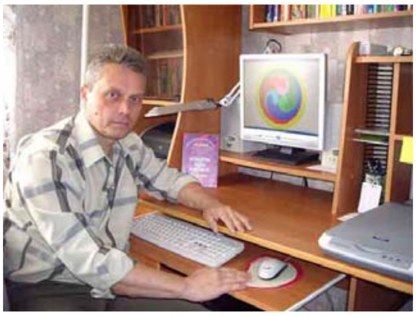
 

Уважаемый коллега!

Если Вы читаете эти строки, значит, Вы уже имеете у себя дидактические материалы по математике, разработанные мною и опубликованные в указанной книге, вышедшей в 2002 году. Но, увы, книга больше не переиздавалась и вряд ли это произойдет (разве что самому искать издателей, финансировать весь этот процесс и получить после этого мизер за свои труды – это мы уже проходили!). Поэтому я решил: не пропадать же добру (и добру хорошему!) – и делаю сейчас все возможное, чтобы эти материалы попали в руки именно учителям математики! И не важно как эти материалы попали к Вам: возможно, Вы скачали их в Интернете с сайта bbk50.narod.ru, возможно, Вы получили диск с материалами лично от меня по почте, а может быть, вы скопировали эти материалы у ваших коллег (эти материалы общедоступны и не защищены от копирования!) – главное, что они теперь у Вас и Вы можете пользоваться ими сколько угодно в своей профессиональной деятельности. А пользоваться этими дидактическими материалами очень легко – просто распечатывайте варианты заданий в нужном количестве экземпляров, благо, что все уже подготовлено именно для этого.

Да, и ещё: есть в этих материалах то, что не вошло в книгу, а значит Вы – первый, кто будет использовать это в своей работе!

Есть у меня к Вам, уважаемый коллега, одна деликатная просьба: в данный момент у меня имеются серьезные материальные затруднения, буду очень Вам благодарен, если Вы окажете мне помощь небольшим переводом на мой адрес в размере **500** рублей (или меньше, сколько сможете!). Только прошу меня понять правильно – это всего лишь просто просьба с моей стороны: Вас никто ни к чему не обязывает, Вы вправе на неё откликнуться или просто проигнорировать (никто и никогда не осудит Вас за то, как Вы поступите!).

С уважением, Виктор Владимирович Кривоногов

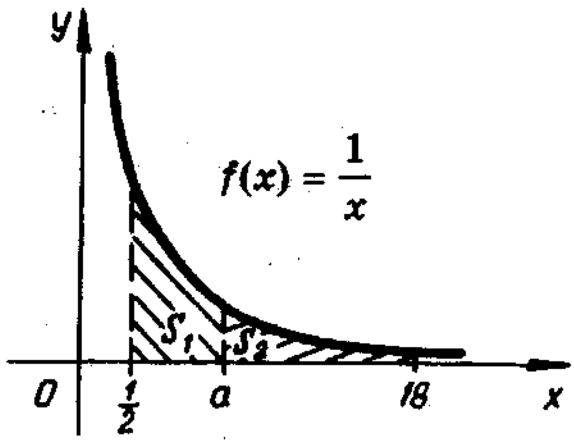
<table>
<tr>
<td>Мой адрес:
606533, Нижегородская обл.,
Городецкий р-н, д. Ковригино,
ул. Горьковская д. 25, кв. 4
Кривоногову Виктору Владимировичу</td>
<td>Если банк принимает наличные платежи для перевода в адрес третьих лиц вы можете перевести деньги для зачисления в мой Кошелек. Для этого надо перечислить средства на банковский счет ООО «ПС Яндекс.Деньги» (Москва), используя банковские реквизиты:

Получатель: ООО «ПС Яндекс.Деньги», ИНН 7736554890
КПП: 773601001
Р/с 40702810890000006823 в КБ «Русский Банк Развития» (ЗАО)
Кор. счет: 30101810500000000297
БИК: 044585297
Назначение платежа: Для участника № 41001244635609 системы Яндекс.Деньги. Авансовый платеж. Без НДС

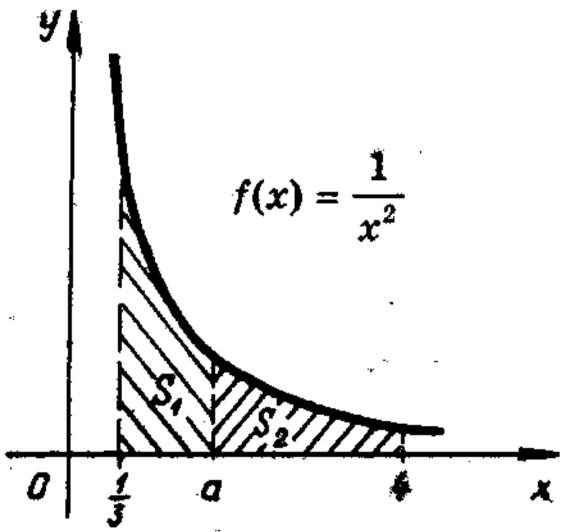
ВНИМАНИЕ! В поле «Назначение платежа» внимательно проверьте номер счета, системы Яндекс.Деньги. Просите операционистов банка указывать назначение платежа полностью при передаче данных Банку-получателю. Данные реквизиты действительны для всех банков, кроме Райффайзенбанка.</td>
</tr>
</table>

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ

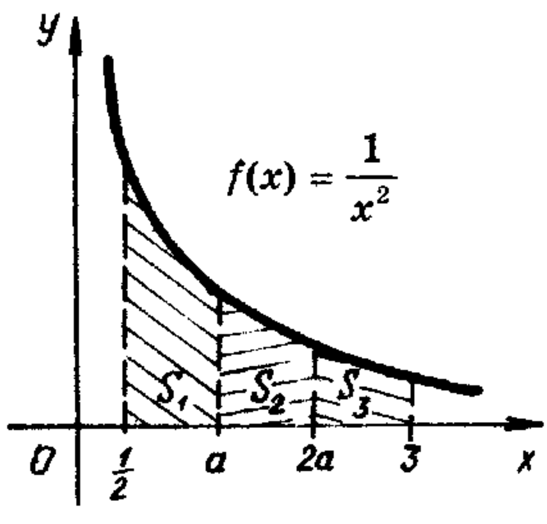
1. При каком значении a $\left(\frac{1}{2} < a < 18\right)$ $S_1 \leqslant S_2$?



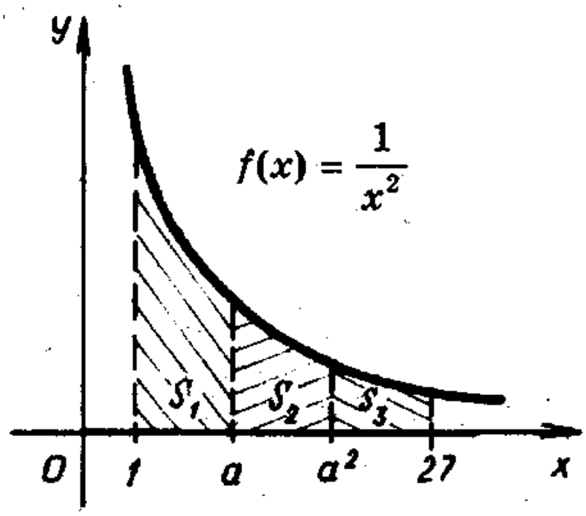
2. При каком значении a $\left(\frac{1}{3} < a < 4\right)$ $S_2 \geqslant 2S_1$?



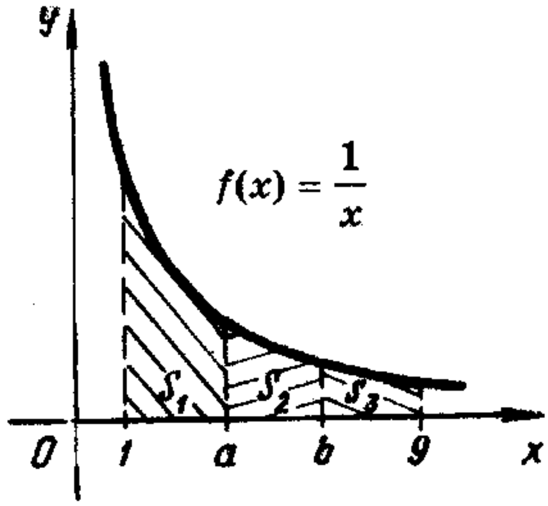
3. При каком значении a числа S_1, S_2, S_3 образуют три последовательных члена арифметической прогрессии? Найди разность этой прогрессии.



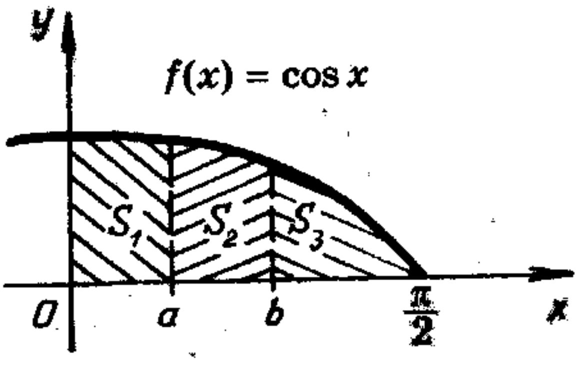
4. При каком значении числа a числа S_1, S_2, S_3 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии? Найдите знаменатель этой прогрессии.



5. Найти такие значения a и b, что
$S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$.

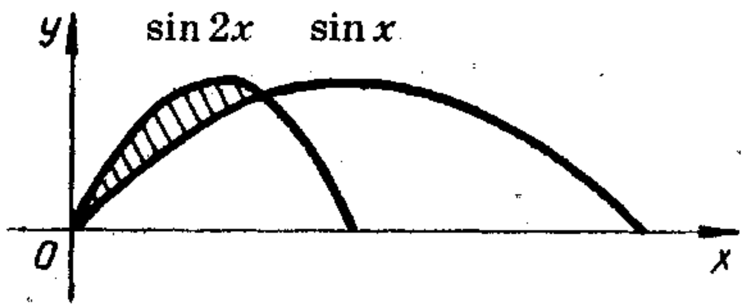


6. Найти такие значения a и b $\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$, что $S_1 = S_2 = S_3$.

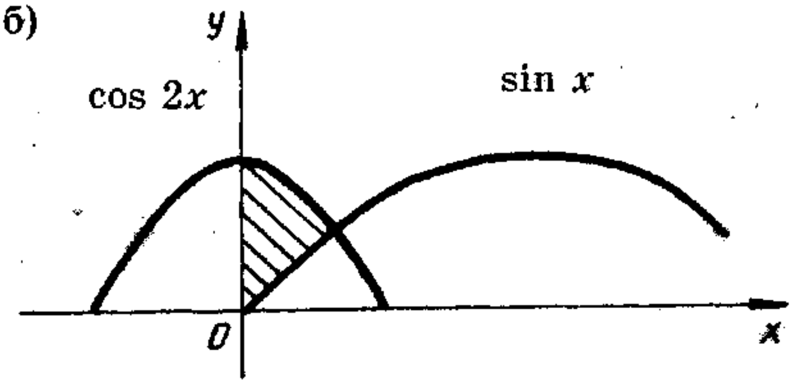


7. Найти площадь фигур, заштрихованных на рисунках:

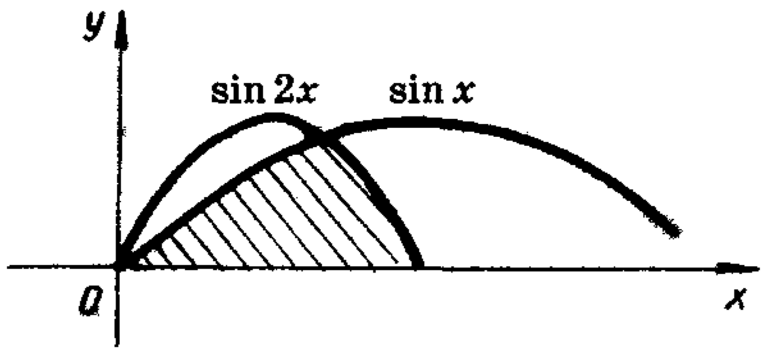
а)



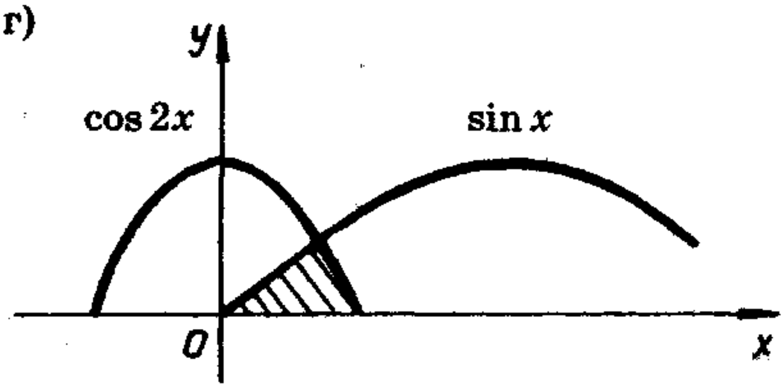
б)



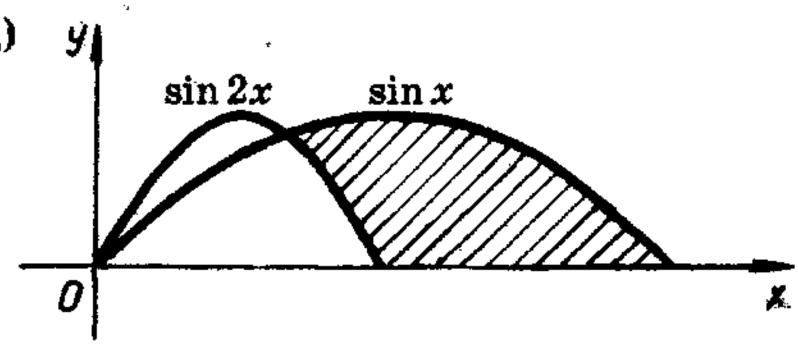
в)



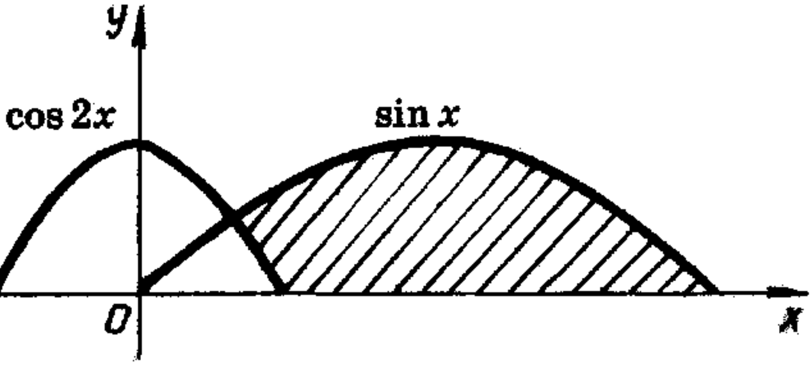
г)



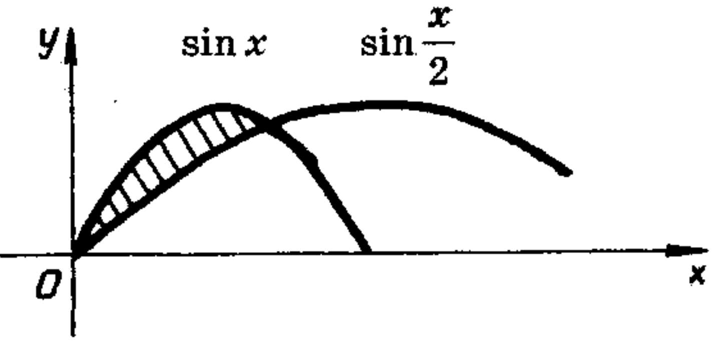
д)



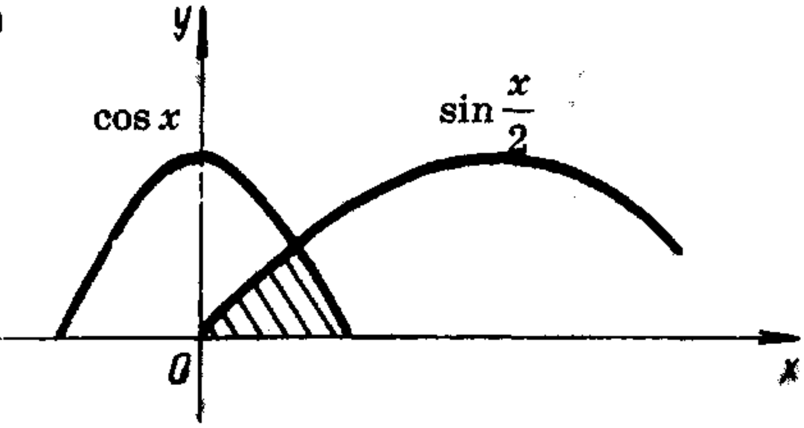
е)


y
cos 2x
sin x
0
x

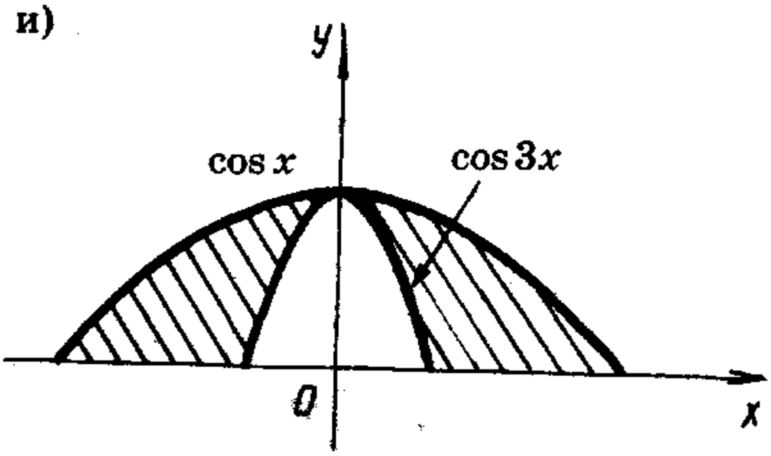
ж)


y
sin x
sin x/2
0
x

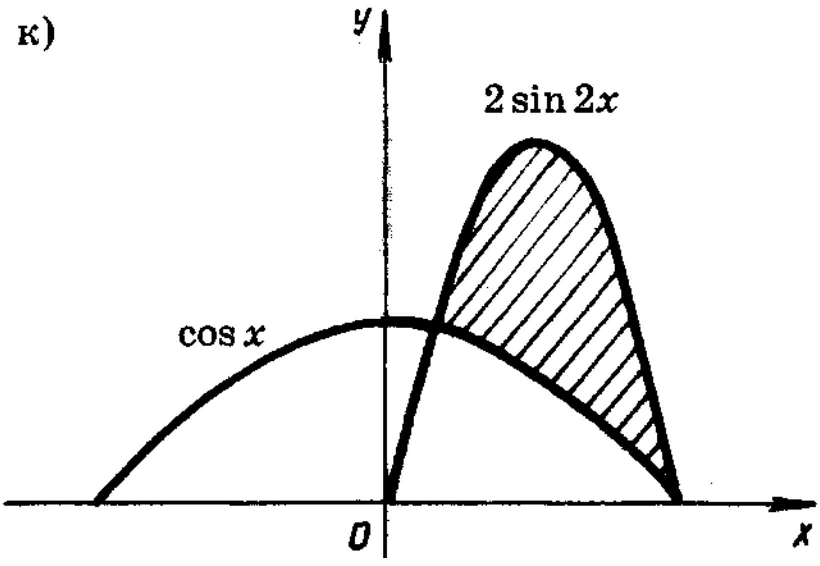
з)


y
cos x
sin x/2
0
x

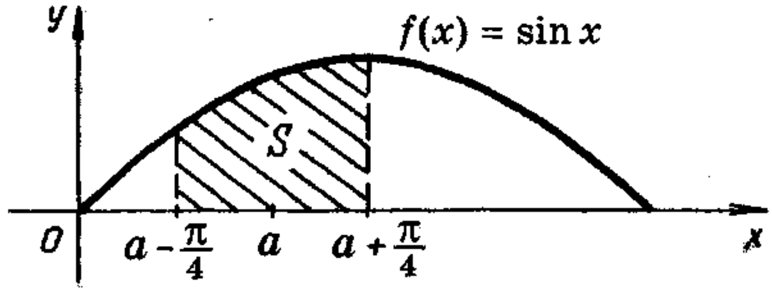
и)


y
cos x
cos 3x
0
x

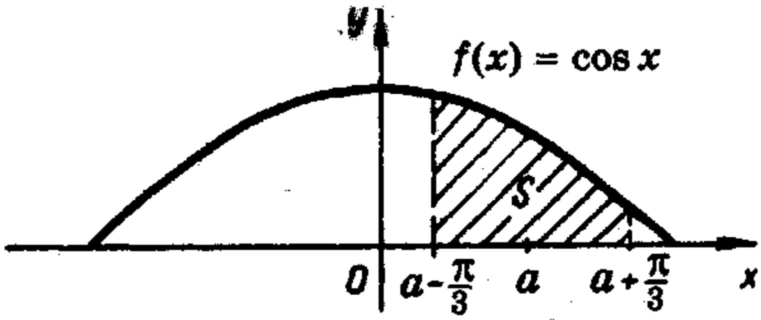
к)


y
2 sin 2x
cos x
0
x

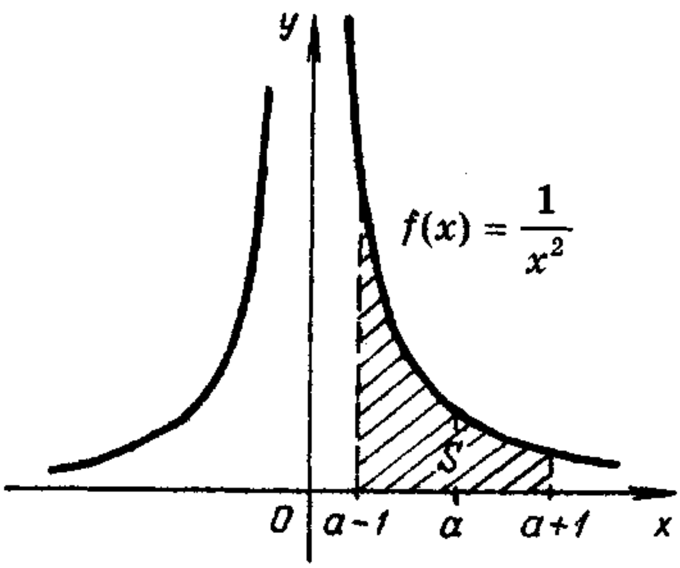
8. При каких значениях a $(0 < a < \pi)$ $S = \sqrt{\frac{3}{2}}$ кв. ед.?



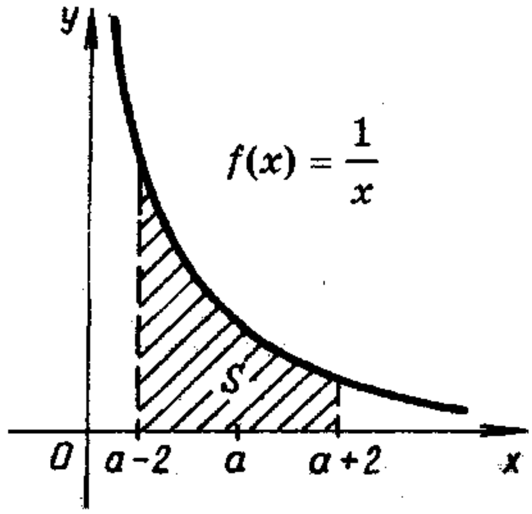
9. При каких значениях a $\left(-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}\right)$ $S = 1$ кв. ед.?



10. Найти значения a, при которых $S = 4$ кв. ед.

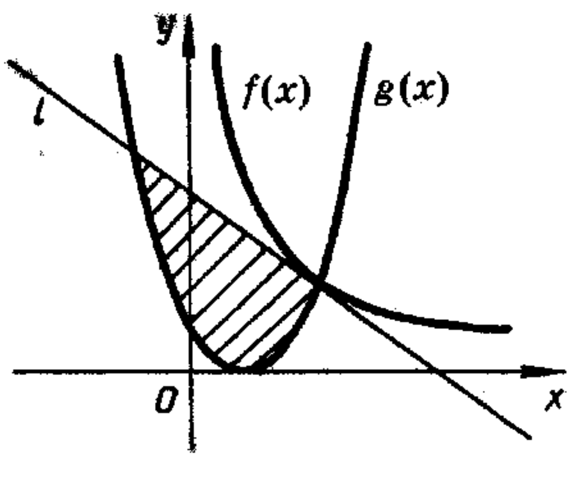


11. При каких значениях a ($a > 2$) $S = 1$ кв. ед.?



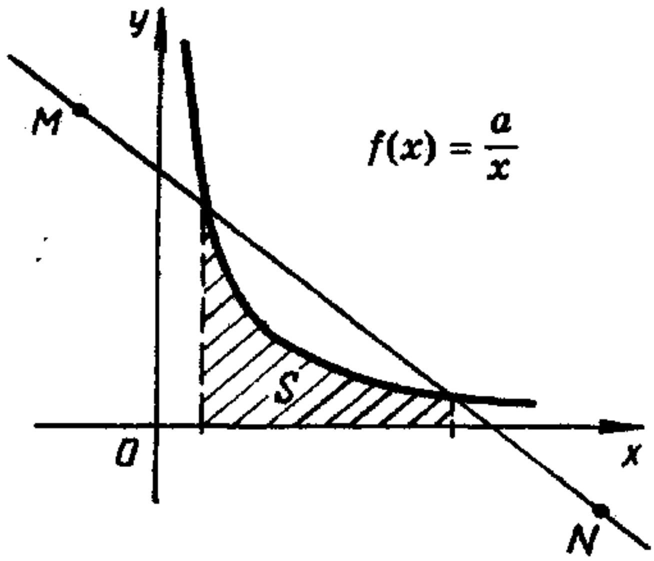
12. Заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. В точке пересечения их графиков проведена касательная l к графику функции $f(x)$. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой l и графиком функции $g(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = (x - 1)^2$; б) $f(x) = -\frac{16}{x}$, $g(x) = (x + 2)^2$.

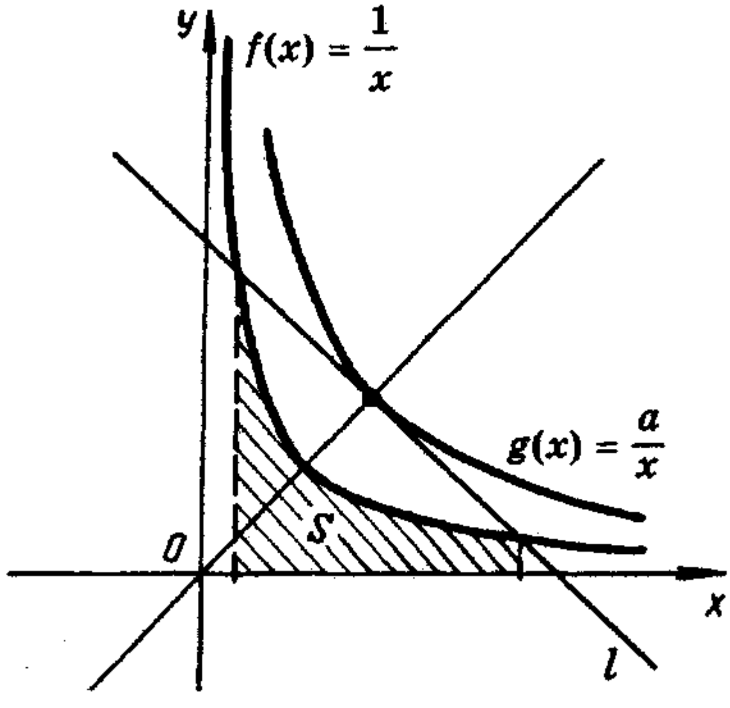


13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 + 2x - x^2$ и прямой, проходящей через точки $M(15; 29)$ и $N(-30; -61)$.

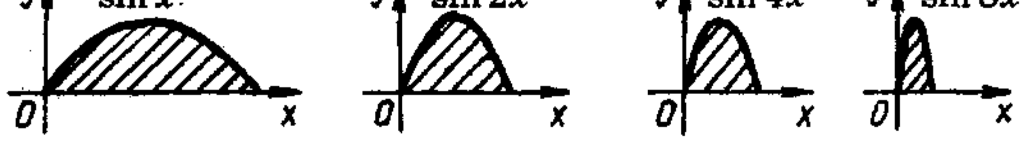
14*. Найти значение a, при котором $S = a$, если $M(-4; 7)$ и $N(60; -25)$.



15*. Заданы функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{a}{x}$; l – касательная к графику функции $g(x)$, перпендикулярная к биссектрисе I и III координатных углов. При каком значении a ($a > 1$) $S = 2$?

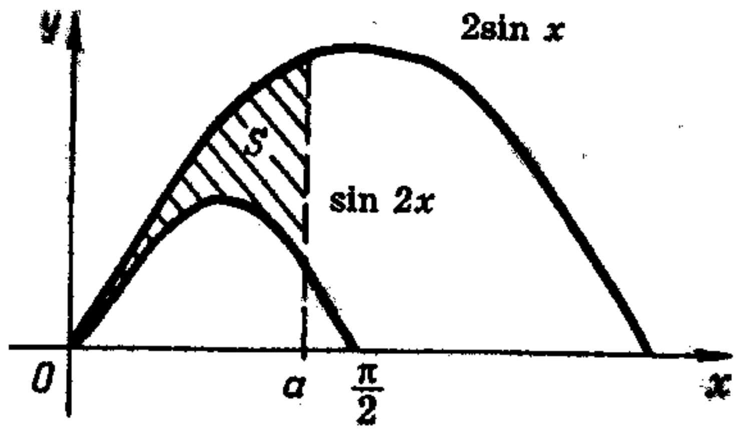


16. Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, заштрихованных на рисунках:

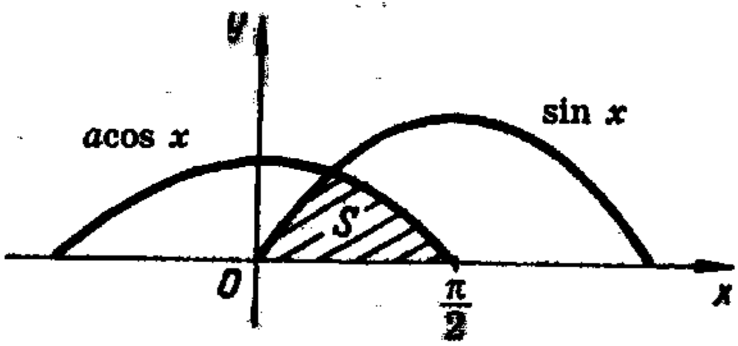


(Аргумент каждой следующей фигуры увеличивается в 2 раза.)

17. При каком значении a $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$ $S = \frac{1}{2}$ кв. ед.?



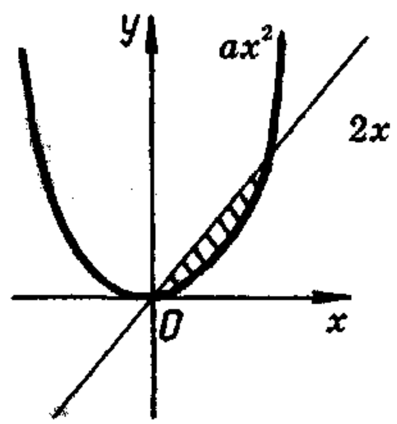
18. Найти значение a, при котором $S = \frac{1}{3}$ кв. ед.



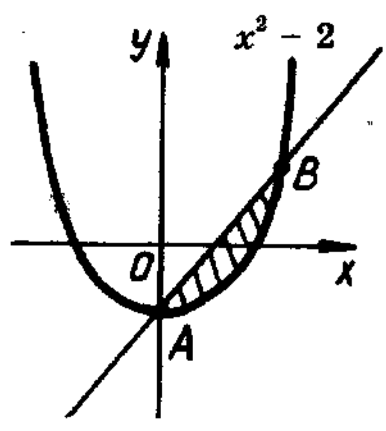
19. При каком значении a ($a \neq 0$) площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$f(x) = ax^2$ и $g(x) = 2x$,

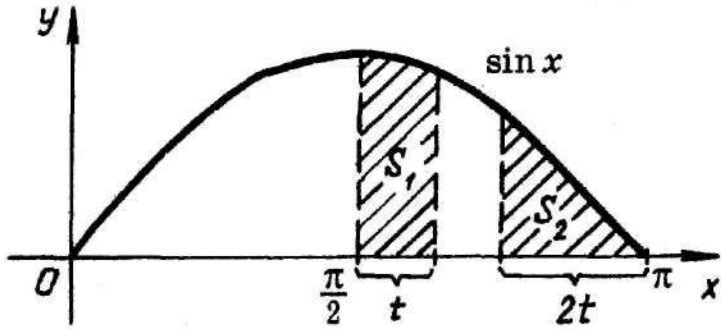
меньше $\frac{2}{3}$ кв. ед.?



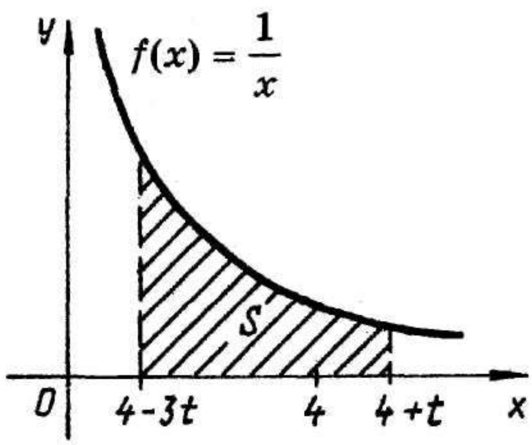
20. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 2$ и прямой AB, равна 4,5 кв. ед. Найти координаты точки B, если известно, что в точке A функция $f(x)$ имеет минимум.



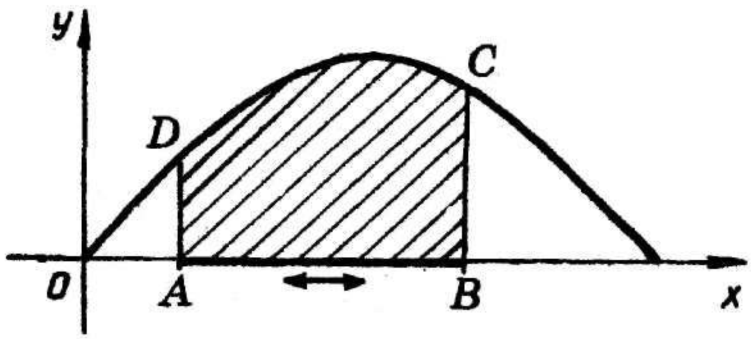
21. При каких значениях t $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ S_1 больше S_2 на 0,125 кв. ед.?



22. Найти значения t, при которых $S = 1$ кв. ед.



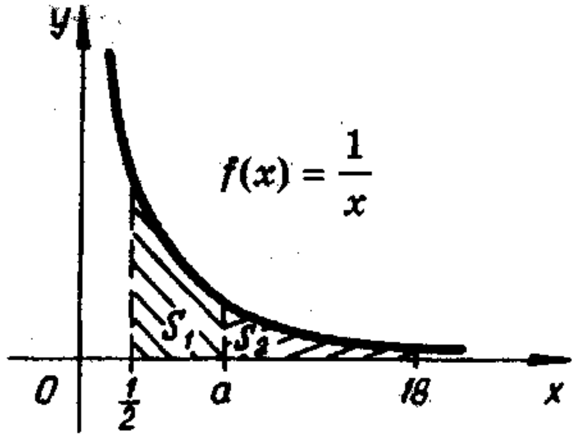
23*. Задана функция $f(x) = \sin x$, $x \in [0; \pi]$. Отрезок AB длиной $\frac{\pi}{2}$ скользит по оси Ox. Найти координаты таких точек D и C, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна $\sqrt{2}$ кв. ед.



ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ

1. При каком значении a $\left(\frac{1}{2} < a < 18\right)$ $S_1 \leqslant S_2$?

Указания к решению:



$$S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{a} \frac{1}{x}\,dx = \ln a + \ln 2;$$

$$S_2 = \int_{a}^{18} \frac{1}{x}\,dx = \ln 18 - \ln a;$$

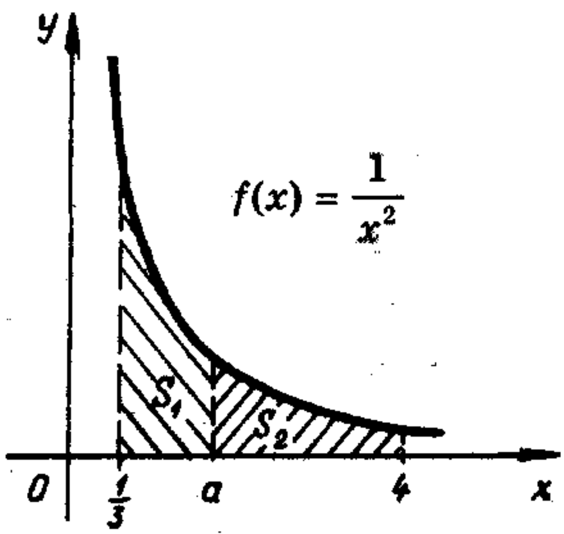
$S_1 \leqslant S_2 \Rightarrow \ln a + \ln 2 \leqslant \ln 18 - \ln a.$

Решая неравенство, получаем $0 \leqslant a \leqslant 3$.

Ответ: $\frac{1}{2} < a \leqslant 3$.

2. При каком значении a $\left(\frac{1}{3} < a < 4\right)$ $S_2 \geqslant 2S_1$?

Указания к решению:



$S_1 = 3 - \frac{1}{a}$;

$S_2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{4}$;

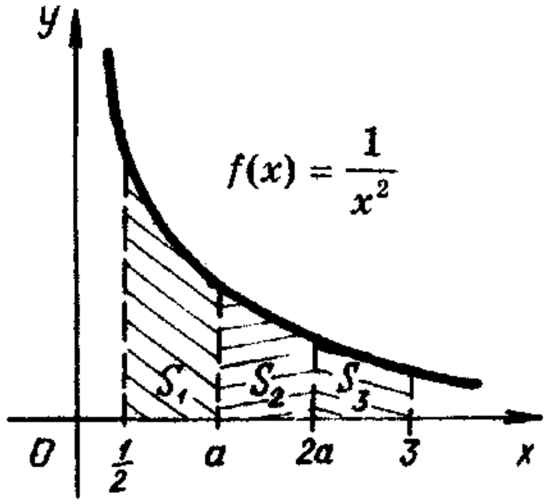
$S_2 \geqslant 2S_1 \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \geqslant 6 - \frac{2}{a}.$

Решая это неравенство, получаем $a \leqslant \frac{12}{25}$.

Ответ: $\frac{1}{3} < a \leqslant \frac{12}{25}$.

3. При каком значении a числа S_1, S_2, S_3 образуют три последовательных члена арифметической прогрессии? Найди разность этой прогрессии.

Указания к решению:



$$S_1 = 2 - \frac{1}{a},\ S_2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a},$$

$$S_3 = \frac{1}{2a} - \frac{1}{3};$$

согласно свойству арифметической прогрессии

$2S_2 = S_1 + S_3$, то есть

$$2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) = 2 - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{3};$$

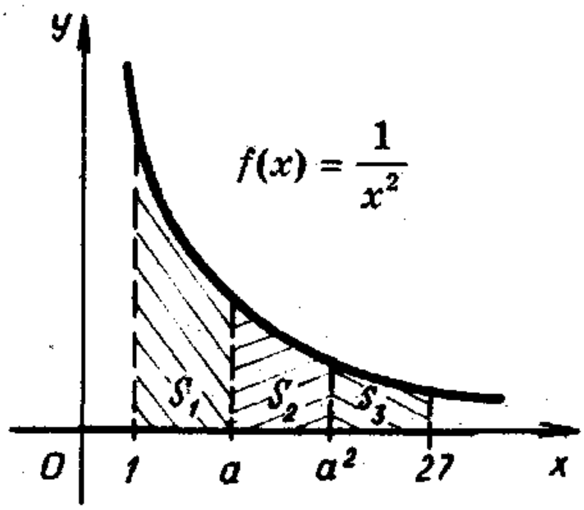
решая уравнение, получаем $a = \frac{9}{10}$; значит,

$$S_1 = \frac{8}{9},\ S_2 = \frac{5}{9},\ S_2 - S_1 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $a = \frac{9}{10}$; разность прогрессии равна $-\frac{1}{3}$.

4. При каком значении числа a числа S_1, S_2, S_3 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии? Найдите знаменатель этой прогрессии.

Указания к решению:



$$S_1 = 1 - \frac{1}{a},\ S_2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2},$$

$$S_3 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{27};$$

согласно свойству геометрической прогрессии

$$S_2{}^2 = S_1 S_3, \text{ то есть } \left(\frac{a-1}{a^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a-1}{a} \cdot \frac{27 - a^2}{27a^2};$$

решая уравнение, находим $a = 1$ (не подходит) и $a = 3$; значит,

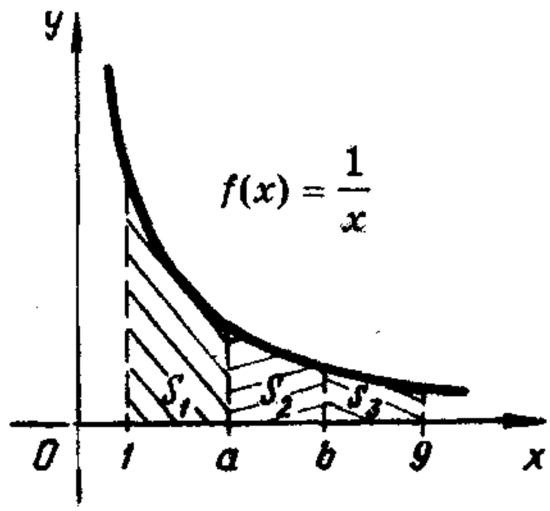
$$S_8 = \frac{2}{3},\ S_2 = \frac{2}{9},\ S_2 : S_1 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $a = 3$; знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{3}$.

5. Найти такие значения a и b, что $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3$.

Указания к решению:

$$S_1 = \ln a,\ S_2 = \ln b - \ln a,$$
$$S_3 = \ln 9 - \ln b.$$



Способ I: составим систему

$$\begin{cases} S_2 = 2S_1, \\ S_3 = 3S_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln b - \ln a = 2\ln a, \\ \ln 9 - \ln b = 3\ln a; \end{cases}$$

решая систему, получаем $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 3$.

Способ II: $S_{\text{общ}} = \int\limits_1^9 \frac{1}{x}\,dx = \ln 9;$

$$S_1 = \frac{1}{6}S_{\text{общ}} \Rightarrow \ln a = \frac{1}{6}\ln 9;$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_{\text{общ}} \Rightarrow \ln 9 - \ln b = \frac{1}{2}\ln 9;$$

решая уравнения, получаем $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 3$.

Ответ: $a = \sqrt[3]{3}$, $b = 3$.

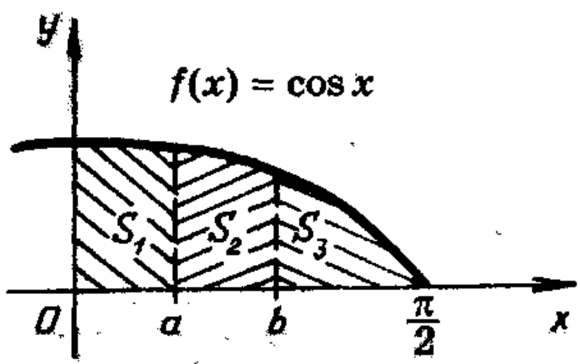
6. Найти такие значения a и b $\left(0 < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$, что $S_1 = S_2 = S_3$.

Указания к решению:

$S_1 = \sin a,$

$S_2 = \sin b - \sin a;$

$S_3 = 1 - \sin b;$ $S_{\text{общ}} = 1.$



Способ I:

$$S_1 = \frac{1}{3}S_{\text{общ}} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{3}S_{\text{общ}} \Rightarrow 1 - \sin b = \frac{1}{3};$$

решая уравнения, получаем $a = \arcsin\frac{1}{3}$; $b = \arcsin\frac{2}{3}$.

Способ II:

$$\begin{cases} S_1 = S_2, \\ S_2 = S_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \sin b - \sin a, \\ \sin b - \sin a = 1 - \sin b. \end{cases}$$

Ответ: $a = \arcsin\frac{1}{3}$; $b = \arcsin\frac{2}{3}$.

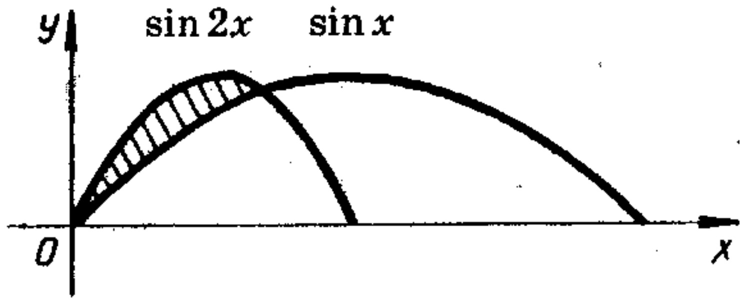
7. Найти площадь фигур, заштрихованных на рисунках:
Указания к решению:
Решая уравнение

$$\sin 2x = \sin x,$$

находим абсциссу точку пересечения $x = \frac{\pi}{3}$;

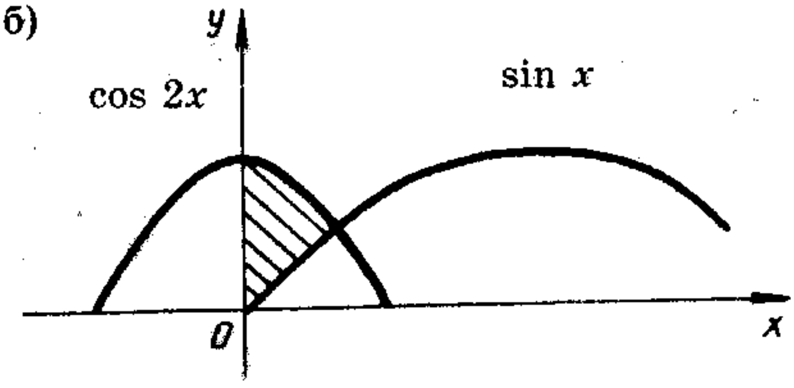
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,dx = \frac{1}{4} \text{ (кв. ед.)}.$$

а)

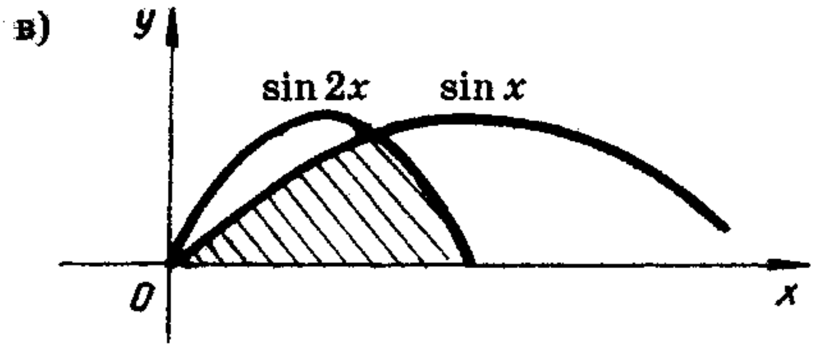


а) *Ответ*: $\frac{1}{4}$ кв. ед.

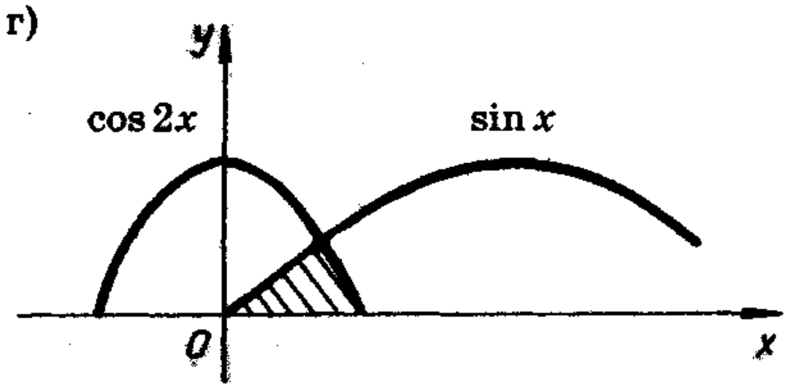
б)



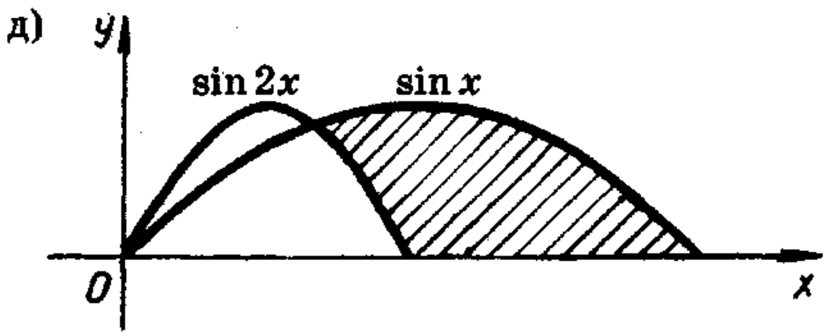
б) *Ответ*: $\frac{3\sqrt{3} - 4}{4}$ кв. ед.



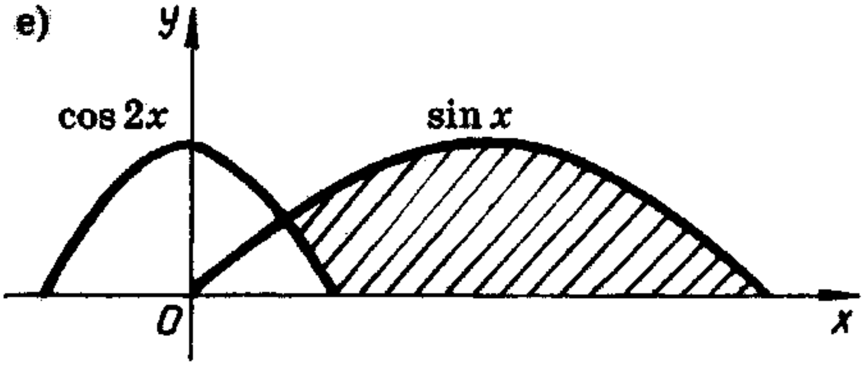
в) *Ответ*: $\frac{3}{4}$ кв. ед.



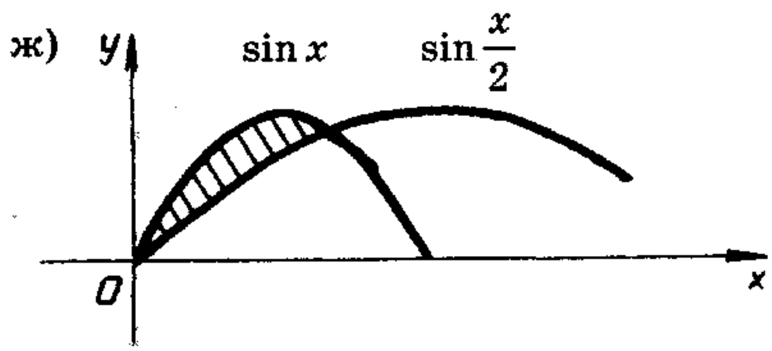
г) *Ответ*: $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{4}$ кв. ед.



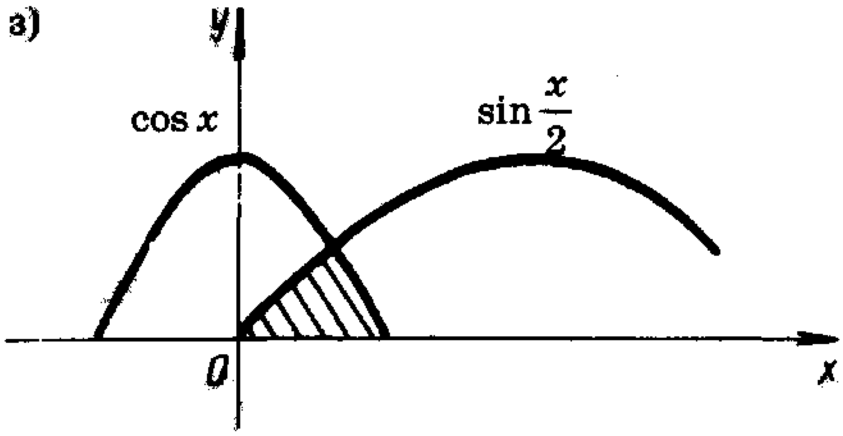
д) *Ответ*: $1\frac{1}{4}$ кв. ед.



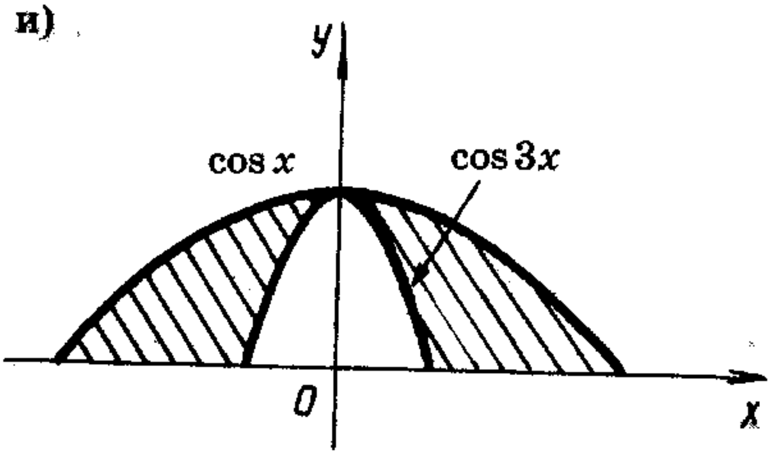
е) *Ответ*: $\frac{2 + 3\sqrt{3}}{4}$ кв. ед.



ж) *Ответ*: $\frac{1}{2}$ кв. ед.

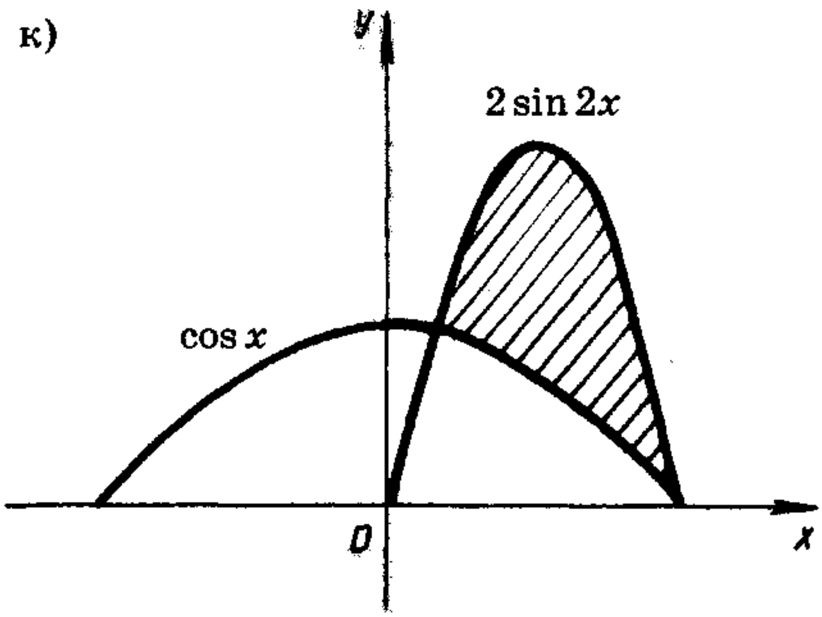


з) *Ответ*: $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.



и) *Ответ*: $1\frac{1}{3}$ кв. ед.

к)



к) Указания к решению.

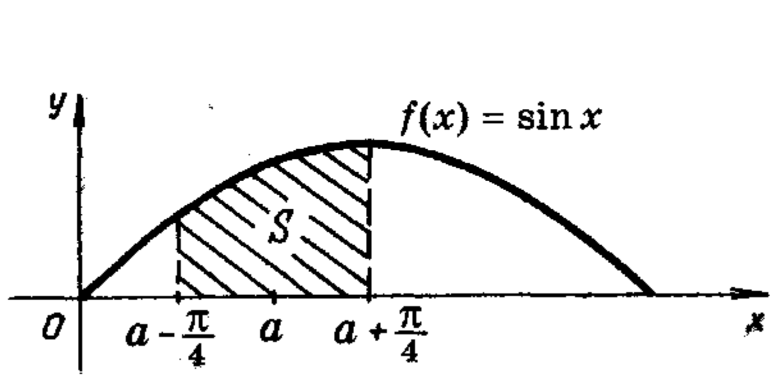
Решая уравнение $\cos x = 2\sin 2x$,

находим абсциссу точки пересечения $x = \arcsin \frac{1}{4}$;

$$S = \int_{\arcsin \frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin 2x - \cos x)\, dx = 1\frac{1}{8} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $1\frac{1}{8}$ кв. ед.

8. При каких значениях a $(0 < a < \pi)$ $S = \sqrt{\frac{3}{2}}$ кв. ед.?



Указания к решению:

$$S = \int_{a-\frac{\pi}{4}}^{a+\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right);$$

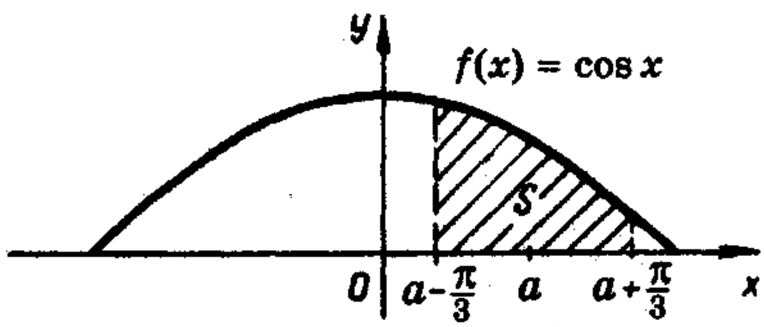
решая уравнение

$$\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}},$$

находим $a=\dfrac{\pi}{3}$ и $a=\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: $a=\dfrac{\pi}{3}$, $a=\dfrac{2\pi}{3}$.

9. При каких значениях a $\left(-\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $S=1$ кв. ед.?



Указание к решению:

$$S=\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right);$$

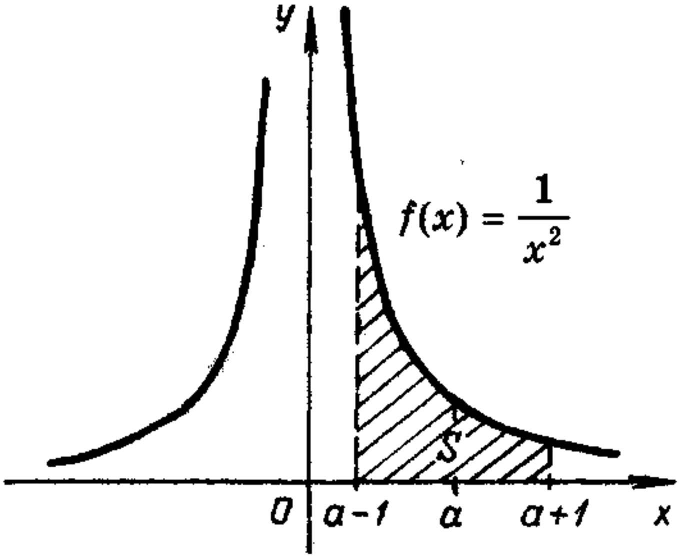
решая уравнение

$$\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

находим $a=\pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $a=\pm\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Найти значения a, при которых $S = 4$ кв. ед.



Указание к решению:

$$S = -\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1};$$

решая уравнение

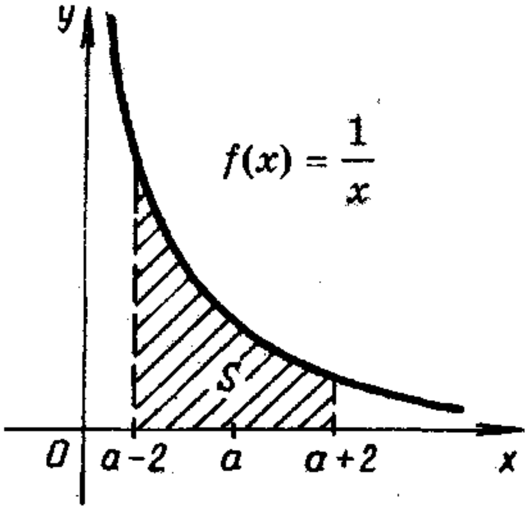
$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = 4,$$

находим $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. При каких значениях a $(a > 2)$ $S = 1$ кв. ед.?

Указания к решению:



$$S = \ln\frac{a+2}{a-2};$$

решая уравнение

$$\ln\frac{a+2}{a-2} = 1,$$

находим $a = \frac{2(1+e)}{e-1}$.

Ответ: $a = \frac{2(1+e)}{e-1}$.

12. Заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. В точке пересечения их графиков проведена касательная l к графику функции $f(x)$. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой l и графиком функции $g(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = (x-1)^2$; б) $f(x) = -\frac{16}{x}$, $g(x) = (x+2)^2$.

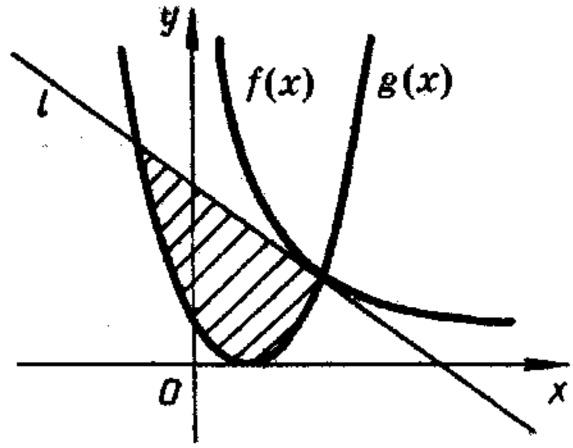
а) Указания к решению:

- Найдем точку пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\frac{2}{x} = (x-1)^2 \Rightarrow x = 2.$$

• Составим уравнение касательной l:

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$



• Найдем точки пересечения прямой l и графика функции $g(x)$:

$(x-1)^2 = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

• $S = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(-\frac{1}{2}x + 2 - (x-1)^2\right)dx = 2\frac{29}{48}$ (кв. ед.).

Ответ: $2\frac{29}{48}$ кв. ед.

б) *Ответ*: $20\frac{5}{6}$ кв. ед.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 + 2x - x^2$ и прямой, проходящей через точки $M(15; 29)$ и $N(-30; -61)$.

Указания к решению:

1) Составим уравнение прямой MN:

$$y = kx + l \Rightarrow \begin{cases} 29 = 15k + l, \\ -61 = -30k + l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2, \\ l = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - 1.$$

2) Найдем точки пересечения этой прямой с графиком данной функции: $x_{1,2} = \pm 2$.

3) $S = 10\frac{2}{3}$ кв. ед.

Ответ: $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

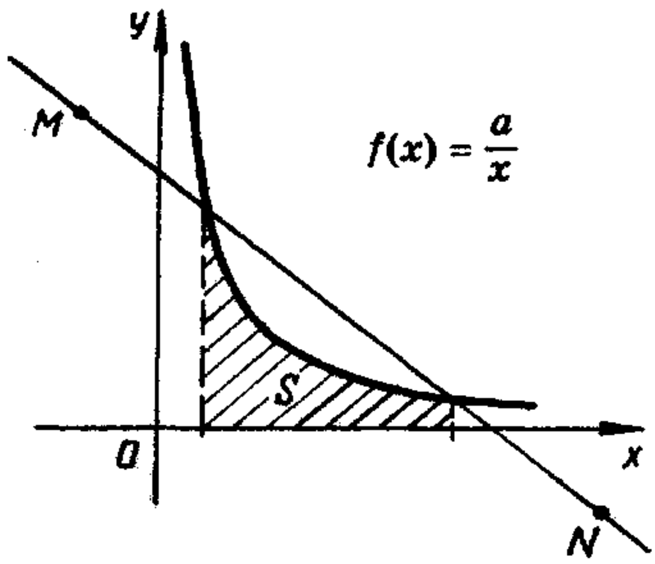
14*. Найти значение a, при котором $S = a$, если $M(-4; 7)$ и $N(60; -25)$.

Указания к решению:

1) Составим уравнение прямой MN:

$$y = kx + l \Rightarrow \begin{cases} 7 = -4k + l, \\ -25 = 60k + l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ l = 5 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

2) Решая уравнение



$$\frac{a}{x} = -\frac{1}{2}x + 5,$$

находим точки пересечения прямой MN с данным графиком:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 2a}.$$

3) $$S = \int\limits_{5-\sqrt{25-2a}}^{5+\sqrt{25-2a}} \frac{a}{x}\,dx =$$

$$= a\ln\frac{\left(5 + \sqrt{25 - 2a}\right)^2}{2a}.$$

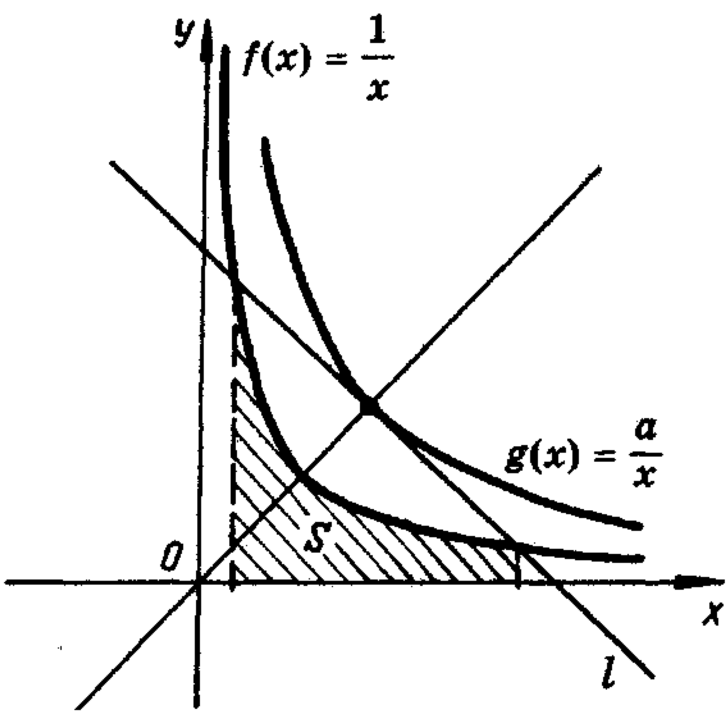
4) Решая уравнение

$$a\ln\frac{\left(5 + \sqrt{25 - 2a}\right)^2}{2a} = a,$$

получаем $a = \dfrac{10e - 1}{2e^2}$.

Ответ: $a = \dfrac{10e - 1}{2e^2}$.

15*. Заданы функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = \dfrac{a}{x}$; l – касательная к графику функции $g(x)$, перпендикулярная к биссектрисе I и III координатных углов. При каком значении a $(a > 1)$ $S = 2$?



Указания к решению:

1) Найдем абсциссу точки касания:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{x}, \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{x} = x \Rightarrow x^2 = a;\ x = \sqrt{a}.$$

2) Составим уравнение касательной l:

$$y = -x + 2\sqrt{a}.$$

3) Найдем точки пересечения касательной с графиком функции $f(x)$:

$$\frac{1}{x} = -x + 2\sqrt{a} \Rightarrow x_{1,2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{a-1}.$$

4) $S = \ln \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}}$.

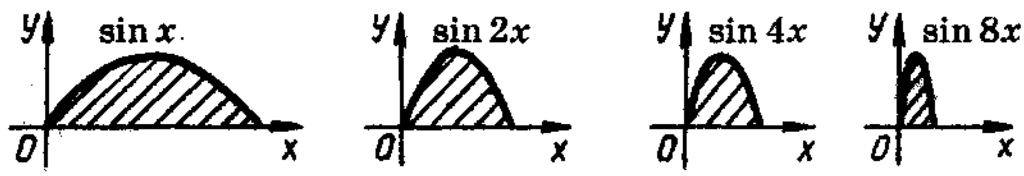
5) Решая уравнение

$$\ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}} = 2,$$

находим $a = \dfrac{1}{4}\left(e + \dfrac{1}{e}\right)^2$.

Ответ: $a = \dfrac{1}{4}\left(e + \dfrac{1}{e}\right)^2$.

16. Найти сумму площадей бесконечного количества фигур, заштрихованных на рисунках:



(Аргумент каждой следующей фигуры увеличивается в 2 раза.)

Указания к решению:

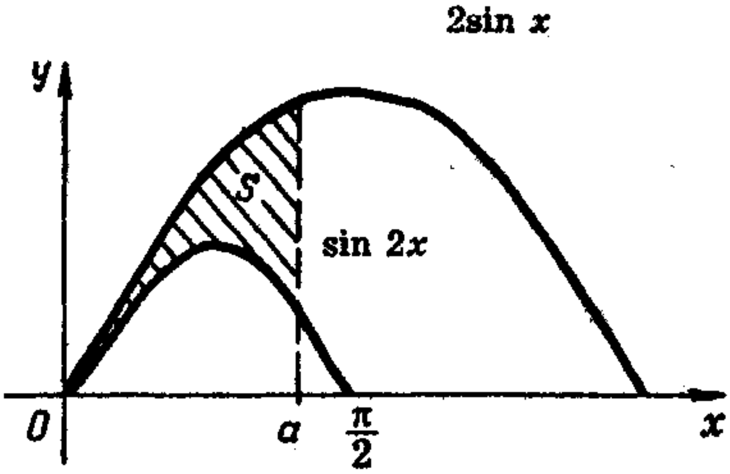
$\sin nx = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{n}$;

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\, dx = \frac{2}{n},\ \text{где } n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots;$$

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 4 кв. ед.

17. При каком значении a $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$ $S = \frac{1}{2}$ кв. ед.?



Указания к решению:

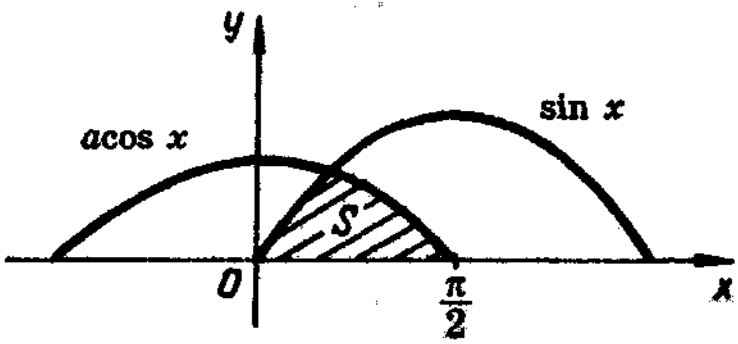
1) $S = \int\limits_0^a (2\sin x - \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos 2a - 2\cos a + \frac{3}{2}.$

2) $S = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2a - 2\cos a + \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$

откуда $\cos a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \arccos\frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$

Ответ: $a = \arccos\frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$

18. Найти значение a, при котором $S = \frac{1}{3}$ кв. ед.



Указания к решению:

1) Найдем точку пересечения графиков:

$a\cos x = \sin x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a$.

$$2)\ S = \int\limits_0^{\operatorname{arctg} x} \sin x\,dx + \int\limits_{\operatorname{arctg} a}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx = 1 + a - \sqrt{1+a^2}.$$

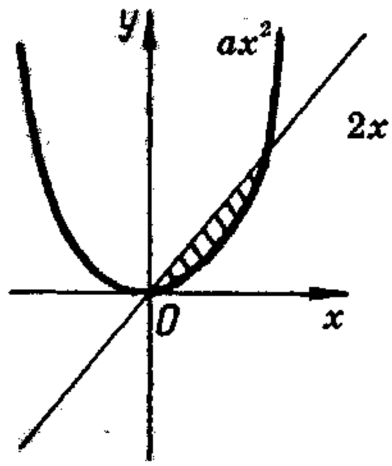
$$3)\ S = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 + a - \sqrt{1+a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $a = \dfrac{5}{12}$.

19. При каком значении a ($a \neq 0$) площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$f(x) = ax^2$ и $g(x) = 2x$,

меньше $\dfrac{2}{3}$ кв. ед.?



Указания к решению:

1) Найдем точки пересечения графиков:

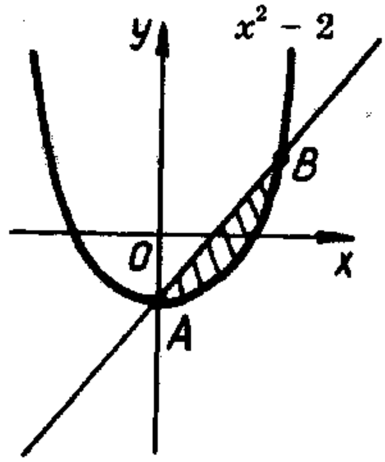
$ax^2 = 2x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{2}{a}$.

$$2)\ S = \int\limits_0^{\frac{2}{a}} \left(2x - ax^2\right) dx = \frac{4}{3a^2}.$$

$$3)\ S < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3a^2} < \frac{2}{3} \Rightarrow a < -\sqrt{2},\ a > \sqrt{2}.$$

Ответ: $|\,a\,| > \sqrt{2}$.

20. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 2$ и прямой AB, равна 4,5 кв. ед. Найти координаты точки B, если известно, что в точке A функция $f(x)$ имеет минимум.



Указания к решению:

1) Найдем координаты точки A: $A(0; -2)$.

2) Запишем абсциссы точек пересечения графика функции $f(x)$ и AB: $x = 0$ и $x = k$.

3) $S = \frac{k^3}{6}$.

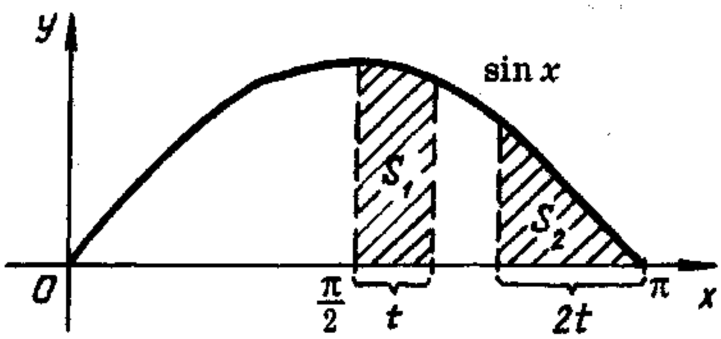
4) $\frac{k^3}{6} = 4{,}5 \Rightarrow k = 3$.

5) $f(3) = 7$.

6) В силу симметрии $x = -3$ и $f(-3) = 7$.

Ответ: (3; 7) и (– 3; 7).

21. При каких значениях t $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ S_1 больше S_2 на 0,125 кв. ед.?



Указания к решению:

1) $S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t} \sin x\, dx = \sin t$; $S_2 = \int\limits_{\pi-2t}^{\pi} \sin x\, dx = 2\sin^2 t$.

2) $S_1 - S_2 = 0{,}125 \Rightarrow \sin t - 2\sin^2 t = \frac{1}{8}$;

решая это уравнение, находим $t = \arcsin \frac{1}{4}$.

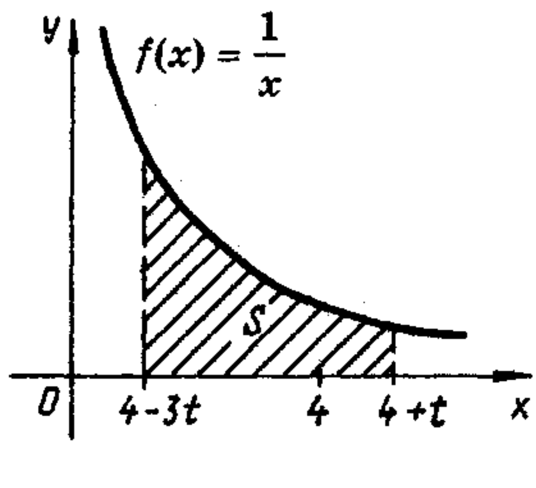
Ответ: $t = \arcsin \frac{1}{4}$.

22. Найти значения t, при которых $S = 1$ кв. ед.

Указания к решению:

Случай 1: $0 < t < \frac{4}{3}$;

$$S = \int\limits_{4-3t}^{4+t} \frac{1}{x}\, dx = \ln \frac{4+t}{4-3t};$$



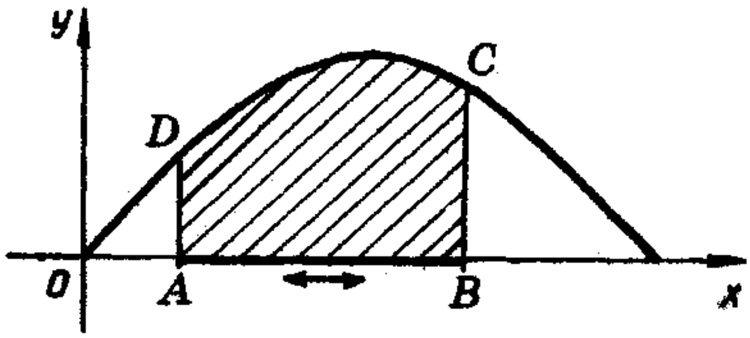
$\ln \dfrac{4+t}{4-3t} = 1 \Rightarrow t = \dfrac{4e-4}{1+3e}.$

Случай 2: $-4 < t < 0$;

$$S = \int\limits_{4+t}^{4-3t} \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{4-3t}{4+t};\ \ln \frac{4-3t}{4+t} = 1 \Rightarrow t = \frac{4e-4}{e-3}.$$

Ответ: $t = \dfrac{4e-4}{1+3e},\ t = \dfrac{4e-4}{e-3}.$

23*. Задана функция $f(x) = \sin x$, $x \in [0;\ \pi]$. Отрезок AB длиной $\dfrac{\pi}{2}$ скользит по оси Ox. Найти координаты таких точек D и C, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна $\sqrt{2}$ кв. ед.



Указания к решению:

1) Пусть $A(t;\ 0)$, тогда

$$B\left(t + \frac{\pi}{2};\ 0\right),\ C\left(t + \frac{\pi}{2};\ f\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right),\ D(t;\ f(t)).$$

2) $S = \displaystyle\int\limits_{t}^{t+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \sin t + \cos t.$

3) Решая уравнение

$\sin t + \cos t = \sqrt{2}$,

находим $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $C\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ D\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$