. 8), причем площадь одного из них равна сумме площадей остальных. Площадь параллелограмма есть произведение стороны треугольника на величину сдвига прямой.

Будем считать направление сдвига прямой положительным, если треугольник растет. Тогда условие равенства площадей параллелограммов можно записать в виде линейного однородного уравнения $a_1h_1 + a_2h_2 + a_3h_3 = 0$, где a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника, h_1, h_2, h_3 — сдвиги прямых в ортогональном направлении. Таким же точно уравнением связаны и скорости прямых.

Итак, условие сохранения всех треугольников — это система линейных однородных уравнений. Как видите, линейность принесла плоды.

Упражнение 15. Покажите, что в системе координат (x, y) в момент времени t уравнение прямой, движущейся со скоростью v, можно записать в виде: $x \sin u - y \cos u = c - vt$, где u — угол наклона прямой к оси абсцисс.

Строгое доказательство

В заключение приведем строгое доказательство, в котором, как это и принято в серьезной литературе, скрыты все повороты мысли. Такие тексты напоминают ребусы или компьютерные программы без комментариев. Их смысл, по выражению академика В. И. Арнольда, подобно притчам, разъясняют лишь ученикам наедине.

Допустим, что число k треугольников разбиения меньше, чем $n-2$. Пусть d — минимальная из высот треугольников; $v_1, \ldots, v_n$ — скорости прямых в перпендикулярных направлениях, причем $v_1 = v_2 = 0$.

Условие сохранения размеров всех треугольников равносильно системе k линейных однородных уравнений для скоростей v_i $(i = 3, \ldots, n)$, которая (согласно теореме) имеет ненулевое решение.

Можно считать (поменяв, если надо, направление времени), что некоторая прямая l_i движется в сторону точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Существует момент («катастрофа»), когда три или больше прямых проходят через одну точку. Пусть t — первый такой момент, тогда в момент

$$t_1 = t - d/(2\max v_i)$$

найдутся три прямые, которые образуют непересеченный треугольник с высотой меньше d. Это противоречит сохранению размеров всех треугольников. Утверждение доказано.

Замечания

1. Условие задачи о треугольниках обобщается для пространств любого числа измерений, в частности: если в трехмерном пространстве провели n плоскостей общего положения, то среди частей разбиения пространства найдутся не меньше, чем $n-3$ тетраэдра. (Почему треугольников $n-2$, а тетраэдров $n-3$? Что будет в одномерном случае?)

2. Просматривая решение, можно убедиться, что требование общего положения прямых можно ослабить: если среди n прямых на плоскости любые две пересекаются и не все прямые проходят через одну точку, то среди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника.

Главное отличие в доказательстве состоит в том, что в процессе движения могут разрушаться точки многократного пересечения прямых, и тогда возникнут новые треугольники. Но эти треугольники будут расти с постоянной скоростью, и их легко отличить от искомого треугольника, который сжимается в точку.

Проведите соответствующие рассуждения самостоятельно.

МОСКОВСКИЕ ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

А. Б. Скопенков

Es ist unmöglich
sagt die Erfahrung
Es ist was es ist
sagt die Liebe.
Erich Fried. Was es ist

Весной 2004 года возобновлена замечательная традиция проведения выездных Школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду (хотя формального решения о регулярном проведении Школ не принято). Школы проводятся Московским институтом открытого образования и Московским центром непрерывного математического образования. Эти школы продолжают замечательные традиции московских, ленинградско-петербургских, кировских, костромских, краснодарско-южнороссийских и других летних школ.

Школы проводятся в начале ноября, начале апреля и в июле. Весенняя и осенняя школы проводятся для 9–11 классов, а летняя — для перешедших в 9–10 классы.

Основная цель Школ — обучение математике высшего уровня. Обучение проходит в основном в форме решения и обсуждения интересных задач. Формулировки этих задач либо ясны школьникам, либо предваряются кратким теоретическим введением. Однако эти задачи подобраны так, что в процессе их решения и обсуждения ученики знакомятся с важными математическими идеями и теориями. Такое обучение одновременно готовит ученика и к математической науке, и к математическим олимпиадам, а также полезно для его развития в целом [1)].

Полную версию статьи см. на сайте `www.mccme.ru/circles/oim/vyshkola.pdf`. О ближайшей школе см. по адресу `www.mccme.ru/circles/oim/SHKOLA.pdf`. Обновляемая версия информации о школах и материалов занятий находится на сайте `www.mccme.ru/circles/ oim/mat.htm`.

[1)] Подробнее см. заметки А. Б. Скопенкова «Олимпиады и математика» и «Философско-методическое отступление» в начале данного сборника.

Кроме указанных тематических занятий, проводится «сдача задач»: школьники, находясь в аудитории, могут записывать решения задач, решать устные задачи по уже пройденным темам и сдавать их присутствующему на занятии преподавателю.

Чтобы разнообразить стиль занятий и заодно потренировать школьников к олимпиадам, раз в несколько дней проводятся тренировочные олимпиады. На них каждый школьник решает варианты, близкие к вариантам московских или всероссийских олимпиад или сборов (в зависимости от ближайшей олимпиады, в которой этому школьнику предстоит участвовать).

Чтобы научиться ясно записывать (в частности, проверять и уточнять) свои мысли, мы учим школьников записывать решения задач (примерно по одной в день) настолько ясно, чтобы текст было не стыдно опубликовать.

Всего имеется ориентировочно 3–4,5 часов аудиторных занятий и 0–2 часа самостоятельных занятий в день (расписания прошлых школ см. в приложении). Участники каждой школы делятся на группы в соответствии с уровнем подготовленности и возрастом. На каждом занятии школьникам предлагается подборка задач по некоторой теме. Как правило, ключевые задачи самостоятельно решаются некоторыми школьниками и после этого разбираются, а остальные сдаются школьниками как на занятии, так и после него. Впрочем, стиль проведения занятий зависит от конкретного преподавателя. Преподаватели Школы — и замечательные математики, и классные преподаватели, и члены жюри олимпиад высшего уровня; как студенты, так и профессиональные математики, и учителя. Многие из них являются авторами настоящего сборника.

Настоящий результат такого обучения виден не сразу. Однако достигнуть высокой «долгосрочной» цели трудно, если не поставить конкретную доступную «промежуточную» цель. Участники школы получают зачет по итогам своей работы, и сдача зачета необходима для приглашения в следующие школы (см. зачетные требования в приложении). *Одинаковые* минимальные требования ко всем (без исключения) школьникам являются необходимым условием результативности Школы. Однако помощь школьнику как в выполнении этих минимальных требований, так и в самостоятельном формировании и добровольном выполнении требований более высоких (но по-прежнему реалистичных и не мешающих гармоничному общему развитию) оказывается в основном при *индивидуальной* работе преподавателя с ним. Важная составляющая и одновременно результат школ — уважительное отношение к труду и атмосфера сотрудничества между учениками и преподавателями.

Успешное участие в Школе НЕ может учитываться при приглашении на Всероссийскую олимпиаду (и другие соревнования, в правилах отбора на которые не оговорен учет участия в Школе); однако оно поможет успешно выступить на любой олимпиаде.

В жизни Школ важны также общение и (физ)культурное развитие. Школы проводятся в комфортных пансионатах ближайшего Подмосковья. На Школах превосходно организован быт и досуг школьников, есть много возможностей для занятий спортом (футбол, настольный теннис, бег и плавание) и других видов отдыха. Ориентировочное расписание дня и правила для участников Школ приведены в приложении.

Московские школьники приглашаются на Школу по итогам участия в прошлых Школах и других общемосковских программ элитарного обучения математике, по итогам выступления на Всероссийской олимпиаде, Московской олимпиаде и на Турнире городов, а также по рекомендациям учителей. Обучение и проживание на Школах для них *бесплатное.* Мы с удовольствием приглашаем также кандидатов в команду России на Международную олимпиаду по математике, *проживающих вне Москвы* (см. раздел «Рекомендации» в приложении) [2].

Приложение: кружок «Олимпиады и Математика»

В Московском центре непрерывного математического образования (МЦНМО) под моим руководством проходит кружок [3] «Олимпиады и математика», см. `www.mccme.ru/circles/oim`. Моими соруководителями и ассистентами в разное время были и являются А. Акопян, А. Есин, А. Ефимов, А. Засорин, Д. Пермяков, С. Сафин, С. Спиридонов, А. Трепалин и И. Шнурников. Это студенты механико-математического факультета Московского государственного университета (а некоторые — и Независимого московского университета), в прошлом победители Международных и Всероссийских олимпиад школьников,

[2] Конкретные сроки, критерии приглашения и списки приглашенных, а также крайние сроки *подтверждения участия* рассылаются приглашенным по электронной почте и вывешиваются на `www.mccme.ru/circles/oim/SHKOLA.pdf` до 15 мая для летней школы, до 15 сентября для осенней школы и до 1 февраля для весенней школы. Приглашенные на весеннюю школу по результатам мартовского отбора обзваниваются в день публикации его результатов. За неделю до последнего срока подтверждения участия в летней и осенней школах неподтвердившие обзваниваются по телефону.

[3] Аналогичный кружок «Математический семинар» я веду в физико-математической школе-интернате им. А. Н. Колмогорова с 1994 года (до 2001 года совместно с В. Н. Дубровским). Этот кружок продолжает традицию «Физико-математического семинара» и «Научного общества учащихся», которые вели В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, Е. Л. Сурков и А. П. Веселов. См. `www.mccme.ru/circles/oim/matsem.pdf`.

большинство из них — отличники, некоторые уже являются авторами научных работ.

Участвовать в кружке «Олимпиады и математика» имеет право любой желающий. Однако уровень занятий довольно высок; большинство участников нашего кружка — ученики 8–11 классов, которые имеют шанс пройти на Всероссийскую олимпиаду школьников.

Стиль занятий кружка близок к стилю выездных школ (см. выше). В начале каждой темы решаются и разбираются в основном задачи, предлагавшиеся ранее на олимпиадах (или аналогичные таковым). А в конце дело часто доходит до *задач для исследования*[4]. Мы уделяем много времени *индивидуальным* занятиям, разбирая лично с каждым школьником его решения и давая ему подсказки и/или дополнительные задачи, а также занимаемся со школьниками, которые решают исследовательские задачи (и выступают со своими результатами на конференциях школьников).

Занятия кружка объединяются в циклы из 1–3 занятий, связанных общей темой или идеей. Разные циклы почти независимы друг от друга, а темы циклов объявляются заранее (поэтому можно изучать только те циклы, которые школьнику наиболее интересны).

Многие материалы кружка опубликованы в настоящем сборнике, а также в журналах и на `www/mccme.ru/circles/oim`. Активное участие в кружке требует затрат времени и сил, поэтому его желательно согласовать с родителями и учителями. В хорошую погоду занятия кружка часто проходят с выездом на природу.

Успешное участие в кружке (зачет) учитывается при приглашении учеников в выездные школы. Подчеркну, что успешное участие в кружке не учитывается при формировании команды Москвы на Всероссийскую Олимпиаду. Но, конечно, оно поможет успешно выступить на любой олимпиаде.

Приложение: преподаватели Школ[5]

Скопенков Аркадий Борисович, научный руководитель Школ, руководитель кружка «Олимпиады и математика», доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ, Независимого московского университета и Московского института открытого образования, лауреат премий Московского математического общества, Российской академии наук, Европейской академии наук и Стипендии Пьера Делиня. `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`.

---

[4] См. *Скопенков А.* Размышления об исследовательских задачах для школьников // Матем. просвещение. 2008. №12. С. 23–32; `www.mccme.ru/circles/issl.pdf`.

[5] Участвовавшие более одного раза или авторы материалов сборника. Редакторы просят извинения за возможные неточности.

Арнольд Виталий Дмитриевич, педагогический руководитель весенних и осенних Школ, учитель школы 1543, зам. директора Московского центра непрерывного математического образования.

Блинков Александр Давидович, педагогический руководитель летних школ, учитель математики школы 218, Заслуженный учитель РФ и Соросовский учитель (многократно).

Пермяков Дмитрий Алексеевич, зам. руководителя Школы, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, автор научной работы, победитель Международной олимпиады школьников, генеральный куратор системы дистанционного обучения при МИОО.

Трепалин Андрей Сергеевич, педагогический руководитель осенней школы — 2008, соруководитель кружка «Олимпиады и математика», студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Абрамов Ярослав Владимирович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель московских олимпиад школьников.

Акопян Арсений Владимирович, аспирант Института системного анализа, соавтор книги по геометрии.

Аржанцев Иван Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ.

Арутюнов Владимир Владимирович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, студент Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников, победитель международной студенческой олимпиады.

Астахов Василий Вадимович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель международных олимпиад школьников и студентов.

Канель-Белов Алексей Яковлевич, доктор физ.-мат. наук, профессор Международного университета в Бремене и Московского института открытого образования.

Берштейн Михаил Александрович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель международной олимпиады школьников.

Буфетов Александр Игоревич, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Независимого московского университета и университета Райса.

Богданов Илья Игоревич, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Московского физико-технического института.

Бурман Юрий Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, постоянный преподаватель Независимого московского университета.

Вялый Михаил Николаевич, кандидат физ.-мат. наук, постоянный преподаватель Независимого московского университета, ответственный секретарь редколлегии журнала «Математическое просвещение».

Гаврилюк Андрей Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель международной олимпиады школьников.

Гарбер Алексей Игоревич, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, аспирант Математического института РАН.

Галочкин Александр Иванович, учитель математики школы 1134, кандидат физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ.

Глазырин Алексей Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, аспирант мехмата МГУ.

Девятов Ростислав Иванович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель международной олимпиады школьников.

Дориченко Сергей Александрович, учитель математики школ 57 и 179, председатель жюри и оргкомитета Международного математического турнира городов.

Ефимов Александр Иванович, студент-отличник мехмата МГУ и Независимого московского университета, победитель международных студенческих олимпиад, автор научных работ.

Заславский Алексей Александрович, учитель математики школы 1543, кандидат техн. наук, ст. научный сотрудник ЦЭМИ РАН.

Кожевников Павел Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Московского физико-технического института.

Конягин Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ.

Кудряшов Юрий Георгиевич, учитель математики школы 57, аспирант механико-математического факультета МГУ.

Куюмжиян Каринэ Георгиевна, студентка механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победительница всероссийских олимпиад школьников.

Нетай Игорь Витальевич, студент механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Пономарева Елизавета Валентиновна, студентка-отличница механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победительница всероссийских олимпиад школьников.

Прасолов Виктор Васильевич, преподаватель Независимого московского университета, автор замечательных книг по математике.

Прасолов Максим Вячеславович, учитель математики школы 57, студент-отличник механико-математического факультета МГУ.

Протасов Владимир Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ.

Райгородский Андрей Михайлович, учитель математики школы 179, доктор физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ, профессор, руководитель исследовательской лаборатории компании «Яндес», лауреат премии Российской академии наук.

Сафин Станислав Рафикович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Сендеров Валерий Анатольевич, член редакционной коллегии журнала «Квант».

Скопенков Михаил Борисович, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ИППИ, лауреат премий им. Мёбиуса и Российской Академии наук, координатор системы дистанционного обучения при МИОО.

Спивак Александр Васильевич, учитель математики школ 1543, 1018, 1101 (и т. д.), преподаватель Малого мехмата, член редколлегии журнала «Квант».

Спиридонов Сергей Викторович, аспирант механико-математического факультета МГУ.

Фёдоров Роман Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, соавтор книги «Московские математические олимпиады».

Шабат Георгий Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор Независимого московского университета.

Шаповалов Александр Васильевич, ведущий преподаватель Кировской ЛМШ, кандидат физ.-мат. наук, сотрудник Математического института Стокгольмского университета, автор многих красивых задач.

Шень Александр, учитель математики школы 57, кандидат физ.-мат. наук, профессор Независимого московского университета.

Шнурников Игорь Николаевич, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, автор научной работы, победитель международной олимпиады школьников.

Ященко Иван Валериевич, учитель математики школы 57, кандидат физ.-мат. наук, директор Московского центра непрерывного математического образования, зав. кафедрой математики Московского института открытого образования.

Приложение: зачетные требования

На свободу — с чистой совестью!

Для получения Зачета нужно не позже окончания Школы сдать

1) $[3M/2]$ письменных задач (из выдаваемых на каждом занятии);

2) еще две устные задачи по каждому занятию, кроме сдачи задач и олимпиад;

3) еще $3M$ устных задач.

Здесь M — количество учебных дней Школы (не обязательно полных), на которых присутствовал школьник.

Устные задачи сдаются на занятии до разбора (после занятия можно сдавать неразобранные задачи). Письменные задачи записываются на «Сдаче задач» или после пар; задача, решенная *на олимпиаде на* «+» *или* «+.», засчитывается за письменную, а остальные решенные задачи с олимпиад засчитываются как устные [6]. Хотя школьники имеют право сдавать устные и письменные задачи в любой момент до отбоя любому преподавателю, который согласится их принимать, НЕ рекомендуется уделять решению задач много времени вне занятий.

Примерно к середине школы (конкретная дата объявляется в начале Школы) нужно сдать *промежуточный зачет*, т. е. сдать

1) $[4M_1/3]$ письменных задач (из выдаваемых на каждом занятии);

2) еще две устные задачи по каждому занятию, кроме сдачи задач (СЗ) и олимпиад (О);

3) еще $[5M_1/2]$ устных задач.

Здесь M_1 — количество учебных дней Школы (не обязательно полных), на которых присутствовал школьник до времени сдачи промежуточного зачета.

Это необходимо для продолжения обучения на второй половине Школы для всех, кроме 8-классников, впервые приехавших в Школу [7].

Успехи в Школе учитываются при приглашении в следующие Школы (а также на некоторые другие мероприятия). В частности, школьник, сдавший зачет с отличием, автоматически приглашается в одну следующую Школу и рекомендуется к другим поощрениям [8], а школь-

---

[6] Письменные решения нужно записывать настолько ясно, чтобы текст было не стыдно опубликовать. ОФОРМЛЕНИЕ ПИСЬМЕННЫХ ЗАДАЧ: каждую письменную задачу надо записывать на отдельном листке; подписывая листок, нужно указать фамилию, название группы, тему занятия (см. расписание) число и номер пары, когда задана задача, номер задачи.

[7] Мы уверены, что это требование не приведет к отправлению школьников домой после первой половины Школы (хотя мы с огромным сожалением готовы это сделать), а облегчит им своевременную сдачу зачета за всю Школу.

[8] Независимо от его успехов на олимпиадах; если приглашение в следующую Школу им отклонено, то в дальнейшие Школы он приглашается по обычному конкурсу.

ник, не сдавший зачета, не может быть приглашен в одну следующую Школу [9] и (до досдачи зачета) получить другое поощрение. Поэтому зачетные требования составлены так, чтобы каждому участнику Школы было нетрудно их своевременно выполнить. А значит, чтобы получить полный эффект от выездной школы, полезно сдавать задач побольше и посложнее (чем нужно на зачет), а также решать и сдавать задачи из материалов Школы после ее окончания.

Приложение: правила для участников Школ

— Любое распоряжение руководителей Школы должно выполняться неукоснительно. Людей (в т. ч. взрослых), дающих вам противоположные распоряжения, нужно вежливо направлять к руководителям Школы.

— Купание участников Школы (в реке или бассейне) разрешается ТОЛЬКО в сопровождении руководителей Школы.

— Выход участников Школы за пределы территории происходит ТОЛЬКО с разрешения руководителей Школы до четко определенного времени в четко определенное место.

— Участникам Школы запрещено употребление спиртных напитков (в том числе пива).

— В случае возникновения любых медицинских проблем участникам Школы нужно немедленно сообщить о них руководителям Школы. Это нужно сделать даже после самостоятельного обращения в медпункт.

— Соблюдайте тишину во время самостоятельного решения задач на занятиях. Если вам нужно обсудить задачи с одногруппником, то с разрешения преподавателя можно сделать это в коридоре.

Приложение: ориентировочное расписание дня Школ

8.40–9.00	Зарядка (для желающих)
9.00–9.20	Завтрак
9.30–11.20	1-я пара (с перерывом)
11.40–13.30	2-я пара (с перерывом)
13.30–14.00	Обед
14.30–16.00	Футбол, волейбол на улице
16.00–17.00	Купание в бассейне (для желающих)
17.10–19.00	3-я пара (с перерывом); не всегда — см. расписание
19.00–19.20	Ужин

20.00 Кино; не всегда — см. по настроению.

[9] Ни в качестве ученика, ни в качестве преподавателя; независимо от его успехов на олимпиадах; если он все-таки сдаст зачет позже, то в дальнейшие Школы он приглашается по обычному конкурсу.

14.00–22.40 (кроме 3-й пары) свободное время, запись задач, спорт, чай, музыка, кино...

22.40 Тихое время. К этому моменту все собрания должны заканчиваться, а после этого момента все желающие спать должны иметь такую возможность. Участникам Школы не разрешается перемещение между комнатами, слышимый извне шум в комнатах, песнопения или игры в холлах.

23.00 Отбой (выключается свет в комнатах).

Приложение: подтверждение участия школьниками

Сразу после получения приглашения в Школу школьник должен подтвердить это получение (и сообщить координаты для срочной и надежной связи с ним).

Не позже чем 1 октября для осенней школы, 1/30 марта для весенней школы (для приглашенных в январе/марте) **и 28 мая для летней школы** (а желательно и раньше) школьник должен лично сообщить о своем желании или нежелании участвовать в Школе (даже если он НЕ собирается участвовать). И то, и другое нужно сделать либо **на кружке «Олимпиады и математика»** (`www.mccme.ru/circles/oim`), либо **по адресу** `skopenko@mccme.ru`, либо **запиской для А. Б. Скопенкова по телефону (499)241-12-37**. Если ответ школьника не будет получен в указанное время указанным способом, то его приглашение аннулируется. Личное подтверждение школьником участия в Школе необходимо, поскольку подразумевает *добровольность* участия и *обязательство* соблюдать правила Школы — в частности, сдать по ней зачет в указанный срок. Школьник может приехать только на часть Школы (о чем нужно заранее договориться с А. Б. Скопенковым).

Приложение: рекомендации учителей математики

Учитель математики или руководитель кружка может, внимательно ознакомившись с информацией о Школах, рекомендовать к участию в Школе своего ученика.

Мы с удовольствием приглашаем также кандидатов в команду России на Международную олимпиаду по математике, проживающих вне Москвы и рекомендованных своими учителями. При этом финансовые вопросы решаются учителем с И. В. Ященко (`ivan@mccme.ru`). Рекомендация предполагает моральную ответственность рекомендателя за соблюдение учеником правил Школы и своевременную сдачу им зачета в указанный срок. Поэтому мы просим рекомендателей внимательно прочитать весь этот текст, порешать со своим учеником несколько задач из материалов прошлых школ (`www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm`; эти задачи ученик может также посдавать на кружке «Олимпиады и математика»), а также посмотреть критерии приглашения учеников без рекомендаций (`www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm`). Если вы рекомендуете *нескольких* школьников, то, пожалуйста, расставьте ваши приоритеты (кого в первую очередь, кого — во вторую, и т. д.).

Мы серьезно относимся ко всем рекомендациям, но не можем пригласить всех рекомендованных ввиду ограниченности числа мест: в одну Школу приглашается по рекомендации не более четырех школьников со всей Москвы. Мы сообщаем рекомендателю и ученику наше решение о приглашении или отказе не позже чем за неделю до Школы (а по возможности и раньше). Каждый школьник может быть приглашен *по рекомендации* не более одного раза (при этом тот же школьник может быть приглашен *по конкурсу* сколько угодно раз).

Рекомендации вместе с электронными адресами и телефонами рекомендуемых нужно сообщить **не позже чем 1 октября для осенней школы, 15 марта для весенней школы и 28 мая для летней школы** (а желательно и раньше) либо **по адресу** `skopenko@mccme.ru`, либо **запиской для А. Б. Скопенкова по телефону (499)241-12-37**. К сожалению, мы не можем гарантировать рассмотрение рекомендации, полученной позже или другим способом. Рекомендованный школьник должен подтвердить свое желание участвовать в Школе **в те же сроки и тем же способом**, что и приглашаемые без рекомендаций школьники (см. выше). Если ответ школьника не будет получен в указанное время указанным способом, то он не будет приглашен.

Приложение: расписание Школ

В левой колонке отмечены день и номер пары. СЗ:=Сдача задач. О:=Отдых. П:=Пермяков. С:=А. Скопенков. Т:=А. Трепалин.

Фамилии школьников, получивших зачет с отличием, начиная с осени 2005 г., выделены курсивом.

ШКОЛА 7-11.04.04

	9 класс	**10 класс**	**11 класс**
7-2	Спиридонов (инверсия)	Мазин (графы)	Шень (комби-вероят.)
7-3	Мазин (графы)	Шень (коды)	С (компл.числа)
8-1	Дориченко (многочл.)	Мощевитин (геом.чисел)	Кудряшов (асимптотики)
8-2	Мощевитин (геом.чисел)	С (комплекс.)	Дориченко (многочлены)
8-3	СЗ	СЗ	Мощевитин (геом.чисел)
9-1	Галочкин (числа)	Ященко (разное)	Кожевников (класс.геом.)
9-2	Кожевников (клгеом.)	Галочкин (числа)	Спивак (числа Каталана)
9-3	Спивак	СЗ	СЗ
10-1	С (нерав.)	Спиридонов (инверсия)	М. Скопенков (комстере)
10-2	Кудряшов (комгеом)	М. Скопенков (комстере)	Спиридонов (проектив)
10-3	СЗ	СЗ	СЗ
11-1	С (геоминтер)	Олимпиада	Спивак (линейность)
11-2	Спивак (конич.сеч.)	по геометрии	С (геоминтер)

ШКОЛА 16–21.10.04

	группа X	группа Y
16-2	Прасолов (Фибоначчи)	Вялый (графы)
16-3	Вялый (графы)	Прасолов (Фибоначчи)
17-1	Богданов (комби)	Скопенков (т.чисел)
17-2	Берштейн (неравенства)	Богданов (произв.ф.)
17-3	СЗ Кудряшов, Карпенков	СЗ Акопян, Берштейн, Гарбер
18-1	Олимпиада	Заславский (проектив)
18-2	Заславский (геом)	Акопян (эллипсы)
18-3	СЗ Кудряшов, Челноков	СЗ Акопян, Заславский
19-1	Челноков (комби)	Олимпиада
19-2	С (рисование)	Челноков (линейность)
19-3	СЗ Челноков	СЗ Куюмжиян, С
20-1	Конягин (числа)	Семенов (рекуррентности)
20-2	Семенов (выпуклость)	Конягин (простота)
20-3	О	СЗ Куюмжиян
21-1	Куюмжиян (комбинаторика)	С (рисование)
21-2	Глазырин (геометрия)	Гарбер (комгеом)
21-3	СЗ Глазырин	СЗ Гарбер Кудряшов

Группа X: Гайдук Роман, Ерпылев Алексей, Козлов Иван, Колчин Илья, Корнаков Илья, Котов Андрей.

Группа Y: Гусаков Алексей, Девятов Ростислав, Ефимов Александр, Зыков Анатолий, Кондакова Анна, Мироненко-Маренков Антон, Москва Владимир, Осиненко Антон, Петров Андрей, Стрелкова Наталья, Тестов Владимир.

ШКОЛА 4–10.04.05

	группа X (202)	**группа Y (701)**	**группа Z (204)**
4-2	Глазырин (диофур)	Дориченко (многочл)	Кожевников (ком геом)
4-3	Кожевников (ком геом)	Глазырин (геом1)	Дориченко (многочл)
5-1	С (графы)	Райгородский (комби1)	Колосов (диофур)
5-2	Горский (числа)	Колосов (уравнения)	Райгородский (вероят)
5-3	СЗ (С)	СЗ (Горский)	СЗ (Горский)
6-1	Пермяков (комби счет)	Шнурников (комби2)	СЗ (С)
6-2	Иванова (ф-ла Пика)	Пермяков (таблицы)	Шнурников (оценки)
6-3	СЗ (Иванова)	СЗ (Федоров)	Ол.геом. (С)
7-1	Куюмжиян (геом1)	Шень (логика)	Ященко (множества)
7-2	Федоров (алгебра)	Куюмжиян (геом2)	Шень (логика)
7-3	О	СЗ (Федоров)	СЗ (Шень)
8-1	С (комби)	Спиридонов (нер-ва)	М.Скопенков (цел.реш.)
8-2	Спиридонов (нер-ва)	М. Скопенков (многочл)	Федоров (линейно)
8-3	СЗ (Спиридонов,С)	СЗ (Федоров)	СЗ (Вялый,М.Скоп.)
9-1	С (построения)	Заславский (геом3)	Вялый (симногочл)
9-2	Заславский (геом2)	Вялый (симногочл)	Федоров (группы)
9-3	СЗ (Спиридонов)	СЗ (Федоров,М.Скоп.)	СЗ (Заславский)
10-1,2	Олимпиада	мехмата МГУ	Спивак (геом)
10-3	О	О	СЗ (С)

Группа X: Арутюнов, Чмутин, Лаут, Пахомов, Рогожников, Махлин, Янушевич, Ерпылев, Лысов (куратор Скопенков).

Группа Y: Захаров, Климовский, Козлов, Печенкин, Пономарева, Устиновский, Киселев, Илюхина (куратор Федоров).

Группа Z: Абрамов, Девятов, Ефимов, Мироненко-Маренков, Трепалин, Родионов, Баранов, Корнаков, Оганесян.

ШКОЛА 19–26.07.05

Знак равенства означает, что в разных группах проходили занятия по одной теме.

	группа X	**группа Y**
19-3	С (комби-1)	=Кудряшов (комби-1)
20-1	Блинков (геом-1)	Бурман (гиперкуб)
20-2	Блинков (геом-2)	Кудряшов (числа-1)
20-3	Кудряшов (числа-1)	Акопян (ось)
21-1	Акопян (хелли)	Акопян (хелли)
21-2	Протасов (геом.)	=Блинков (геом.)
21-3	О	Доценко (пр. числа)
22-1	С (комби-2)	=Кудряшов (комби-2)
22-2	Акопян (инверсия)	Блинков (геом-1)
22-3	Акопян (комгеом)	Городенцев (коники)
23-1	Акопян (изогон)	Блинков (геом-2)
23-2	Кудряшов (нер-ва)	Акопян (комб.геом.)
24-1	С (комби-3)	=Кудряшов (комби-3)
24-2	Кудряшов (числа-2)	Блинков (геом-3)
24-3	Акопян (не геом.)	Бугаенко (прогресс)
25-1,2	Письменная	олимпиада
26-1	Акопян (разб, не геом.)	Шень (не геом.)
26-2	Блинков (не геом)	Кудряшов (не геом.)

Группа X: Андреев, Воинов, Окунев, Савин, Стаценко, Трегубова, Шанин, Щепин, Шишонкова.

Группа Y: Арутюнов, Боярченкова, Янушевич, Чмутин, Осипов, Селегей, Ткачев.

ШКОЛА 27.10–5.11.05

	гр. Весны 501	гр. Лета 701	гр. Зимы 702
27-3	П (подсчет)	С (построения)	С (построения)
28-1	С (нер-ва)	Храбров (нер-ва1)	П (орграфы)
28-2	П (рамсей)	Куликов (индграфы)	Храбров (нер-ва1)
28-3	Куликов (Холла)	Храбров (нер-ва2)	П (орграфы)
29-1	С (нер-ва)	Куликов (Холла)	Храбров (нер-ва2)
29-2	СЗ (Куликов)	СЗ (Ефимов)	Заславский (коники1)
29-3	Куюмжиян (цмасс)	Заславский (проект)	СЗ (Ефимов)
30-1	Куюмжиян (цмасс)	Заславский (коники1)	Храбров (нер-ва3)
30-2	СЗ (Куюмжиян)	Храбров (нер-ва3)	СЗ (Ефимов)
30-3	Блинков (постр)	СЗ (Ефимов)	Заславский (коники2)
31-1	Олимпиада	Олимпиада	Блинков (тетраэдр)
31-2	Олимпиада	Олимпиада	Кожевников (клгео)
31-3	О	О	СЗ (Кожевников)
1-1	Блинков (площади)	Кожевников (клгеом)	Олимпиада
1-2	Разбор, СЗ (Блинков)	Кожевников (клгеом)	Олимпиада
1-3	С (уравнения)	Разбор, СЗ (П)	О
2-1	Ященко (непрер)	Т (впис4-к)	Олимпиада
2-2	Астахов (гомот)	СЗ (Т)	Олимпиада
2-3	СЗ (С), О	Гаврилюк (вписокр)	О
3-1	С (уравнения)	Олимпиада	Гаврилюк (двойные)
3-2	Гаврилюк (Карно)	Олимпиада	Пастор (блоки)
3-3	СЗ (Гаврилюк)	О	СЗ (Пастор, П)
4-1	Олимпиада	Богданов (многочл)	Пастор (клетки)
4-2	Олимпиада	Пастор (блоки)	Богданов (гауссовы)
4-3	О	СЗ (Богданов)	СЗ (Пастор, П)
5-1	С (квадр.вычеты)	Пастор (клетки)	М. Скопенков (решетки)
5-2	М. Скопенков (игры)	С (перв.корни)	Богданов (алгебра)
5-3	СЗ (П)	СЗ (Пастор)	СЗ (М. Скопенков)

Группа Весны. (куратор А. Скопенков) *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей, Котельский Артем, Пантелеев Никита, Савин Арсений, Стаценко Максим.

Группа Лета. Арутюнов Владимир, Богатый Иван, Колчин Илья, *Котов Андрей, Лаут Илья, Осипов Илья, Пантелеев Дмитрий,* Пахомов Федор, *Чмутин Георгий*, Янушевич Леонид.

Группа Зимы. (куратор Д. Пермяков) Баранов Дмитрий, Девятов Ростислав, Киселев Александр, Лысов Михаил, *Илюхина Мария,* Пономарева Елизавета.

ШКОЛА 6–16.04.06

	гр. Жести 701	гр. Бронзы 702	гр. Стали 703
6-2	Кудряшов (лин.алг.)	Протасов (треуг.)	Райгородский (ком.геом.)
6-3	Протасов (треуг.)	Кудряшов (лин.ал.)	Райгородский (ком.геом.)
7-1	Горский (алгебра)	Протасов (треуг.)	Кудряшов (лин.комб.)
7-2	Протасов (треуг.)	Пермяков (множ.)	Кудряшов (лин.комб.)
7-3	СЗ (Горский)	СЗ (С)	СЗ (П)
8-1	Куюмжиян (графы)	П (множества)	СЗ (Ефимов)
8-2	Куюмжиян (графы)	С (комби)	Прасолов (геом.уср.)
8-3	СЗ (Куюмжиян)	СЗ (Ефимов)	Прасолов (прав.кр.)
9-1	Олимпиада	Олимпиада	Шнурников (доп.постр.)
9-2	мехмата МГУ	мехмата МГУ	Шнурников (геом.нер.)
9-3	О	О	СЗ (Шнурников)
10-1	Нетай (ком.геом)	С (комби)	Т (кл.геом.)
10-2	Нетай (ком.геом)	Ефимов (алгебра)	СЗ (Т)
10-3	СЗ (Нетай)	СЗ (Ефимов)	О
11-1	Т (движения)	Олимпиада	Олимпиада
11-2	СЗ (Ефимов)	Олимпиада	Олимпиада
11-3	О	О	Богданов (ширина)
12-1	Олимпиада	Богданов (ком.геом)	Голованов (числа)
12-2	Олимпиада	Богданов (ком.геом)	СЗ (Голованов)
12-3	Горский (алгебра)	СЗ (С)	О
13-1	Шнурников (констр.)	Голованов (числа)	Райгородский (комби)
13-2	Шнурников (инвар.)	СЗ (Голованов)	Райгородский (комби)
13-3	О	О	СЗ (Райгородский)
14-1	Олимпиада	С (лин.ал.)	Голованов (числа)
14-2	Олимпиада	СЗ (Горский)	Голованов (числа)
14-3	СЗ (Горский)	Голованов (числа)	О
15-1	Ефимов, С (числа)	Олимпиада	СЗ (Голованов)
15-2	СЗ (Ефимов)	Олимпиада	Голованов (многочл)
15-3	О	О	Голованов (многочл)
16-1	Астахов (кл.геом)	Гаврилюк (кл.геом)	Олимпиада
16-2	СЗ (Астахов)	Гаврилюк (кл.геом)	Олимпиада
16-3	О	СЗ (Ефимов)	СЗ (Гаврилюк)

Группа Жести. *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей, *Котельский Артем, Окунев Алексей, Чекалкин Серафим,* Царьков Олег, Янушевич Леонид.

Группа Бронзы. *Арутюнов Владимир,* Казначеев Андрей, *Колосов Андрей, Осипов Илья,* Пантелеев Дмитрий, Рогожников Алексей, Чмутин Георгий.

Группа Стали. Буфетов Алексей, Девятов Ростислав, *Илюхина Мария, Корнаков Илья, Махлин Игорь,* Печенкин Николай, Пономарева Елизавета, Стеблюк Дмитрий.

ШКОЛА 57 ШКОЛЫ И КОМАНДЫ МОСКВЫ, 20–26.07.06

	Δ	Е
20-3	Гаврилюк, С (комби)	Кустарев (то же)
21-1	С, Гаврилюк (Ферма)	то же
21-2	Ландо, Гаврилюк (графы)	то же
21-3	Блинков, Кустарев (движения)	то же
22-1	Блинков, Кустарев (подобия)	то же
22-2	СЗ (Гаврилюк, С)	то же (Кустарев)
22-3	Буфетов, Гаврилюк (вероятность)	то же
23-1	Канель-Белов (перв. корни)	Анисов (политика)
23-2	С (квадр. вычеты)	СЗ
23-3	О	Федоров (Пифагор)
24-1	Блинков, Кустарев (треугольник)	то же
24-2	Скопенков (перв. корни)	Анисов (неравенства)
24-3	СЗ (Гаврилюк, С)	Канель-Белов
25	Олимпиада	то же
26-1	Канель-Белов (вырождение)	Анисов, Гавр., Куст. (графы)
26-2	Лифшиц (криптография)	С (квадр. вычеты)

Группа Δ. *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Головко Александр, Демехин Михаил, Ерпылев Алексей, *Котельский Артем,* Окунев Алексей, Пуртов Дмитрий, Ромаскевич Елена, Удимов Даниил, Янушевич Леонид.

Группа Е. Блинов Андрей, Палазник Николай, Панов Глеб, Савин Арсений, Стаценко Максим, Токмаков Петр, Цветков Максим, Шанин Иван, Щепин Константин.

ШКОЛА 4–12.11.06

	гр. Бури У203	гр. Урагана У206	гр. Тайфуна У215
4-2	Девятов (нерав)	Гарбер (графы)	Кожевников комгеом
4-3	П (графы)	Гарбер (графы)	Кожевников комгеом
5-1	Блинков (площади)	Кожевников циклич	Заславский (геом)
5-2	Блинков (экстргеом)	Кожевников констр	Заславский (геом)
5-3	П (СЗ)	Кожевников (СЗ)	Заславский (СЗ)
6-1	Олимпиада	Блинков экстргеом	М.Скопенков неевкл
6-2	М04-10	Блинков площади	М.Скопенков неевкл
6-3	М.Скопенков разбор	Блинков (СЗ)	С (СЗ)
7-1	М.Скопенков игры	Олимпиада	Олимпиада
7-2	М.Скопенков инвар	М04-10	М04-11, СБ00-I1
7-3	С (СЗ)	Колюцкий разбор	Скопенковы разбор
8-1	Колюцкий (ц.дроби)	Конягин (простота)	Олимпиада
8-2	Колюцкий (ц.дроби)	Конягин (простота)	М89-10, СБ00-I2
8-3	Колюцкий (СЗ)	Перепечко (СЗ)	Конягин (комгеом)
9-1	Олимпиада	Т пргеом	Шень (логика)
9-2	М03-10	Т клгеом	Шень (логика)
9-3	Ефимов, Т разбор	Перепечко (СЗ)	Перепечко, П разбор
10-1	Гаврилюк массы	Олимпиада	Ефимов кр.многоч
10-2	Гаврилюк вписан	М02-10	Ефимов непостр
10-3	Гаврилюк (СЗ)	Ефим.Треп. разбор	Терешин (стерео)
11-1	С (нерав)	Акопян (комгеом)	Шнурников прмног
11-2	П (графы)	Акопян (СЗ), О	Шнурников прмног
11-3	О	Козлов (числа)	Шнурников (СЗ)
12-1	С (рисование)	Берштейн многочл	П (орграфы)
12-2	Абрамов (бином)	Берштейн нерав	Козлов (числа)
12-3	Абрамов (СЗ)	Берштейн (СЗ)	С (СЗ)

Группа Бури. *Асавкин Дмитрий,* Берсенев Никита, Демехин Михаил, Марченко Евгений, *Ромаскевич Елена,* Удимов Даниил.

Группа Урагана. *Андреев Михаил, Воинов Андрей, Ерпылев Алексей,* Котельский Артем, *Окунев Алексей,* Янушевич Леонид, Сысоева Люба.

Группа Тайфуна. Антонов Артем, Арутюнов Владимир, *Колосов Андрей, Митрофанов Иван, Осипов Илья,* Чмутин Георгий.

ШКОЛА 31.3–12.4.07

	гр. Орла 701	**гр. Тельца 702**	**гр. Льва 703**
31-1	П графы	Сендеров числа	Райгородский кгеом1
31-2	П суммирование	Райгородский кгеом1	Сендеров анализ
1	Олимп. по геом.	школа 444	начало в 10.30
2-1	Куюмжиян углы	С графы	Богданов комби1
2-2	Куюмжиян комби	Пономарева числа	Богданов комби2
2-3	П СЗ	Пономарева СЗ	С СЗ
3-1	Пономарева числа	Канель-Белов линейность	Райгородский кгеом2
3-2	Пономарева СЗ	Райгородский кгеом2	П СЗ
3-3	О	П СЗ	Алексей числа
4-1	С геом пре1	Девятов числа	Яковлевич числа
4-2	Баранов клетки	Девятов СЗ	Т СЗ
4-3	Баранов СЗ	О	О
5-1	Кудряшов квычеты	Олимпиада	Канель-Белов
5-2	Кудряшов нер-ва	Всер-2003-1	Т СЗ
5-3	П СЗ	Ефимов разбор	Гаврилюк клгеом
6-1	Олимпиада	Гаврилюк клгеом	Олимпиада
6-2	Всер-2002-1	Гаврилюк клгеом	Всер-2002-2
6-3	П разбор	Гаврилюк СЗ	Ефимов разбор СЗ
7-1	Олимпиада	Шнурников комби	Ефимов анализ
7-2	Всер-2002-2	Шнурников комби	Канель-Белов максим
7-3	П разбор	Шнурников СЗ	Ефимов СЗ
8-1	Шнурников СЗ	Ефимов анализ	С прос.движения
8-2	С геом пре2	Шнурников СЗ	Канель-Белов
8-3	С геом пре3	A. Ya. Belov графы	Ефимов СЗ

9-12 апреля, 1 и 2 пары. Самостоятельное решение задач.

9-12 апреля, 13.30-17.30, ауд. 206 МЦНМО. СЗ.

Группа Орла. *Аристова Анастасия,* Блинов Андрей (3-7.04), Мельничук Павел, Савчик Алексей, *Царьков Олег, Кондакова Елизавета, Ивлев Федор,* Василенко Артем, Наумов Владислав, Рухович Филипп.

Группа Тельца. Ромаскевич Елена, *Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей (7-8.4), *Окунев Алексей,* Янушевич Леонид, Токмаков Петр, Каниськин Сергей, Авилов Артем, Тихонов Юлий, *Погудин Глеб* (31.3, 3-4.4), *Омельяненко Виктор.*

Группа Льва. *Андреев Михаил,* Ерпылев Алексей (31.3-6.4), *Арутюнов Владимир, Илюхина Мария,* Колосов Андрей, Лысов Михаил, Митрофанов Иван, Осипов Илья, *Погудин Глеб* (1,2, 5-8.4), Чмутин Георгий.

ШКОЛА 10–19.07.07

	гр. Неба	**гр. Земли**
10-2	Б окружн1	С Ферма1
10-3	П комби1	Шнурников комби
11-1	Б окружн2	П игры
11-2	П СЗ	Б площади
11-3	Рубанов движения	Шнурников СЗ
12-1	С лин ур	Б построения
12-2	П СЗ	С Ферма2
12-3	О	Шнурников СЗ
13-1	П игры	Олимпиада
13-2	С ферма1	Олимпиада
13-3	П СЗ	О
14-1	Олимпиада	Б движения
14-2	Олимпиада	С квадр выч1
14-3	О	Шнурников СЗ
15-1	Б постр1	Шнурников комби3
15-2	Б постр2	Шнурников СЗ
15-3	П СЗ	О
16-1	П плоск графы	Б геом экстрим1
16-2	С ферма2	Б геом экстрим2
16-3	О	Шнурников СЗ
17-1	П графы	Олимпиада
17-2	С кв вычеты	Олимпиада
17-3	П СЗ	О
18-1	Олимпиада	Шабат Каталан1
18-2	Олимпиада	С квадр выч2
18-3	О	С, Шнурников СЗ
19-1	Аржанцев комгеом	Шабат Каталан2
19-2	П, Осипов СЗ	С, Шнурников СЗ

Группа Неба. Артемьева Галина, Воеводский Григорий, Козачинский Александр, Капицын Максим, *Никита Левин, Николай Лысенко,* Матушко Мария, *Николаев Семен, Покровский Федор,* Шишонков Сергей.

Группа Земли. Аристова Анастасия, Наумов Владислав, Рухович Филипп, Савчик Алексей, *Царьков Олег, Кондакова Елизавета,* Блинов Андрей, *Медведь Никита.*

ШКОЛА 28.10–5.11.07

Вэнь играл на лютне, мастер Куан отбивал такт тростью,
а Хуэй-цзы [пел или читал нараспев и] опирался о платан.

Чжуан-цзы

	гр. Лютни У701	**гр. Трости У703**	**гр. Платана У703**
29-1	П (множества)	С (алгебра-1)	М.Скопенков (реш.)
29-2	П (графы)	М.Скопенков (реш.)	Абрамов (числа)
29-3	П (СЗ)	М.Скопенков (СЗ)	Абрамов (СЗ)
30-1	П (алкомби)	Кожевников (пр.крайн.)	М.Скопенков (реш.)
30-2	Кожевников (гомот.)	М.Скопенков (реш.)	С (алгебра)
30-3	О	Т (СЗ)	П (СЗ)
31-1	П (вкл.-искл.)	Кожевников (пов.гом.)	Шнурников (комби-1)
31-2	Кожевников (пов.гом.)	Т (алгебра-2)	Шнурников (комби-2)
31-3	П (СЗ)	О	Шнурников (СЗ)
1-1	Олимпиада	Олимпиада	Олимпиада
1-2	М-98 (8–11)	В-98 (9–11)	Сб-03-1
1-3	П, С (разбор, СЗ)	Т (разбор, СЗ)	Шнурников (разбор, СЗ)
2-1	С (рисование)	Акопян (комгеом)	Олимпиада
2-2	П (рекурренты)	Акопян (комгеом)	В-98 (10–11) Сб03-3
2-3	П (СЗ)	Акопян (СЗ)	Шнурников (разбор)
3-1	Олимпиада	С (Descartes)	Протасов (комгеом)
3-2	М-02 (8–9)	Протасов (геом.тре.)	Заславский (Poncelet)
3-3	Т (разбор)	$(T/2 + O/2)$	Заславский (СЗ)
4-1	Гаврилюк (СЗ)	Олимпиада	Заславский (Poncelet)
4-2	Ященко (трехчлен)	В-98-II (9) М-02 (10)	Шнурников (комби-3)
4-3	О	Гаврилюк (разбор)	О
5-1	Астахов (клгеом)	Гаврилюк (клгеом)	Шнурников (комби-4)
5-2	Гаврилюк (клгеом)	С (неравенства)	Астахов (клгеом)
5-3	Астахов, П (СЗ)	Гаврилюк, С (СЗ)	Шнурников (СЗ)

Группа лютни (8–9 классы, куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков). *Макаров Даниил,* Поволоцкий Михаил, Устинов Даниил, *Миронов Михаил,* Ерофеев Владислав, Тельпуховский Иван, *Козачинский Александр,* Воеводский Григорий, Артемьева Галина.

Группа трости (9–10 классы; куратор и ответственный за отбой А. Трепалин). Блинов Андрей, *Медведь Никита. Ивлев Федор,* Таранникова Катерина, Рухович Филипп, Николаев Семен, Матушко Мария, *Суханов Лев. Радонец Алексей.*

Группа платана (10–11 классы; куратор и ответственный за отбой И. Шнурников). Царьков Олег, Кондакова Елизавета. *Омельяненко Виктор, Андреев Михаил, Воинов Андрей, Окунев Алексей, Ромаскевич Елена.*

ШКОЛА 5-12.04.08

	гр вереска 602	гр ивы 701	гр полыни 212
5-1 **5-2** **5-3**	Пономарева Эйлер П комби-1 СЗ П, М.Скопенков	С числа Т пргеом СЗ Т	Буфетов симногочл Буфетов диаЮнга СЗ Пономарева
6-1 **6-2** **6-3**	П комби-2 Буфетов симногочл О	Буфетов симногочл Т неравенства СЗ Т, М.Скопенков	Девятов, С гауссовы Девятов Ферма СЗ Пон., Сафин
7-1 **7-2** **7-3**	П комби-3 Пономарева Китай СЗ П	М.Скопенков Берлов геом-1 О/2+СЗ/2 С	Берлов геом-1 С суммирование СЗ Пономарева
8-1 **8-2** **8-3**	С инверсия Берлов геом О (СЗ П, Арутюнов)	Олимпиада Олимпиада О (СЗ Т)	Берлов геом-2 Канель-Белов комби-1 О (СЗ Пономарева)
9-1 **9-2** **9-3**	Олимпиада Олимпиада СЗ П, Чмутин	Райгородский комге Берлов геом-2 СЗ Т	Берлов геом-3 Райгородский комге Райгородский комге
10-1 **10-2** **10-3**	С уравнения Блинков геом О	Блинков геом Берлов графы-1 О	Берлов графы Канель-Белов комби-2 О
11-1 **11-2** **11-3**	П комби-4 Абрамов Диофант СЗ П, Чмутин	Берлов графы-2 Берлов геом-3 СЗ Т	Олимпиада Олимпиада СЗ Абрамов
12-1 **12-2** **12-3**	Куюмжиян оруглы СЗ П О (СЗ П, Чмутин)	Канель-Белов комби СЗ Куюмжиян О (СЗ Куюмжиян)	СЗ Абрамов Канель-Белов геом О (СЗ С, Абрамов)

12-3. Доклад А. Окунева «Число частей в разбиении плоскости прямыми» для всех желающих среди сдавших зачет. Руководитель семинара А. Канель-Белов.

Занятия А. Канеля-Белова с частью группы полыни: 8-1, 9-1, 11-1, 11-2.

Группа вереска (куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков). *Бурова Ольга*, Ерофеев Владислав, Тельпуховский Иван, Алымов Георгий, Макаров Даниил, Миронов Михаил, *Калиниченко Иван*, *Козачинский Александр*, Тужилин Михаил, Николай Лысенко, *Калашник Анна*, *Тренин Кирилл*,

Группа ивы (куратор и ответственный за отбой А. Трепалин). Блинов Андрей, *Медведь Никита*, Ивлев Федор, Николаев Семен, Радонец Алексей, Рухович Филипп, Суханов Лев, Гусев Алексей, *Ярославцев Иван*, *Немиро Владислав*.

Группа полыни (куратор и ответственный за отбой А. Скопенков). *Брагин Владимир*, *Воробьев Илья*, Царьков Олег, *Кондакова Елизавета*, Андреев Михаил, Воинов Андрей, Котельский Артем, Нилов Федор, Пуртов Дмитрий, Окунев Алексей, Ромаскевич Елена, Чекалкин Серафим, Янушевич Леонид.

ШКОЛА 21-29.04.08

	Группа парчи	**Группа шелка**
21-1	П (графы)	Т (многочлены)
21-2	С (диофур)	П (логика)
21-3	П (СЗ)	Т (СЗ)
22-1	П (игры)	С (компл суммы)
22-2	С (диофур)	Т (инверсия-1)
22-3	О	О
23-1	П (инварианты)	Ю.Блинков (окружности)
23-2	Ю.Блинков (окружности)	С (компл геом)
23-3	С (СЗ)	Т (СЗ)
24-1	Ю.Блинков (вневписанная-1)	П (логика)
24-2	С (целые точки)	Ю.Блинков (вневписанная)
24-3	О	О
25-1	С (Fermat)	Ю.Блинков (произволовщина)
25-2	Ю.Блинков (вневписанная-2)	Абрамов (линейность-1)
25-3	С, П (СЗ)	Т, Абрамов (СЗ)
26-1	Олимпиада М03-9	С (компл разлож)
26-2	Олимпиада М04-10	П (выборы)
26-3	П (СЗ)	Т (СЗ)
27-1	Т (вписанные-1)	П (графы)
27-2	С (Fermat)	Абрамов (линейность-2)
27-3	О	О
28-1	П (графы-2)	Олимпиада М04-10
28-2	Т (вписанные-2)	Олимпиада В04-10
28-3	О	П (Эрроу) / Т (СЗ)
29-1	П (подсчеты)	Т (инверсия-2)
29-2	П, С (СЗ)	Т, Абрамов (СЗ)

Группа шелка (куратор и ответственный за отбой А. Трепалин): *Калиниченко Иван*, Козачинский Александр, Левин Никита, Лысенко Николай, *Медведь Никита*, Николаев Семен, *Покровский Федор*.

Группа парчи (куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков): *Бурова Ольга*, Гришина Юля, Гурьянов Алексей, *Домбровский Андрей*, Корецкая Вера, Поволоцкий Михаил, *Рухович Алексей*, *Рухович Данила*, Яфракова Ольга.

ШКОЛА 10-19.11.08

	группа рыбы 701	**группа птицы 502**	**группа зверя 601**
10-1	С уравнения	Т (многочл-1)	Арутюнов (разбиен)
10-2	Арутюнов (комби)	С (квычеты)	Т (многочл-1)
11-1	С уравнения	Т (многочл-2)	Арутюнов (разбиен)
11-2	Арутюнов (комби)	С (квычеты)	Т (многочл-2)
11-3	СЗ(Арутюнов)	СЗ (С)	СЗ (Т)
12-1	Олимпиада	Олимпиада	Олимпиада
12-2	ВМО05-1	ММО05	Сборы04-1
12-3	О	О	О
13-1	М.Скопенков (разре)	Горинов (графы)	Ол ВМО05-11-2
13-2	Сафин (комби)	М.Скопенков (разре)	Сб04-2,ММО04-11
13-3	СЗ (Сафин)	СЗ (Есин)	СЗ (Т)
14-1	С компл-1	Ол ВМО05-10-2	М.Скопенков (разре)
14-2	М.Скопенков (разре)	ММО04-11	Нетай (графы)
14-3	О	О	СЗ (Т)
15-1	Ол ВМО05-10-2	М.Скопенков (комб)	Заславский (компл)
15-2	ММО01-9,10	Заславский (геом)	М.Скопенков (многог)
15-3	О	СЗ (Есин)	О
16-1	Гаврилюк (клгеом)	М.Скопенков (комб)	Заславский (компл)
16-2	Нилов (гармони4)	Заславский (геом)	Гаврилюк (коники)
16-3	О	О	СЗ (Т, Нетай)
17-1	Есин (клгеом)	Нилов (гармони4)	Токарев (числа)
17-2	Нилов (гармони4)	Токарев (монеты)	Т (клгеом)
17-3	СЗ (Нетай)	СЗ (Есин, Нилов)	СЗ (Т)
18-1	С компл-2	Токарев (монеты)	Нетай (графы)
18-2	СЗ (Нетай)	СЗ (Есин)	Токарев (числа)
18-3	О/зачет (Нетай)	О/зачет (Есин)	О/зачет (Сафин)

Группа рыбы: *Бурова Ольга*, Дедовик Юлия, Домбровский Андрей, Максимова Марина, Поволоцкий Михаил, Рухович Алексей, Рухович Данила, *Тужилин Михаил*, *Цой Валерия*.

Группа птицы: Беляков Сергей, *Бершадский Ефим*, Горбань Степан, Гусев Алексей, *Ивлев Федор*, *Калиниченко Иван*, Козачинский Александр, *Мокин Василий*, *Тренин Кирилл*.

Группа зверя: Калашник Анна, Кондакова Елизавета, *Матдинов Марсель*, Медведь Никита, *Немиро Владислав*, *Омельяненко Виктор*, Радонец Алексей, Царьков Олег, Ярославцев Иван.

МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы
на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Подписано в печать 22.12.2008 г. Формат $60 \times 90\ {}^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 30,5. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.